Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование дискретных динамических систем на плоскости»

Студент 315 группы
Е. Н. Годунова

Научный руководитель
аспирант В. В. Абрамова

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Заданы две дискретные динамические системы:

$$u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_t)), \qquad u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_{t-1})).$$

Для первой системы:

1. найти неподвижные точки и исследовать их устойчивость;
2. проверить существования циклов длины 2 и 3;
3. построить бифуркационную диаграмму;
4. построить зависимость показателя Ляпунова от значения параметра.

Для второй системы:

1. найти особые точки и исследовать их устойчивость;
2. проверить существование бифуркации Неймарка-Сакера, если она присутствует – построить инвариантную кривую.

Исследование необходимо проводить аналитически, подкрепляя результат иллюстрациями, полученными с помощью численного моделирования.

2 Исследование первой системы

2.1 Неподвижные точки

Определение. *Точка u называется неподвижной точкой динамической системы $u_{t+1} = f(u_t)$, если $f(u) = u$.*

Рассмотрим уравнение:

$$u = ru^2(1 - \ln(1 + u)).$$

Очевидно, что при любом r есть решение $u_0^* = 0$. Необходимо исследовать уравнение при разных r. Для этого введем систему:

$$f_1(u) = ru^2(1 - \ln(1 + u)),$$

$$f_2(u) = u.$$

Рассмотрим первую и вторую производные функции $f_1(u)$.

$$f'(u) = ur\left(\frac{u+2}{u+1} - 2\ln(1+u)\right), \qquad f''(u) = -r\left(\frac{u^2-2}{(u+1)^2} + 2\ln(1+u)\right).$$

До определенного $u_0 > 0$ производная имеет положительное значение, а после u_0 – отрицательное. Также существует значение u, при котором вторая производная обнуляется. Значит, функция f_1 возрастает, имеет перегиб и затем убывает: $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = -\infty$.

В зависимости от разных r появляется 3 случая:

1. 1 точка пересечения $u_0^* = 0$;
2. 2 точки пересечения $u_0^* = 0$ и точка касания графиков $f_1(u)$ и $f_2(u)$;
3. 3 точки пересечения $u_0^* = 0$ и 2 точки пересечения графиков $f_1(u)$ и $f_2(u)$.

При помощи программы на языке Matlab найдем значение параметра r, при котором графики функций касаются. Для этого нужно решить систему:

$$\begin{cases} f_1(u) = f_2(u) \\ f_1'(u) = f_2'(u) \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} u = 0.76322 \\ r = 3.0269 \end{cases}$$

Следовательно, в зависимости от параметра r:

1. 1 особая точка $u_0^* = 0$ при $r < 3.0269$;
2. 2 особых точки $u_0^* = 0$ и $u_1^* = 0.76322$ при $r = 3.0269$;
3. 3 особых точки $u_0^* = 0$ и $0 < u_2^* < 0.76322 < u_3^*$ при $r > 3.0269$.

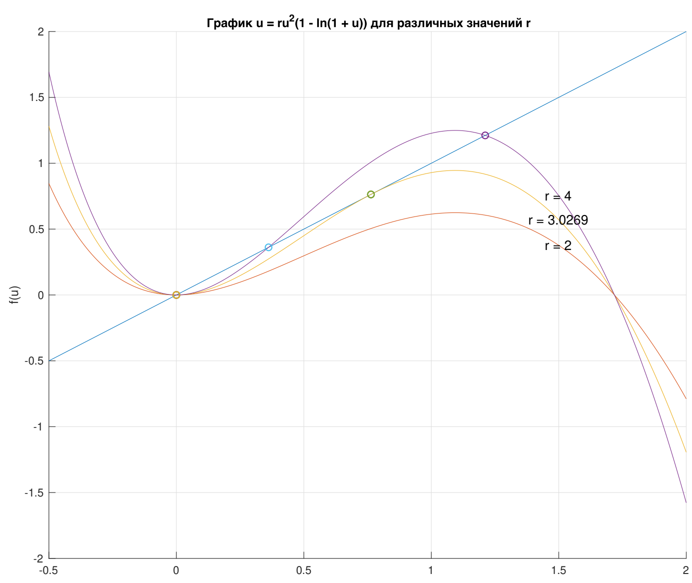

Рис. 1: особые точки

2.2 Устойчивость неподвижных точек

Определение. *Неподвижная точка u^* устойчива по Ляпунову, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такая что для любой точки u_0 из δ-окрестности точки u^* верно $|u^* - u_t| < \epsilon$ для любого $t \geq 0$, то есть траектория системы u_t содержится в ϵ-окрестности точки u^*.*

Определение. *Неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если она устойчива по Ляпунову, и, кроме того, для тех же u_0, что и в прошлом определении, выполнено $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = u^*$.*

Утверждение. *Если $|f'(N^*)| < 1$, то N^* – асимптотически устойчивая неподвижная точка. Если $|f'(N^*)| > 1$, то N^* – не устойчивая неподвижная точка.*

Подставим точку $u_0^* = 0$ в формулу производной:

$$f'(u^*) = 0 * r\left(\frac{0+2}{0+1} - 2\ln(1+0)\right) = 0$$

Получается, $u_0^* = 0$ всегда устойчивая (для любого r) по утверждению.

Рассмотрим точку $u_1^* = 0.76322$ при $r = 3.0269$. В этом случае значение производной $f'(u_1^*) = 1$. Значит, ничего утверждать об устойчивости этой точки мы не можем. Точка является странным аттрактором.

Теперь рассмотрим точки $0 < u_2^* < 0.76322 < u_3^*$ при $r > 3.0269$. Для этого посмотрим на график производной и воспользуемся программой на языке Matlab. При $r < 4,2822$ особая точка u_3^* устойчива, а u_2^* не устойчива. При $r > 4,2822$ про точку u_3^* мы ничего сказать не можем. При $r > 4,2822$ обе точки неустойчивы. На графике приведена зависимость значений производной в особых точках от параметра r. Красным отмечены значения для u_3^*, а синим – для u_2^*.

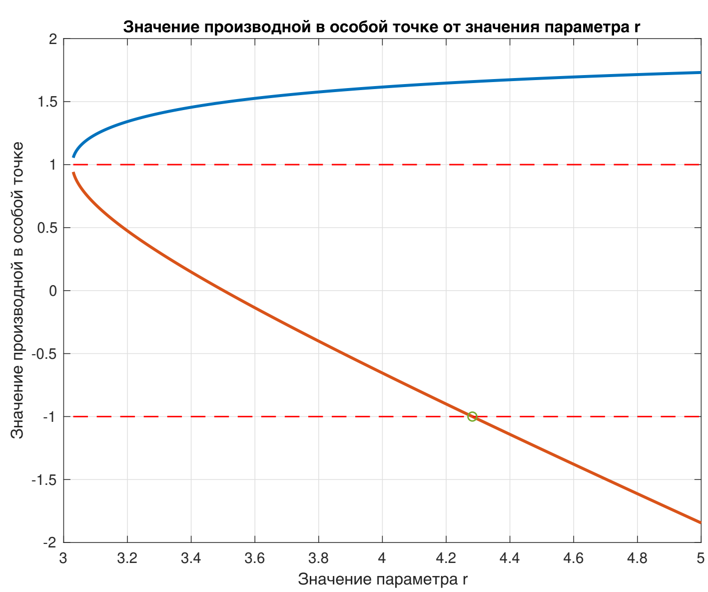

Рис. 2: на графике отмечена точка $r^* = 4,2822$

Отметим на графиках случаи:

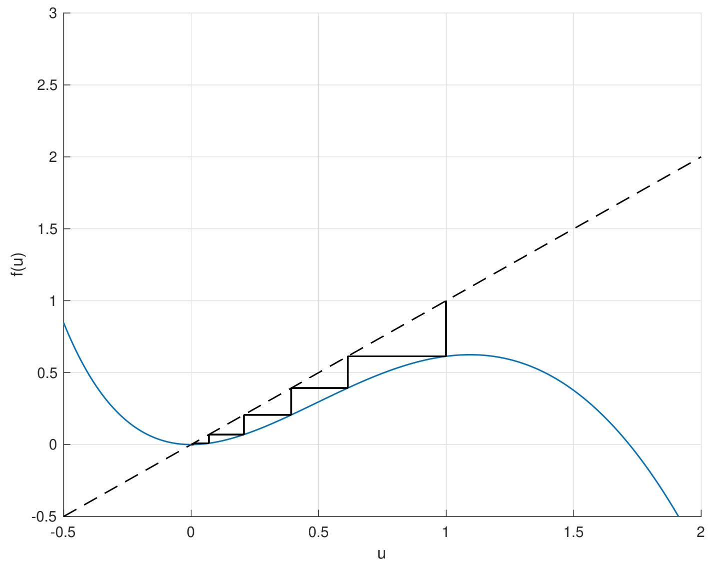

Рис. 3: $u^* = 0$ – всегда устойчива

Звездочкой отмечено начальное значение.

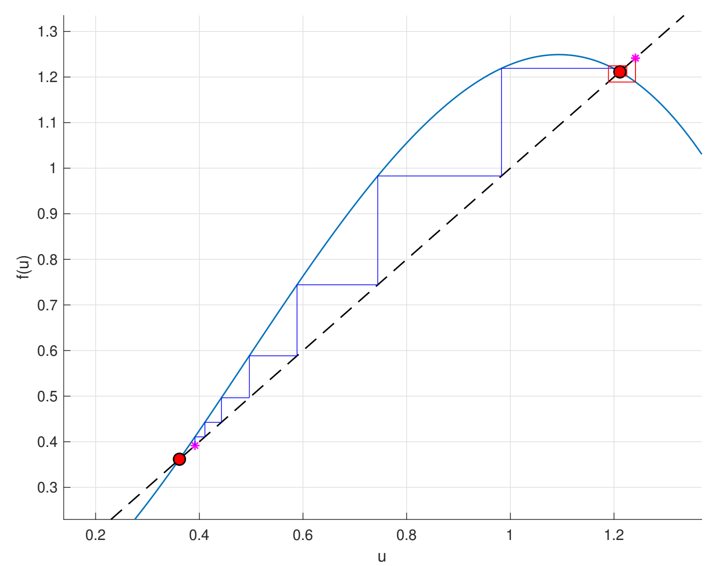

Рис. 4: $r = 4 < 4,2822$ – можно заметить, что u_2^* – не устойчива, а u_3^* – устойчива.

Звездочкой отмечено начальное значение.

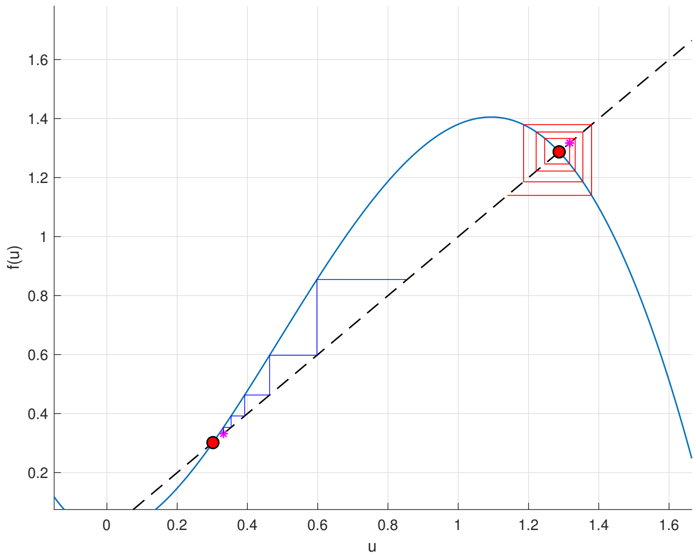

Рис. 5: $r = 4.5 > 4,2822$ – можно заметить, что u_2^* и u_3^* – обе не устойчивые.

2.3 Циклы длины 2 и 3

Определение. *Цикл длины* k *– упорядоченный набор точек* $(N_1, N_2, \dots N_k)$ *таких, что:* $f(N_1) = N_2, f(N_2) = N_3, \ \dots \ f(N_k) = N_1$.

Упорядочим все натуральные числа следующим образом:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Теорема. *(Шарковский). Пусть* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *— непрерывное отображение, и пусть* f *имеет цикл длины* k. *Тогда* f *имеет цикл длины* m *для всех таких* m, *что* $k \succ m$ *в указанном выше порядке.*

2.3.1 Цикл длины 3

Начнем с цикла длины 3 потому, что из его существования следует существование цикла длины 2. Для этого надо рассмотрим систему:

$$\begin{cases} f(f(f(u))) = u; \\ \frac{d}{du} f(f(f(u))) = 1. \end{cases}$$

Решим систему численно при помощи Matlab. Получаем решение вида:

$$r = 5.05, \qquad \begin{cases} u = 0.6745 = u_1; \\ u = 1.1131 = u_2; \\ u = 1.5760 = u_3. \end{cases}$$

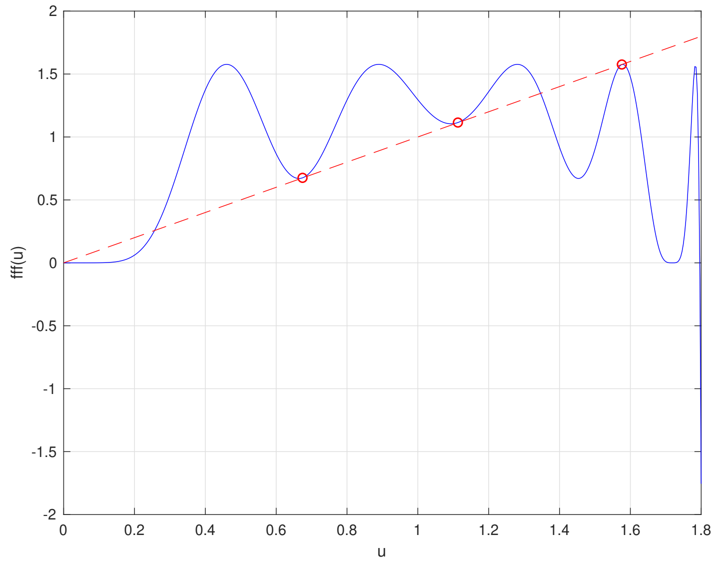

Рис. 6: график $f(f(f(u)))$ при $r = 5.05$, красным отмечены точки, образующие цикл

Получается, цикл длины 3 существует. По теореме следует, что существует цикл любой длины: в том числе и длины 2. Результаты согласовываются с бифуркационной диаграммой. Цикл длины 3:

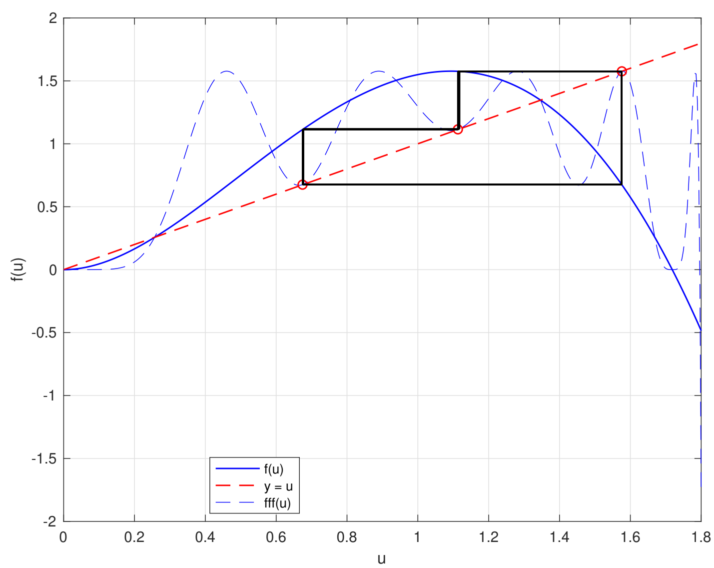

Рис. 7: $r = 5.05$

Цикл длины 2:

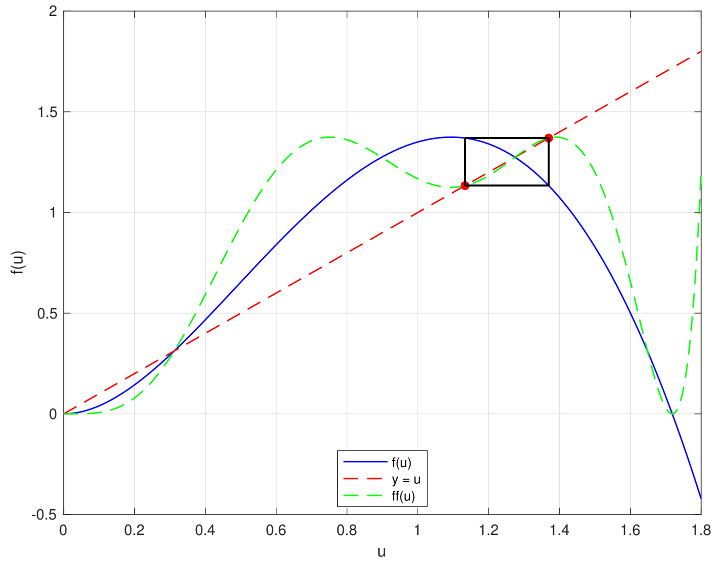

Рис. 8: $r = 4.4$

2.4 Бифуркационная диаграмма

Определение. *Бифуркация — это изменение топологического типа системы, когда ее параметры проходят через некоторые бифуркационные (критические) значения.*

Определение. *Бифуркационной диаграммой динамической системы называется разбиение пространства параметров на максимальные связные подмножества, которые определяются соотношениями топологической эквивалентности и рассматриваются вместе с фазовыми портретами для каждого элемента разбиения.*

В Matlab построим диаграмму. Число итераций 1000, $u_0 = 0.5$. Рассматриваем значения r от 0 до 6. Можно заметить, что подтверждается вывод о наличие цикла длины 3 (и любой другой длины).

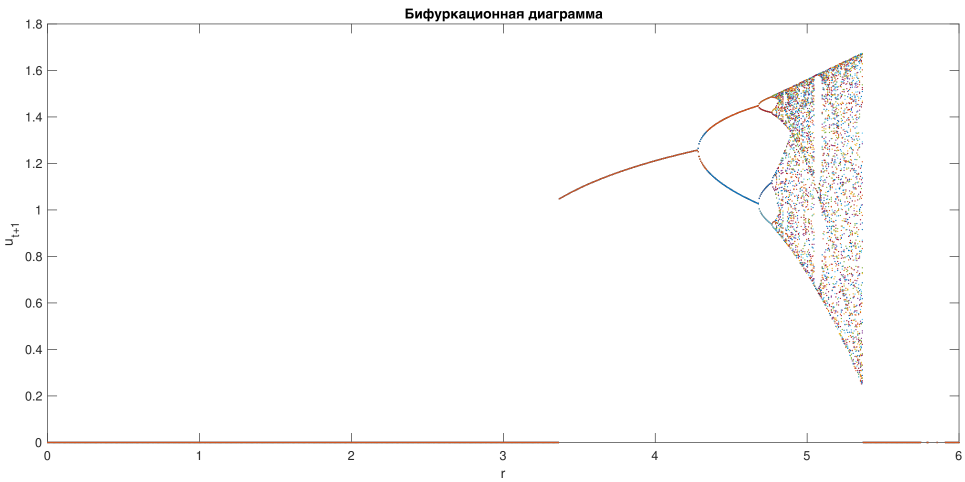

Рис. 9: $u_0 = 0.5$

2.5 Показатель Ляпунова

Определение. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкое отображение. Показателем Ляпунова траектории $u_1, u_2, ...$ называется величина:*

$$p(u_1) = \lim_{n \to \inf} \frac{\ln|f'(u_1)| + \ln|f'(u_2)| + ... + \ln|f'(u_n)|}{n},$$

если этот предел существует.

Определение. *Орбиту $\{u_i\}_{i=1}^{\inf}$ дискретной системы $u_{t+1} = f(u_t)$ назовём хаотической, если эта орбита ограничена, не стремится к периодической траектории и её показатель Ляпунова $p(u_1)$ больше нуля.*

Построим график зависимости показателя Ляпунова от параметра r. Начальное значение $u_0 = 0.5$.

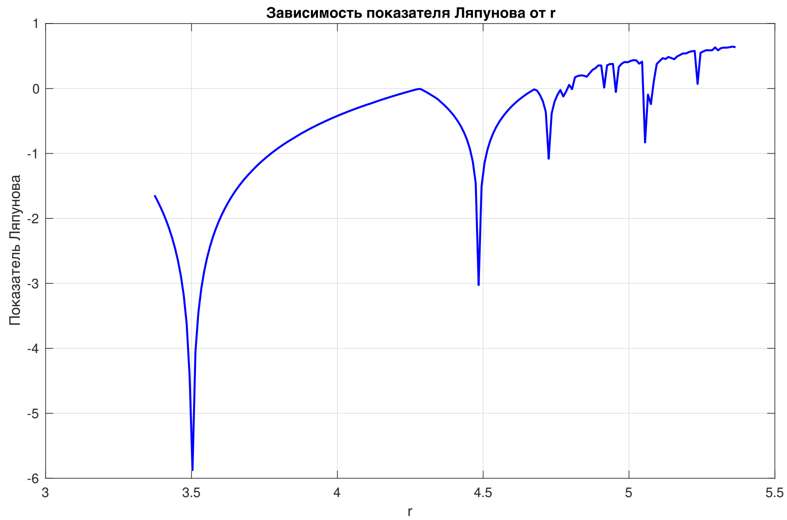

Рис. 10: $u_0 = 0.5$

Показатель Ляпунова является признаком хаотического поведения. Если $p(u) > 0$, то близкие траектории разбегаются, и в системе может наблюдаться хаотическое поведение. На интервалах с $p(u) < 0$ трактории с близкими начальными точками бесконечно сближаются. Рассмотрим некоторые интервалы, на которых $p(u) < 0$:

- При $r < 4.2822$ – траектории сходятся, так как в этом случае u_3^* – устойчивая.
- При $4.2822 < r < 4.7848$ – в системе появляется цикл длины 2.
- При $5.0505 < r < 5.0815$ – в системе появляется цикл длины 3. В остальных случаях появляется эффект хаоса.

Очень хорошо видно, как результаты совпадают с бифуркацией.

3 Исследование второй системы

3.1 Неподвижные точки

Определение. *Точка $u^* \in \mathbb{R}$ является неподвижной точкой системы*

$$u_{t+1} = f(u_t, u_{t-1}),$$

$u_t \in \mathbb{R},\ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *если* $f(u^*, u^*) = u^*$.

Рассмотрим систему с запаздыванием:

$$u_{t+1} = ru_t^2(1 - \ln(1 + u_{t-1})).$$

Запишем ее в другом виде:

$$\begin{cases} u_{t+1} = f(u_t, v_t) = ru_t^2(1 - \ln(1 + v_t)), \\ v_{t+1} = g(u_t, v_t) = u_t. \end{cases}$$

Отсюда можно заметить, что особые точки совпадают с особыми точками первой системы в точности до добавления второй координаты:

1. 1 особая точка (u_0^*, u_0^*), $u_0^* = 0$ при $r < 3.0269$;
2. 2 особых точки (u_0^*, u_0^*) и (u_1^*, u_1^*), $u_0^* = 0$ и $u_1^* = 0.76322$ при $r = 3.0269$;
3. 3 особых точки (u_0^*, u_0^*), (u_1^*, u_1^*) и (u_2^*, u_2^*) $u_0^* = 0$ и $0 < u_2^* < 0.76322 < u_3^*$ при $r > 3.0269$.

3.2 Устойчивость неподвижных точек

Теорема. *Пусть f — гладкое отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Дана динамическая система с дискретным временем:*

$$u_{t+1} = f(u_t), u_t \in \mathbb{R}^n,$$

Тогда неподвижная точка u^* асимптотически устойчива, если все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы Якоби функции $f(u)$, вычисленные в точке u^*, таковы, что $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., n$. Если $\exists \lambda_i$ такое, что $|\lambda_i| > 1$, то неподвижная точка u^* неустойчива.

Рассмотрим матрицу Якоби для системы:

$$J(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f(u,v)}{\delta u} & \frac{\delta f(u,v)}{\delta v} \\ \frac{\delta g(u,v)}{\delta u} & \frac{\delta g(u,v)}{\delta v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ru(1 - \ln(1 + v)) & -\frac{ru^2}{1+v} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Пусть $r < 3.0269$. Рассмотрим точку (u_0^*, u_0^*):

   $$J(u, v) = \begin{bmatrix} 2r * 0 * (1 - \ln(1 + 0)) & -\frac{r*0^2}{1+0} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Собственное значение равно 0 (кратности 2). Следовательно, точка (u_0^*, u_0^*) асимптотически устойчива.

2. Пусть $r = 3.0269$. Для (u_0^*, u_0^*) ничего не меняется, матрица остается такой же, как и в предыдущем пункте. Рассмотрим (u_1^*, u_1^*):

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы равны 1. Значит, об устойчивости в этом случае сказать ничего нельзя.

3. Пусть $r > 3.0269$. (u_0^*, u_0^*) устойчива, рассмотрим (u_1^*, u_1^*) и (u_2^*, u_2^*). Здесь хочу изобразить на графике собственные значения матриц для (u_1^*, u_1^*) и (u_2^*, u_2^*). Для этого я написала код на Matlab.

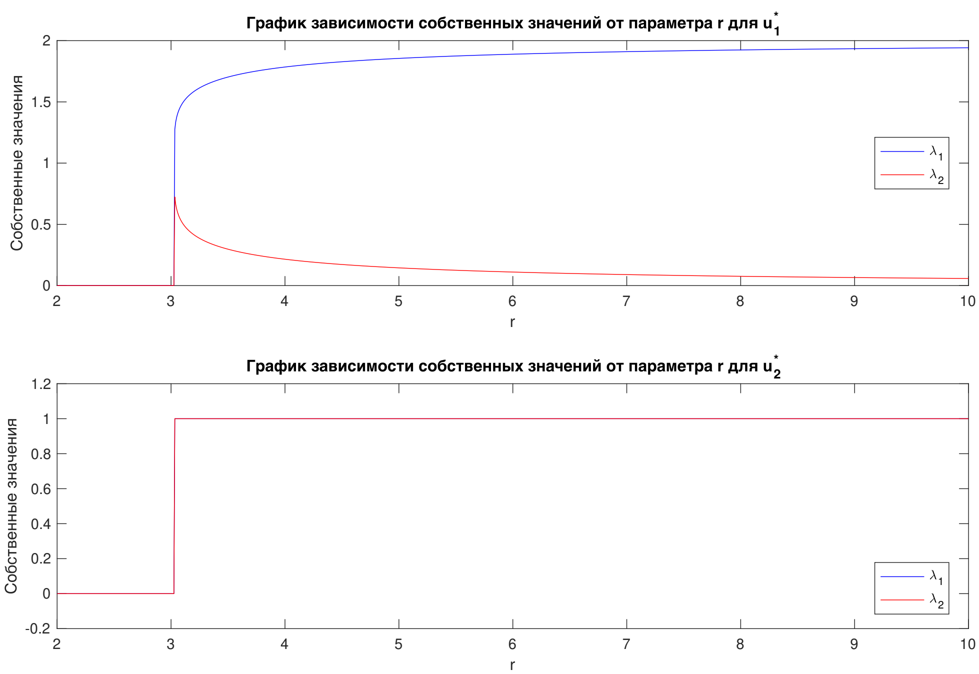

Рис. 11: Собственные значения в зависимости от параметра r.

По графику понятно, что при $r > 3.0269$ (u_1^*, u_1^*) неустойчивая точка, а (u_2^*, u_2^*) является странным аттрактором.

3.3 Бифуркация Неймарка-Сакера

Определение. *Бифуркация Неймарка-Сакера – бифуркация положения равновесия в системе, соответствующая появлению собственных значений* $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

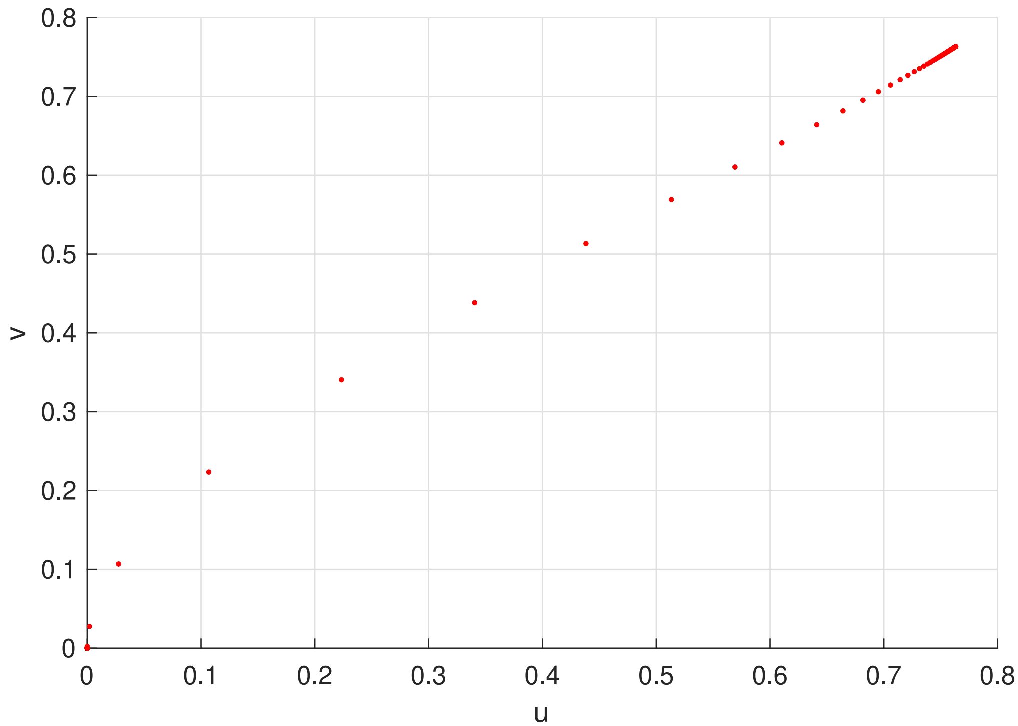

Рис. 12: $r = 3.0269, u = 0.76322$.

По рисунку 6 видно, как изменяются собственные значения после $r = 3.0269$: появляется 2 особые точки. А значит бифуркация Неймарка-Сакера не существует.

Список литературы

[1] Абрамова В. В. Лекции по динамическим системам и биоматематике. 2024.

[2] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. 2011.