Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Исследование нелинейных динамических систем на плоскости»

Студент 315 группы
Е. Н. Годунова

Научный руководитель
аспирант В. В. Абрамова

Москва, 2024

1 Постановка задачи

Дана система:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{ax^2}{1+x} - \dfrac{bxy}{1+Ax}, \\ \dot{y} = -cy + \dfrac{dxy}{1+Ax}, \end{cases} \quad (x, y) \in {\mathbb{R}_+}^2.$$

Если нет дополнительных ограничений, то все входящие параметры считаются положительными.

1. Дать биологическую интерпретацию характеристик системы (хищник- жертва, характеристика трофической функции, очистка воды)
2. Ввести новые безразмерные переменные, максимально уменьшив число входящих параметров. Выбрать два свободных параметра. Если число параметров больше двух, то считать остальные параметры фиксированными.
3. Найти неподвижные точки системы и исследовать их характер в зависимости от значений параметров. Результаты исследования представить в виде параметрического портрета системы.
4. Для каждой характерной области параметрического портрета построить фазовый портрет. Дать характеристику поведения системы в каждом из этих случаев.
5. Исследовать возможность возникновения предельного цикла. В положительном случае найти соответствующее первое ляпуновское число. Исследовать характер предельного цикла (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).
6. Дать биологическую интерпретацию полученным результатам.

2 Биологическая интерпретация характеристик системы

Данная система – модель "Хищник-жертва". В общем виде система выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{u} = A(u) - B(u, v), \\ \dot{v} = -C(v) + D(u, v). \end{cases}$$

Биологическая интерпретация функций:

1. $u(t)$ – число жертв в момент времени t;
2. $v(t)$ – число хищников в момент времени t;
3. $A(u)$ – скорость размножения жертв в отсутствии хищников. В заданной системе $A(x) = \frac{ax^2}{1+x}$. При $a > 0$ функция возрастает почти линейно, что свидетельствует об отсутствии внутривидовой конкуренции.
4. $B(u, v)$ – трофическая функция, скорость вымирания жертв из-за хищников в зависимости от популяций. В заданной системе $B(x) = \frac{bxy}{1+Ax}$. При фиксированной популяции хищников число жертв со временем стабилизируется, имеет место эффект насыщения хищников.

5. $C(v)$ – вымирание хищников при отсутствии жертв. В заданной системе $C(y) = -cy$, то есть популяция хищников при таких условиях линейно уменьшается. При такой функции отсутствует внутривидовая конкуренция хищников.

6. $D(u, v)$ – эффективность потребления жертв хищниками. В заданной системе $D(x, y) = \frac{dxy}{1+Ax}$. В системе увеличение численности хищников линейно зависит от числа хищников.

3 Введение безразмерных переменных

Сделаем замену: $t = T\tau$, $x = Su(\tau)$, $y = Rv(\tau)$. Здесь T, S, R — положительные константы. Заметим:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \cdot \frac{d}{d\tau}.$$

Перепишем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{T}\dot{u} = \dfrac{a(Su)^2}{1+Su} - \dfrac{bSRuv}{1+ASu} \\ \dfrac{R}{T}\dot{v} = -cRv - \dfrac{dSRuv}{1+ASu} \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{u} = \dfrac{aTSu^2}{1+Su} - \dfrac{bTRuv}{1+ASu} \\ \dot{v} = -cTv - \dfrac{dSTuv}{1+ASu} \end{cases}$$

Пусть $T = \dfrac{1}{c}$, $R = \dfrac{cA}{b}$, $S = \dfrac{cA}{bR} = 1$. И обозначим $\alpha = \dfrac{a}{c} > 0$, $\beta = \dfrac{cA}{d} > 0$ и $\gamma = \dfrac{1}{a} > 0$:

$$\begin{cases} \dot{u} = \dfrac{au^2}{(1+u)} - \dfrac{uv}{\dfrac{1}{a} + u} \\ \dot{v} = v\left(-1 + \dfrac{du}{ca(\dfrac{1}{a} + u)}\right) \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{u} = u\left(\dfrac{\alpha u}{1+u} - \dfrac{v}{\gamma + u}\right) \\ \dot{v} = v\left(-1 + \dfrac{u}{\beta(\gamma + u)}\right) \end{cases}.$$

4 Неподвижные точки

Определение. *Неподвижная точка динамической системы $\dot{u} = f(u)$, где $u \in {\mathbb{R}_+}^2$ – такая точка u^* её фазового пространства, что $f(u^*) = 0$.*

Решим систему при $\gamma = 1$:

$$\begin{cases} 0 = u\left(\dfrac{\alpha u}{1+u} - \dfrac{v}{1+u}\right) \\ 0 = v\left(-1 + \dfrac{u}{\beta(1+u)}\right) \end{cases}$$

Очевидно, что $O(0, 0)$ – решение. При $u = 0$ другого решения нет, аналогично с v. Разделим первое u, а второе на v, для поиска других неподвижных точек.

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha u}{1+u} = \dfrac{v}{1+u} \\ 1 = \dfrac{u}{\beta(1+u)} \end{cases}$$

Решением является точка $A\left(\dfrac{\beta}{1-\beta}, \dfrac{\alpha\beta}{1-\beta}\right)$.
Точка существует при $0 < \beta < 1$.

5 Устойчивость неподвижных точек

Пусть у системы есть неподвижная точка u^*. Пусть $J(u^*)$ – матрица Якоби функции $f(u^*)$ в точке u^*. Введём величины n_0, n_+, n_- – количества собственных значений $J(u^*)$ (с учётом кратности) с вещественными частями, равными нулю, большими нуля и меньшими нуля соответственно.

Определение. *Положение равновесия динамической системы называют гиперболическим, если $n_0 = 0$.*

Определение. *Гиперболическое положение равновесия динамической системы называют гиперболическим седлом, если $n_+ n_- \neq 0$.*

Теорема. *(Ляпунов А. М., Пуанкаре А.). Пусть u^* – гиперболическое положение равновесия систем. Тогда, если $n_+ = 0$, то положение равновесия u^* асимптотически устойчиво, если $n_+ > 0$, то оно неустойчиво.*

Матрица Якоби в общем виде:

$$J(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta f(u,v)}{\delta u} & \dfrac{\delta f(u,v)}{\delta v} \\ \dfrac{\delta g(u,v)}{\delta u} & \dfrac{\delta g(u,v)}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\alpha u + \alpha u^2}{(1+u)^2} - \dfrac{v\gamma}{(\gamma+u)^2} & -\dfrac{u}{\gamma+u} \\ \dfrac{v\gamma}{\beta(\gamma+u)^2} & -1 + \dfrac{u}{\beta(\gamma+u)} \end{pmatrix}.$$

Подставим неподвижные точки при $\gamma = 1$:

1. $O(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   В этом случае точка $O(0,0)$ не является гиперболическим положением равновесия и теорема Ляпунова-Пуанкаре неприменима. Про устойчивость ничего сказать нельзя.

2. $A\left(\dfrac{\beta}{1-\beta}, \dfrac{\alpha\beta}{1-\beta}\right)$:

$$J\left(\frac{\beta}{1-\beta}, \frac{\alpha\beta}{1-\beta}\right) = \begin{pmatrix} \alpha\beta & -\beta \\ \alpha(1-\beta) & 0 \end{pmatrix}.$$

   Для нахождения собственных значений воспользуемся программой на Matlab:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\beta - \sqrt{(\alpha\beta(\alpha\beta + 4\beta - 4))}}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{\alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta(\alpha\beta + 4\beta - 4))}}{2}$$

   Итого 3 случая при $\gamma = 1$:

(a) При $\alpha = \dfrac{4}{\beta}(1-\beta)$ собственные значения вещественные, положительные и совпадающие. Значит, точка A – неустойчивый вырожденный узел.

(b) При $\alpha < \dfrac{4}{\beta}(1-\beta)$ собственные значения комплекснозначные, причем их действительная часть положительна. Значит, точка A – неустойчивый фокус.

(c) При $\alpha > \dfrac{4}{\beta}(1-\beta)$ собственные значения положительные, не совпадающие. Значит, точка A – неустойчивый узел.

6 Фазовый и параметрический портреты

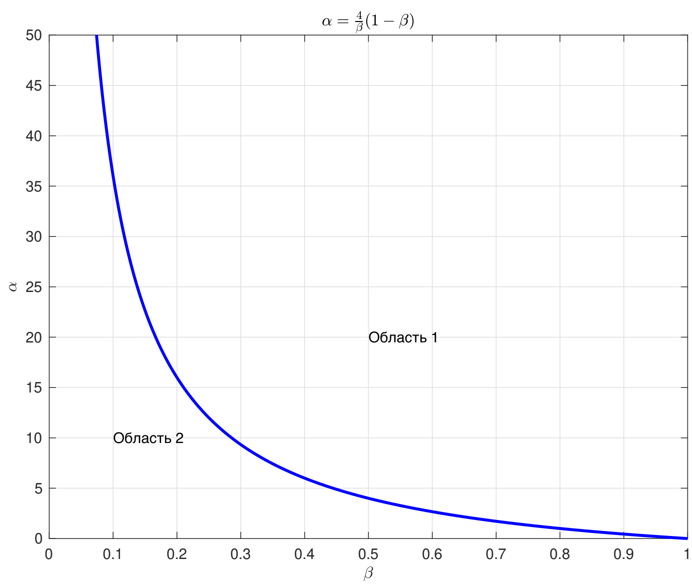

Рис. 1: Параметрический портрет системы:$\gamma = 1$

6.1 Область 1

Здесь $\alpha > \dfrac{4}{\beta}(1-\beta)$. Пусть $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 100$, тогда точка$A(0.0526, 5.2632)$ – неустойчивый узел. Направление фазовых кривых – из точки.

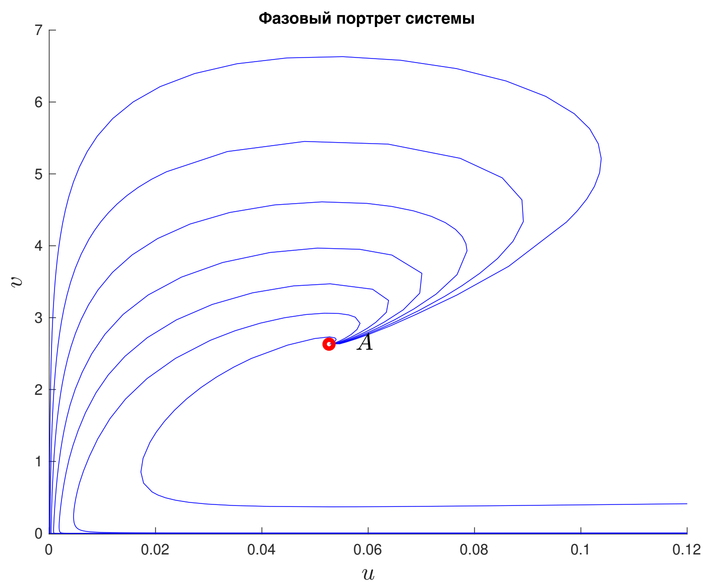

Рис. 2: $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 100$

6.2 Область 2

Здесь $\alpha < \dfrac{4}{\beta}(1-\beta)$. Пусть $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 30$, тогда точка $A(0.0526, 1.5789)$ – неустойчивый вырожденный узел. Направление фазовых кривых – из точки.

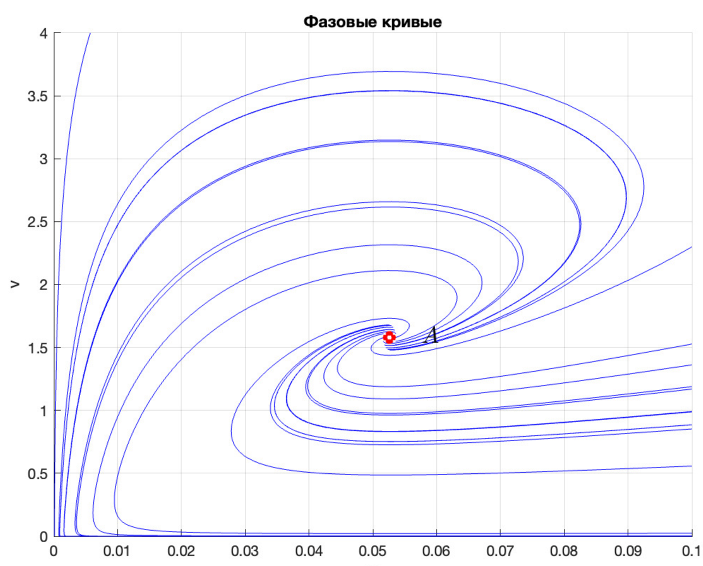

Рис. 3: $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 30$.

На графике хорошо видно, что точка $O(0,0)$ – является устойчивой. Траектории стремятся к ней.

6.3 Граница областей

Здесь $\alpha = \dfrac{4}{\beta}(1-\beta)$. Пусть $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 76$, тогда точка $A(0.0526, 4)$ – неустойчивый фокус. Направление фазовых кривых – из точки.

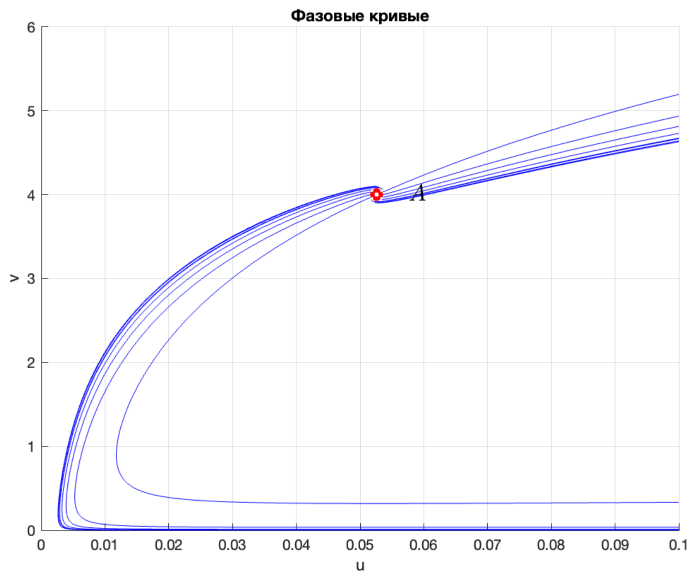

Рис. 4: $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 76$.

7 Предельный цикл

Определение. *Замкнутая траектория системы – предельный цикл, если в окрестности этой траектории нет других замкнутых траекторий.*

Определение. *Бифуркация положения равновесия, соответствующая появлению собственных чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, называется бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа (или бифуркацией рождения цикла).*

В нашей задаче комплекснозначные собственные числа всегда имеют действительную часть не равную 0, а, значит, бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа в системе нет.

8 Биологическая интерпритация

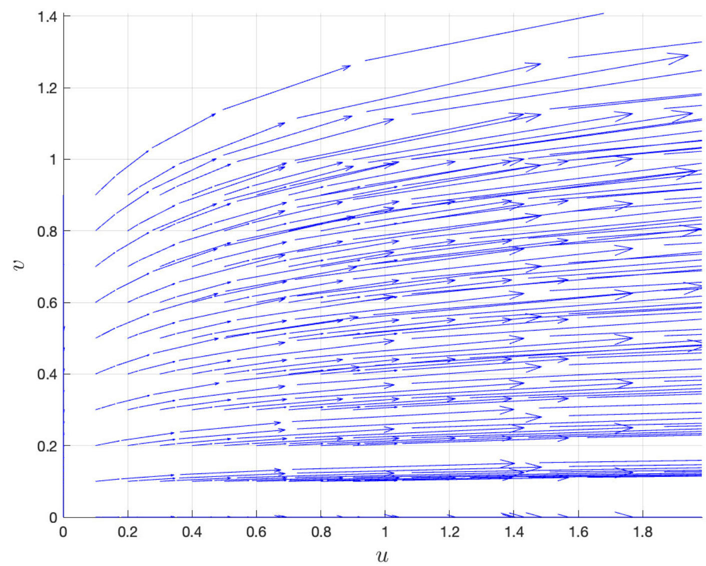

Рис. 5: $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 100$.

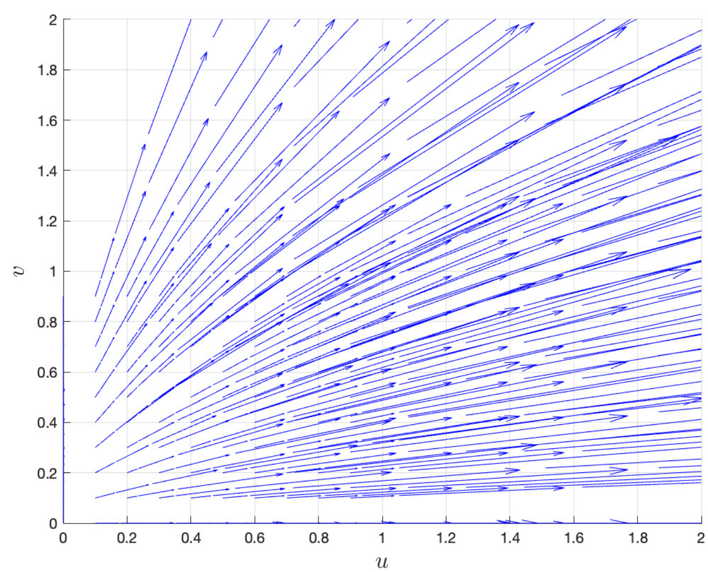

Рис. 6: $\gamma = 1, \beta = 0.05, \alpha = 30$.

Система неустойчивая, при любых значениях параметров, так как точка A – неустойчивая. Изучив, как ведет себя система, можно сделать несколько выводов:

1. По представленным выше графикам можно хорошо заметить отсутствие внутриви-

довых конкуренций в популяциях как жертв, так и хищников.

2. При вымирании хищников резко увеличивается численность жертв;

3. При малой популяции жертв число хищников также сокращается;

Список литературы

[1] Абрамова В. В. Лекции по динамическим системам и биоматематике. 2024.

[2] Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. Динамические системы и модели биологии. 2011.