



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по компьютерному практикуму

«Стохастический анализ и моделирование»

Студент 415 группы
Е. Н. Годунова

Руководитель практикума
д. ф.-м. н. С. Н. Смирнов

Москва, 2024

Содержание

1	Задание 1	4
1.1	Схема Бернулли	4
1.2	Геометрическое распределение	5
1.3	Нормированная сумма выигрышей	7
2	Задание 2	8
2.1	Сингулярное распределение	8
2.1.1	Критерий Колмогорова	9
2.2	Критерий Смирнова	10
2.2.1	Симметричность относительно $\frac{1}{2}$	10
2.2.2	Самоподобие относительно деления на 3	11
2.3	Математическое ожидание и дисперсия	12
2.3.1	Математическое ожидание	12
2.3.2	Дисперсия	12
3	Задание 3	13
3.1	Экспоненциальное распределение	14
3.2	Распределение минимума независимых экспоненциальных величин	15
3.3	Процесс Пуассона	16
3.4	Пуассоновское распределение как предел биномиального	17
3.5	Стандартное нормальное распределение (метод Бокса-Мюллера)	18
3.5.1	t -критерий Стьюдента	19
3.5.2	Критерий Фишера	19
4	Задание 4	20
4.1	Датчик распределения Коши	21
4.2	Метод фон Неймана для моделирования стандартного нормального распределения	21
4.3	Сравнение скорости моделирования	23
5	Задание 5	24
5.1	Закон больших чисел и центральная предельная теорема для нормального распределения	25
5.1.1	Закон больших чисел (ЗБЧ)	25
5.1.2	Центральная предельная теорема (ЦПТ)	26
5.2	Доверительные интервалы для среднего и дисперсии	27
5.2.1	Доверительный интервал для среднего μ	27
5.2.2	Доверительный интервал для дисперсии σ^2	28
5.3	Распределение сумм для случайных величин с распределением Коши	29
5.3.1	Суммы случайных величин	30
5.3.2	Эмпирическое поведение средних	30
6	Задание 6	31
6.1	Метод Монте-Карло	32
6.1.1	Применение для многомерного интеграла	33
6.2	Метод квадратур	33

6.3	Оценка точности вычислений	34
6.3.1	Метод Монте-Карло	34
6.3.2	Метод квадратур	35
7	Задание 7	35
7.1	Минимизация функции методом случайного поиска	36
7.1.1	Сравнение методов	36
7.2	Алгоритм имитации отжига для минимизации функции Розенброка	37
8	Задание 8	38
9	Задание 9	41
9.1	Ковариационная функция и переходные вероятности	41
9.2	Моделирование траекторий	42
9.3	Графики траекторий	43
9.4	Выводы	44
10	Задание 10	44
10.1	Фильтр Калмана	45
10.2	Результаты моделирования	45
11	Задание 11	47
11.1	Система массового обслуживания	47
11.2	СМО с циклической интенсивностью	48
11.3	Работа страховой компании	49

1 Задание 1

1. Реализовать генератор схемы Бернулли с заданной вероятностью успеха p . На основе генератора схемы Бернулли построить датчик биномиального распределения.
2. Реализовать генератор геометрического распределения; проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
3. Промоделировать игру в орлянку: бесконечную последовательность независимых испытаний Бернулли с бросанием “правильной” (честной, $p = 0.5$) монеты. Величина “выигрыша” S_n определяется как сумма по n испытаниям значений 1 и -1 в зависимости от выпавшей стороны монеты. Проиллюстрировать в виде ломаной поведение нормированной суммы

$$Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$$

как функцию от номера испытания i для отдельно взятой траектории. Дать теоретическую оценку для значения $Y(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

1.1 Схема Бернулли

Определение. *Схемой Бернулли с заданной вероятностью p называется эксперимент, состоящий из серии испытаний, удовлетворяющих следующему условию:*

1. *Отсутствие взаимного влияния в испытаниях;*
2. *Воспроизводимость. Однородные испытания проводятся в сходных условиях;*
3. *Существует признак, который реализуется или не реализуется в испытании. Признак может быть отнесён к любому из испытаний.*

Определение. *Биномиальное распределение описывает число успехов в n независимых испытаниях схемы Бернулли. Вероятность получить k успехов определяется формулой:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Свойство. *Среднее значение биномиального распределения равно np , а дисперсия равна $np(1-p)$.*

Результаты:

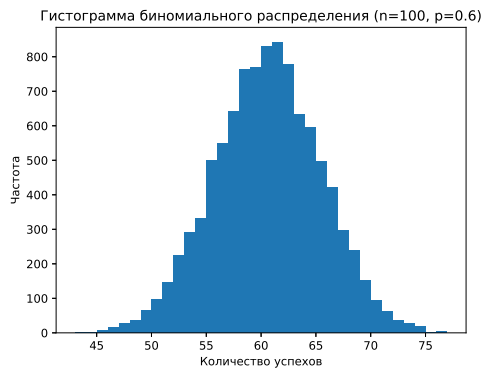


Рис. 1: Гистограмма биномиального распределения ($n=100$, $p=0.6$)

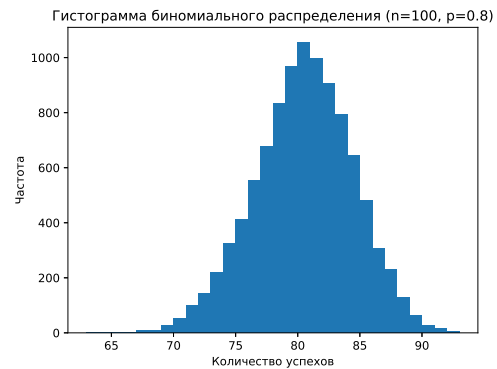


Рис. 2: Гистограмма биномиального распределения ($n=100$, $p=0.8$)



Рис. 3: Гистограмма биномиального распределения ($n=500$, $p=0.3$)

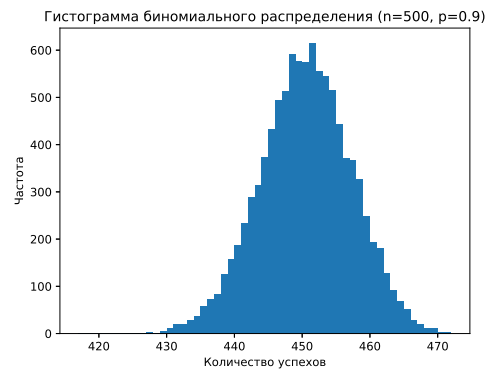


Рис. 4: Гистограмма биномиального распределения ($n=500$, $p=0.9$)

1.2 Геометрическое распределение

Определение. Пусть имеется последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p . Случайная величина X , которая принимает значение количества испытаний до первого успеха, имеет геометрическое распределение с параметром p . Формула вероятности имеет вид:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Геометрическое распределение можно смоделировать с использованием схемы Бернулли следующим образом:

1. Реализуется последовательность независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p .
2. Количество испытаний до первого успеха фиксируется как значение случайной величины X .

Для моделирования геометрического распределения с параметром p через равномерно распределённую случайную величину $U \sim U(0, 1)$ используется функция распределения:

$$P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k \Rightarrow (1 - p)^k = 1 - U.$$

Применяя логарифм, получаем:

$$k = \frac{\log(1 - U)}{\log(1 - p)}.$$

С учётом целочисленности k округляем результат вверх:

$$X = \lceil \frac{\log(U)}{\log(1 - p)} \rceil,$$

где $U \sim U(0, 1)$. Эта формула позволяет моделировать геометрическое распределение.

Свойство. *Свойство отсутствия памяти:* для геометрического распределения с параметром p и любых $k, m \geq 1$ выполняется:

$$P(X > k + m \mid X > k) = P(X > m).$$

Доказательство: Пусть X имеет геометрическое распределение. Тогда условная вероятность вычисляется следующим образом:

$$P(X > k + m \mid X > k) = \frac{P(X > k + m)}{P(X > k)} = \frac{(1 - p)^{k+m}}{(1 - p)^k} = (1 - p)^m = P(X > m).$$

Проверка свойства отсутствия памяти:

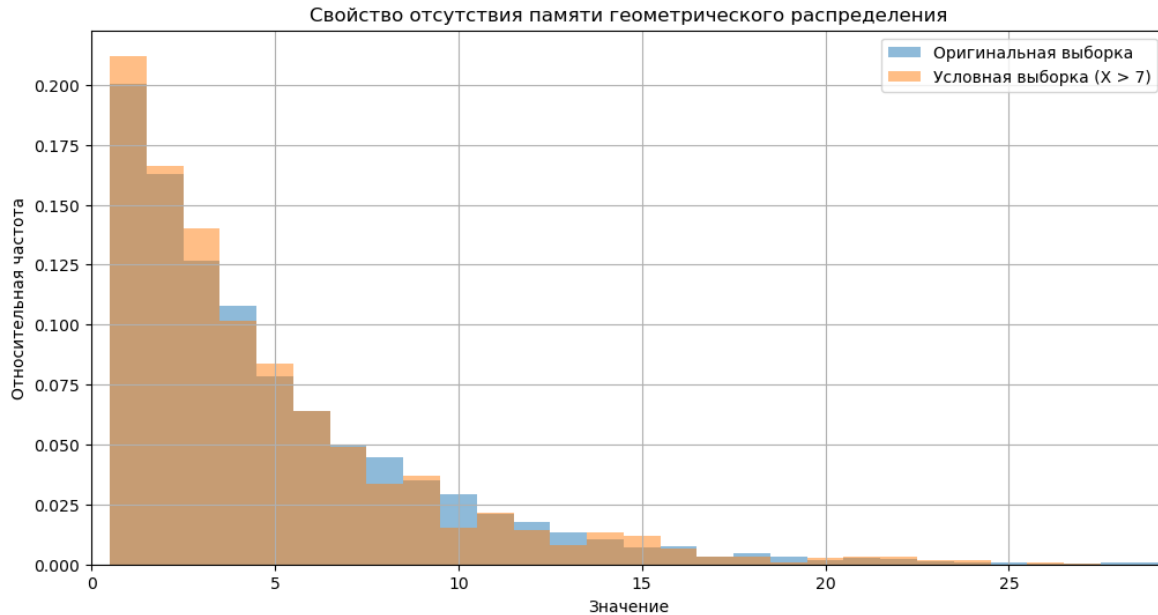


Рис. 5: Проверка свойства отсутствия памяти геометрического распределения

1.3 Нормированная сумма выигрышей

Определение. *Выигрыши в игре в орлянку определяются как $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, где $X_i = 1$ (орёл) или $X_i = -1$ (решка).*

Утверждение. *Нормированная сумма выигрышей определяется как:*

$$Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{i}}.$$

Теорема (Центральная предельная теорема). *При $n \rightarrow \infty$, нормированная сумма $Y(i)$ стремится к нормальному распределению с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1:*

$$Y(i) \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

Доказательство можно найти в [1].

Центральная предельная теорема была использована для анализа поведения нормированной суммы выигрышей в игре в орлянку. Согласно теореме, при большом числе испытаний ($i \rightarrow \infty$) $Y(i)$ приближается к стандартному нормальному распределению $N(0, 1)$. Смоделировали эту нормированную сумму на практике, используя последовательность случайных испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = 0.5$.

Результат:



Рис. 6: График нормированной суммы $Y(i) = \frac{S_i}{\sqrt{n}}$

2 Задание 2

1. Построить датчик сингулярного распределения, имеющий в качестве функции распределения канторову лестницу. С помощью критерия Колмогорова убедиться в корректности работы датчика.
2. Для канторовых случайных величин с помощью критерия Смирнова проверить:
 - свойство симметричности относительно $\frac{1}{2}$, то есть случайные величины X и $1 - X$ распределены одинаково;
 - свойство самоподобия относительно деления на 3, то есть условное распределение Y при условии $Y \in [0, 1/3]$ совпадает с распределением $Y/3$.
3. Рассчитать значения математического ожидания и дисперсии для данного распределения. Сравнить теоретические значения с эмпирическими (для различных объёмов выборок) и проиллюстрировать сходимость эмпирических значений к теоретическим.

2.1 Сингулярное распределение

Определение. Сингулярное распределение Кантора определяется на множестве Кантора и имеет в качестве функции распределения канторову лестницу $C(x)$. Функция $C(x)$ обладает следующими свойствами:

- $C(x)$ непрерывна, но не дифференцируема;
- Производная $C'(x)$ равна нулю почти всюду;
- Функция $C(x)$ является самоподобной: разделение на равные интервалы сохраняет форму функции.

Для моделирования случайной величины X с функцией распределения $C(x)$, представляющей канторову лестницу, используется следующая процедура:

- Каждое значение X задаётся как сумма бесконечной последовательности весов, основанных на степенях 3 и 2.
- На каждом шаге генерируется случайная цифра $\xi_i \in \{0, 1\}$, где вероятность каждой цифры равна $P(\xi_i = 1) = 0.5$.
- Формула для вычисления X выглядит следующим образом:

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \cdot 3^{-i}.$$

На практике, для реализации на компьютере используется конечное количество шагов m , что даёт приближённое значение:

$$X \approx \sum_{i=1}^m \xi_i \cdot 3^{-i},$$

где m — количество итераций.

Процедура моделирования:

1. Генерируется последовательность случайных чисел $\xi_i \in \{0, 1\}$, где $\xi_i \sim \text{Bernoulli}(0.5)$.
2. Каждое ξ_i умножается на 3^{-i} .
3. Суммируются результаты всех итераций для получения приближённого значения X .

Формирование функции распределения:

Канторова лестница $C(x)$ строится как сумма весов $\xi_i/2^i$, где:

$$C(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i}.$$

На практике:

$$C(x) \approx \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i}{2^i}.$$

Таким образом, функция распределения $C(x)$ моделируется на основе той же последовательности ξ_i , что используется для вычисления X .

2.1.1 Критерий Колмогорова

Определение. Критерий Колмогорова используется для проверки гипотезы о соответствии эмпирической функции распределения $C_{\text{emp}}(x)$ теоретической $C(x)$.

Порядок вычислений:

1. Вычисляется максимальное отклонение:

$$D = \max |C_{\text{emp}}(x) - C(x)|.$$

2. Используется статистика F_k для вычисления p -value:

$$F_k = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 D^2},$$

или эквивалентно:

$$F_k = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 D^2}, \quad p = 1 - F_k.$$

Решение:

- Если $p > \alpha$, гипотеза принимается (расхождения несущественны).
- Если $p \leq \alpha$, гипотеза отвергается (расхождения значимы).

Результаты:



Рис. 7: Эмпирическая и теоретическая функции распределения для канторова распределения

2.2 Критерий Смирнова

Определение. Критерий Смирнова используется для проверки равенства двух функций распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Максимальное отклонение между функциями определяется как:

$$D = \max |F_1(x) - F_2(x)|.$$

Для случайных величин с функцией распределения $C(x)$, представляющей канторову лестницу, проверяются два важных свойства: симметричность относительно $\frac{1}{2}$ и самоподобие относительно деления на 3. Оба свойства тесно связаны с самоподобной структурой функции распределения.

2.2.1 Симметричность относительно $\frac{1}{2}$

Свойство симметричности заключается в том, что случайные величины X и $1 - X$ имеют одинаковое распределение. Это означает, что для любого $x \in [0, 1]$ выполняется:

$$P(X \leq x) = P(1 - X \leq x) \Rightarrow P(X \leq x) = P(X \geq 1 - x).$$

Канторова лестница обладает симметрией относительно точки $x = \frac{1}{2}$, что отражает равномерное распределение по обе стороны этой точки. На практике это проверяется с

использованием критерия Смирнова, сравнивающего эмпирические функции распределения $F_X(x)$ и $F_{1-X}(x)$, где:

$$F_{1-X}(x) = 1 - F_X(1 - x).$$

2.2.2 Самоподобие относительно деления на 3

Свойство самоподобия заключается в том, что условное распределение случайной величины Y при условии, что $Y \in [0, 1/3]$, совпадает с распределением $Y/3$. Это означает, что для любого $y \in [0, 1/3]$ выполняется:

$$P(Y \leq y \mid Y \in [0, 1/3]) = P(Y/3 \leq y).$$

Самоподобие означает, что канторова лестница остаётся идентичной на каждом уровне разбиения. В данном случае, на интервале $[0, 1/3]$ распределение случайной величины Y повторяет ту же форму, что и на всем интервале $[0, 1]$, но сжатую в 3 раза.

Результаты:

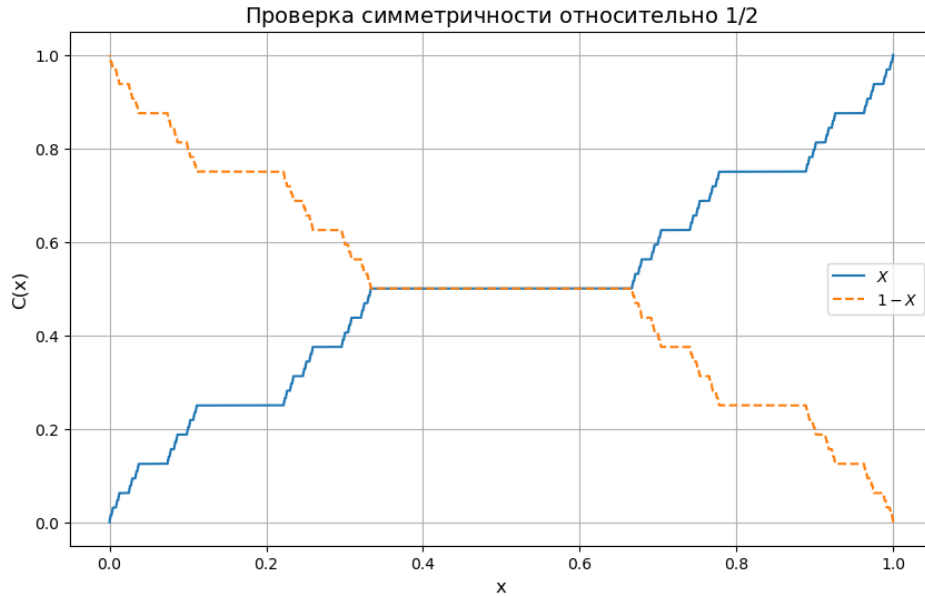


Рис. 8: Проверка симметричности относительно $\frac{1}{2}$



Рис. 9: Проверка самоподобия относительно деления на 3

2.3 Математическое ожидание и дисперсия

Для канторова распределения теоретические значения математического ожидания $\mathbb{E}[X]$ и дисперсии $\text{Var}(X)$ вычисляются аналитически.

2.3.1 Математическое ожидание

$\xi_i \sim \text{Bernoulli}(0.5)$, поэтому $\mathbb{E}[\xi_i] = 0.5$. Математическое ожидание $\mathbb{E}[X]$ выражается как:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_i] \cdot 3^{-i},$$

Сумма прогрессии:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом:

$$\mathbb{E}[X] = 0.5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

2.3.2 Дисперсия

Дисперсия $\text{Var}(X)$ вычисляется как:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Для $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_i] \cdot (3^{-i})^2 = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-2i}.$$

Сумма прогрессии:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-2i} = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8}.$$

Тогда:

$$\mathbb{E}[X^2] = 0.5 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}.$$

Подставляя:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Сходимость эмпирических значений:

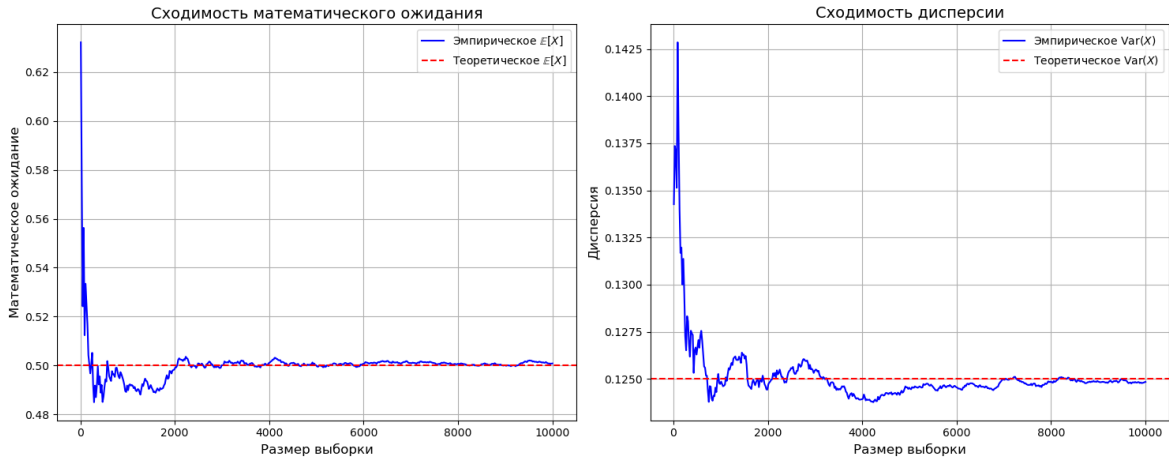


Рис. 10: Сходимость математического ожидания и дисперсии

На графиках показано, что при увеличении объёма выборки эмпирические значения $\mathbb{E}[X]$ и $\text{Var}(X)$ сходятся к теоретическим значениям $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{8}$, что подтверждает корректность моделирования.

3 Задание 3

1. Построить датчик экспоненциального распределения. Проверить для данного распределения свойство отсутствия памяти.
2. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые экспоненциально распределённые случайные величины с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Найти распределение случайной величины $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.
3. На основе датчика экспоненциального распределения построить датчик пуассоновского распределения.
4. Построить датчик пуассоновского распределения как предел биномиального распределения. Убедиться в корректности построенного датчика при помощи критерия χ^2 Пирсона.

5. Построить датчик стандартного нормального распределения методом моделирования случайных величин парами с переходом в полярные координаты (преобразование Бокса-Мюллера). Проверить при помощи t -критерия Стьюдента равенство математических ожиданий, а при помощи критерия Фишера — равенство дисперсий.

3.1 Экспоненциальное распределение

Определение. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, если её плотность вероятности задаётся формулой:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Функция распределения:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Свойство (Свойство отсутствия памяти). Для случайной величины X с экспоненциальным распределением выполняется:

$$P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s), \quad t, s \geq 0.$$

Это свойство означает, что вероятность того, что X превысит $t + s$, при условии, что она уже превысила t , равна вероятности превышения s .

Проверка свойства отсутствия памяти:

На графике показаны эмпирическая функция распределения исходной случайной величины X и её сдвинутого условного распределения $X - t \mid X > t$. Эти функции совпадают, что подтверждает свойство.

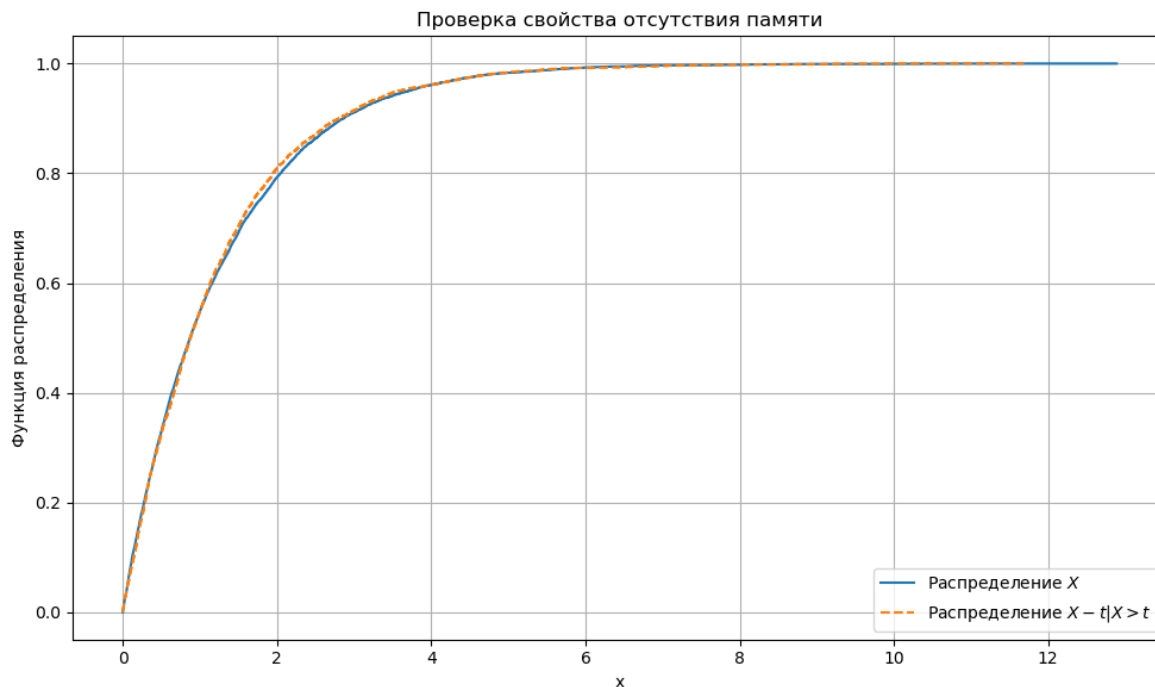


Рис. 11: Проверка свойства отсутствия памяти экспоненциального распределения

3.2 Распределение минимума независимых экспоненциальных величин

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n — независимые экспоненциально распределённые случайные величины с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Определение. Функция распределения экспоненциальной случайной величины X_i имеет вид:

$$F_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_i x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ определяется как:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - P(Y > y) = 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_n > y).$$

Так как X_1, X_2, \dots, X_n независимы, то вероятность их пересечения равна произведению:

$$P(Y > y) = P(X_1 > y) \cdot P(X_2 > y) \cdot \dots \cdot P(X_n > y).$$

Для экспоненциального распределения вероятность $P(X_i > y)$ задаётся как:

$$P(X_i > y) = e^{-\lambda_i y}.$$

Следовательно:

$$P(Y > y) = e^{-\lambda_1 y} \cdot e^{-\lambda_2 y} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda_n y} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)y}.$$

Подставляя это в функцию распределения $F_Y(y)$, получаем:

$$F_Y(y) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)y}, \quad y \geq 0.$$

Таким образом, случайная величина Y имеет экспоненциальное распределение с параметром:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Результат: Y имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

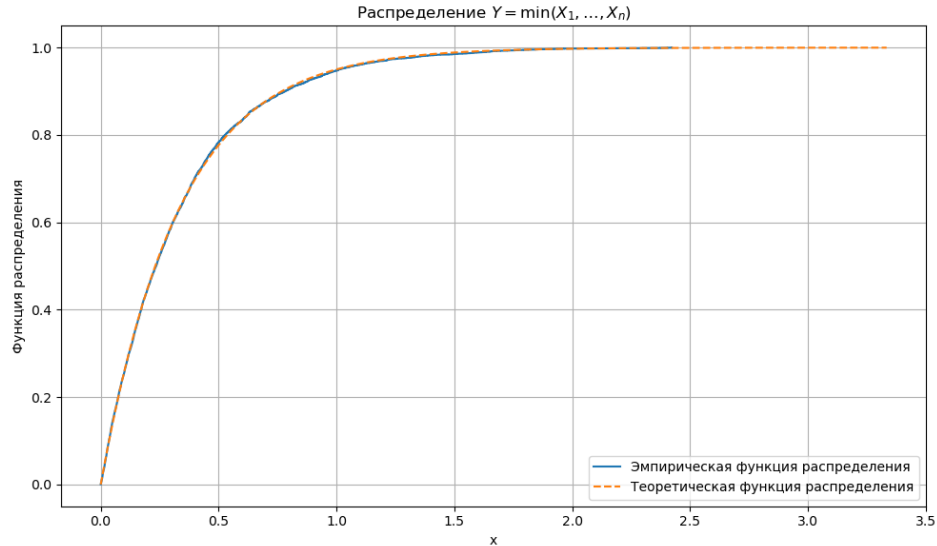


Рис. 12: Распределение $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$

3.3 Процесс Пуассона

Процесс Пуассона описывает количество событий, происходящих в фиксированный интервал времени t , с интенсивностью λ событий в единицу времени.

1. **Количество событий:**

$$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t),$$

где:

- λ — интенсивность процесса (среднее число событий в единицу времени),
- t — время наблюдения.

2. **Время между событиями:**

$$T_i \sim \text{Exp}(\lambda),$$

где T_i — время между двумя последовательными событиями.

3. **Распределение количества событий:**

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Это вероятность того, что k событий произойдут за время t .

Результат:

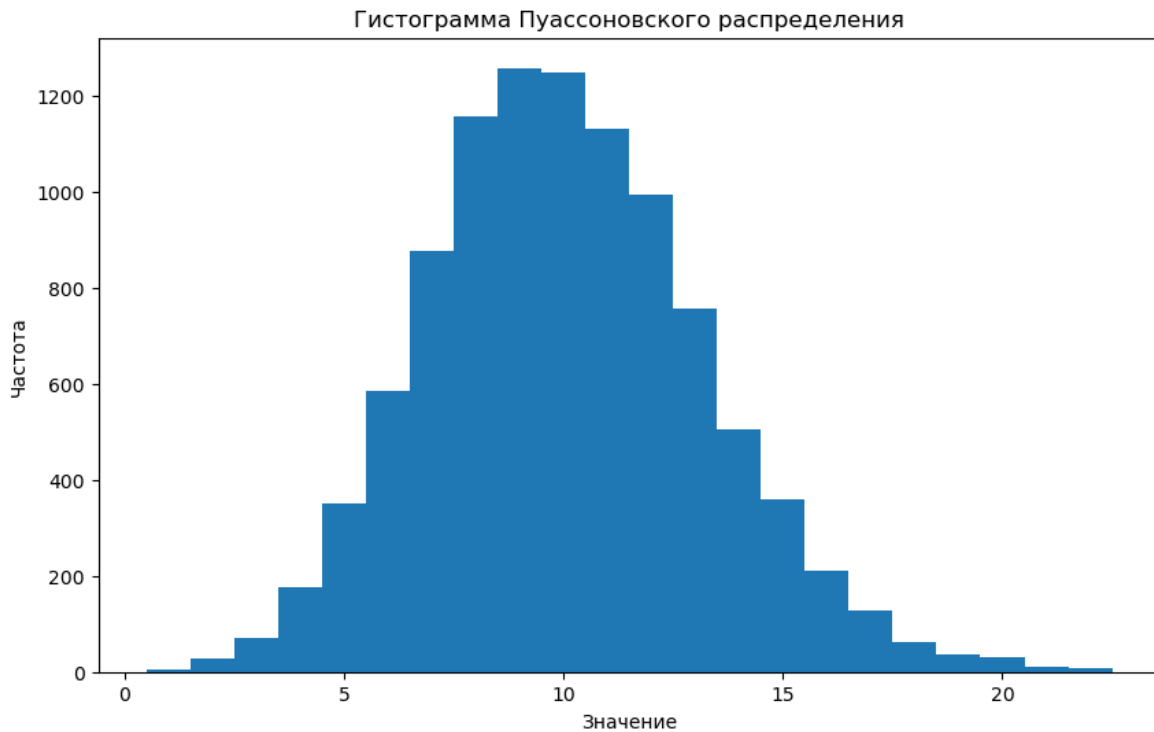


Рис. 13: Гистограмма Пуассоновского распределения, смоделированного через процесс Пуассона

3.4 Пуассоновское распределение как предел биномиального

Определение. Пуассоновское распределение может быть получено как предел биномиального распределения при $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, и $n \cdot p = \lambda$, где:

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

При выполнении указанных условий биномиальное распределение приближается к:

$$P(X = k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = n \cdot p.$$

Построение датчика:

- Для моделирования биномиальной случайной величины используется n независимых испытаний Бернулли с вероятностью успеха p .
- При больших n и малых p , где $n \cdot p = \lambda$, биномиальная случайная величина моделирует пуассоновское распределение.

Проверка при помощи критерия χ^2 Пирсона:

Определение. Критерий χ^2 Пирсона используется для проверки соответствия эмпирического распределения теоретическому. Статистика критерия вычисляется как:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

где: O_i — наблюдаемая частота, E_i — ожидаемая частота, k — число уникальных значений в выборке.

p -значение:

$$p = 1 - F_{\chi^2}(\chi^2, \nu),$$

где: F_{χ^2} — функция распределения χ^2 , $\nu = k - 1$ — число степеней свободы.

Результаты: На графике ниже представлено сравнение эмпирического и теоретического распределений. Для проверки использовался критерий χ^2 , результаты которого показывают степень соответствия данных пуассоновскому распределению.

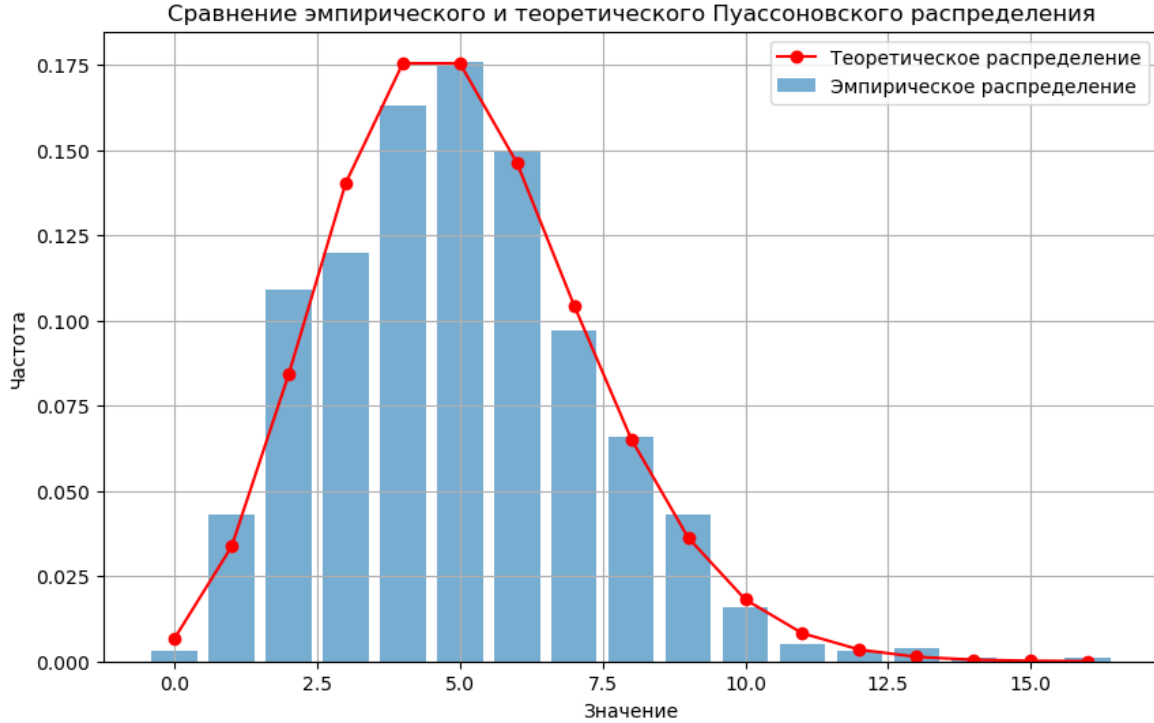


Рис. 14: Сравнение эмпирического и теоретического Пуассоновского распределения (предел биномиального)

Если p -значение больше уровня значимости α , гипотеза о соответствии пуассоновскому распределению не отвергается, что подтверждает корректность построенного датчика.

3.5 Стандартное нормальное распределение (метод Бокса-Мюллера)

Метод Бокса-Мюллера позволяет генерировать независимые случайные величины, распределённые по стандартному нормальному закону $N(0, 1)$, используя преобразование двух независимых случайных величин, равномерно распределённых на интервале $(0, 1)$.

Определение. Если $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$ — независимые равномерно распределённые случайные величины, то стандартное нормальное распределение $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ можно получить по формулам:

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2), \quad Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2).$$

Алгоритм метода Бокса-Мюллера:

1. Сгенерировать две независимые случайные величины $U_1, U_2 \sim U(0, 1)$.
2. Вычислить радиус R и угол θ в полярных координатах:

$$R = \sqrt{-2 \ln U_1}, \quad \theta = 2\pi U_2.$$

3. Перейти в декартовы координаты:

$$Z_1 = R \cos(\theta), \quad Z_2 = R \sin(\theta).$$

Полученные Z_1 и Z_2 являются независимыми стандартно-нормальными случайными величинами.

Проверка корректности методом Бокса-Мюллера:

Для проверки корректности построенного датчика стандартного нормального распределения используются следующие статистические критерии:

- t -критерий Стьюдента для проверки равенства математических ожиданий.
- Критерий Фишера для проверки равенства дисперсий.

3.5.1 t -критерий Стьюдента

Определение. t -критерий Стьюдента используется для проверки гипотезы о равенстве математического ожидания выборки и заданного значения:

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0.$$

Статистика:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}},$$

где:

- \bar{X} — выборочное среднее,
- S — выборочное стандартное отклонение,
- n — объём выборки.

3.5.2 Критерий Фишера

Определение. Критерий Фишера используется для проверки гипотезы о равенстве дисперсий двух выборок:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Статистика:

$$F = \frac{\max(S_1^2, S_2^2)}{\min(S_1^2, S_2^2)},$$

где S_1^2 и S_2^2 — выборочные дисперсии двух групп.

Результаты:

- Для проверки равенства математического ожидания было рассчитано p -значение по t -критерию. Если $p > \alpha$, гипотеза о равенстве математического ожидания принимается.
- Для проверки равенства дисперсий было рассчитано p -значение по критерию Фишера. Если $p > \alpha$, гипотеза о равенстве дисперсий принимается.

Иллюстрация:

На графике представлено сравнение эмпирической плотности стандартного нормального распределения, полученного методом Бокса-Мюллера, с теоретической плотностью.

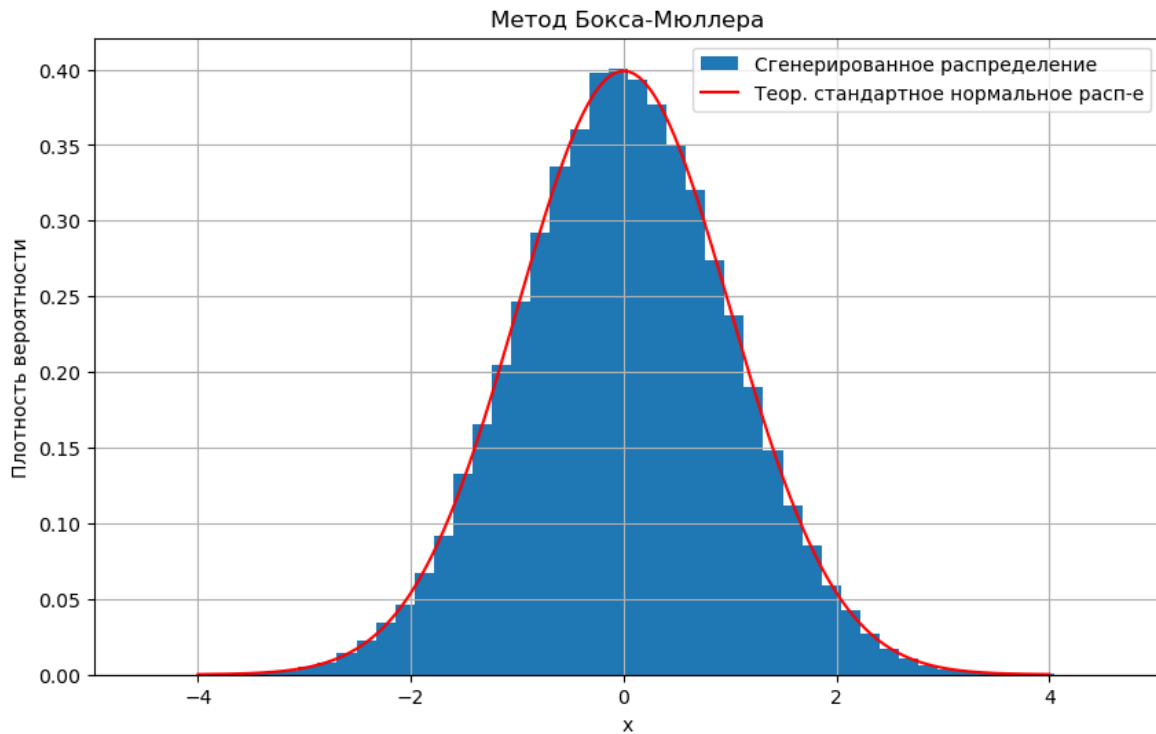


Рис. 15: Сравнение эмпирического и теоретического стандартного нормального распределения (Метод Бокса-Мюллера)

Результаты проверки с использованием t -критерия Стьюдента и критерия Фишера подтверждают корректность построенного датчика.

4 Задание 4

1. Построить датчик распределения Коши.
2. На основе датчика распределения Коши с помощью метода фон Неймана построить датчик стандартного нормального распределения. При помощи графика *normal probability plot* убедиться в корректности построенного датчика и обосновать наблюдаемую линейную зависимость.
3. Сравнить скорость моделирования стандартного нормального распределения в заданиях 3 и 4.

4.1 Датчик распределения Коши

Определение. Распределение Коши с параметрами x_0 (местоположение) и γ (масштаб) имеет плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left(1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)}.$$

Свойство. Для стандартного распределения Коши ($x_0 = 0$, $\gamma = 1$), случайная величина X вычисляется как:

$$X = \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right),$$

где $U \sim U(0, 1)$. Для произвольных параметров x_0 и γ :

$$X = x_0 + \gamma \cdot \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Результат:

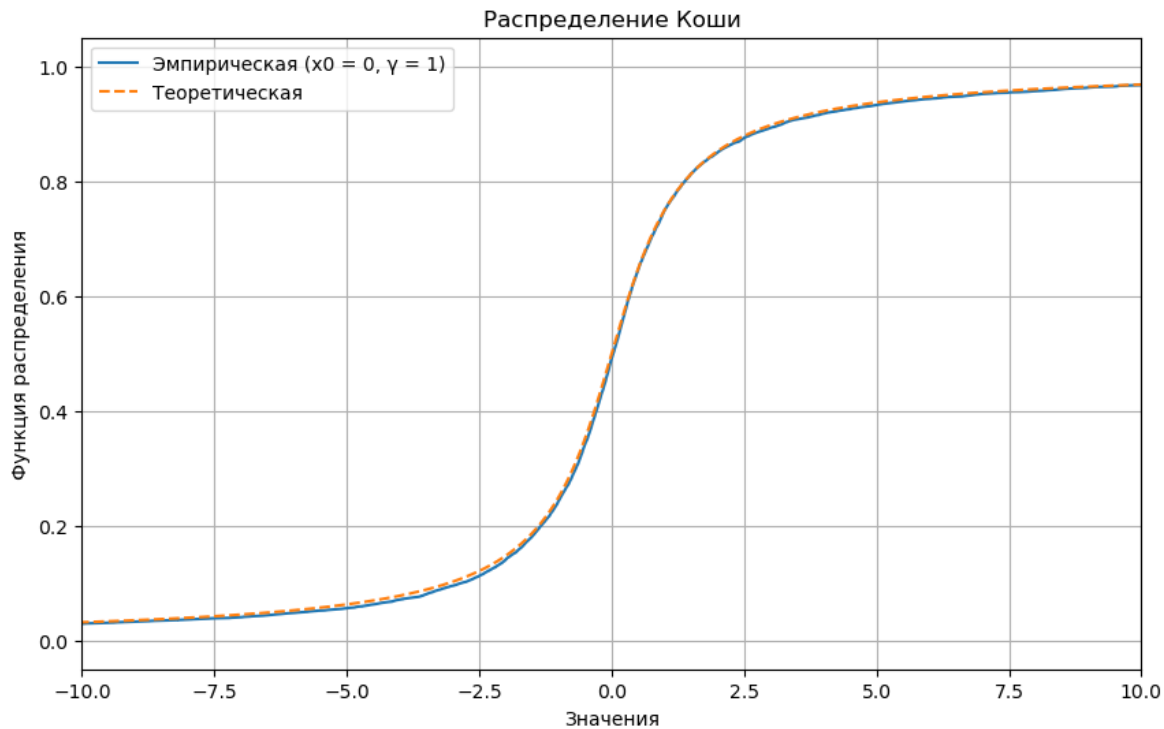


Рис. 16: Эмпирическая и теоретическая функции распределения Коши ($x_0 = 0$, $\gamma = 1$)

4.2 Метод фон Неймана для моделирования стандартного нормального распределения

Определение (Метод фон Неймана). Метод фон Неймана (или *rejection sampling*) используется для генерации выборки из целевого распределения $P(x)$, используя вспомогательное распределение $Q(x)$. Каждое значение x , сгенерированное из $Q(x)$, принимается

с вероятностью:

$$U \leq \frac{P(x)}{MQ(x)},$$

где:

- $U \sim U(0, 1)$ — равномерно распределённая случайная величина,
- M — константа, такая что $MQ(x) \geq P(x)$ для всех x ,
- $P(x)$ — плотность целевого распределения,
- $Q(x)$ — плотность вспомогательного распределения.

Применение метода фон Неймана:

- Целевое распределение: стандартное нормальное $P(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.
- Вспомогательное распределение: распределение Коши $Q(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
- Итоговое выражение для проверки:

$$U \leq \frac{\sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}}{1+x^2}.$$

Результаты моделирования:

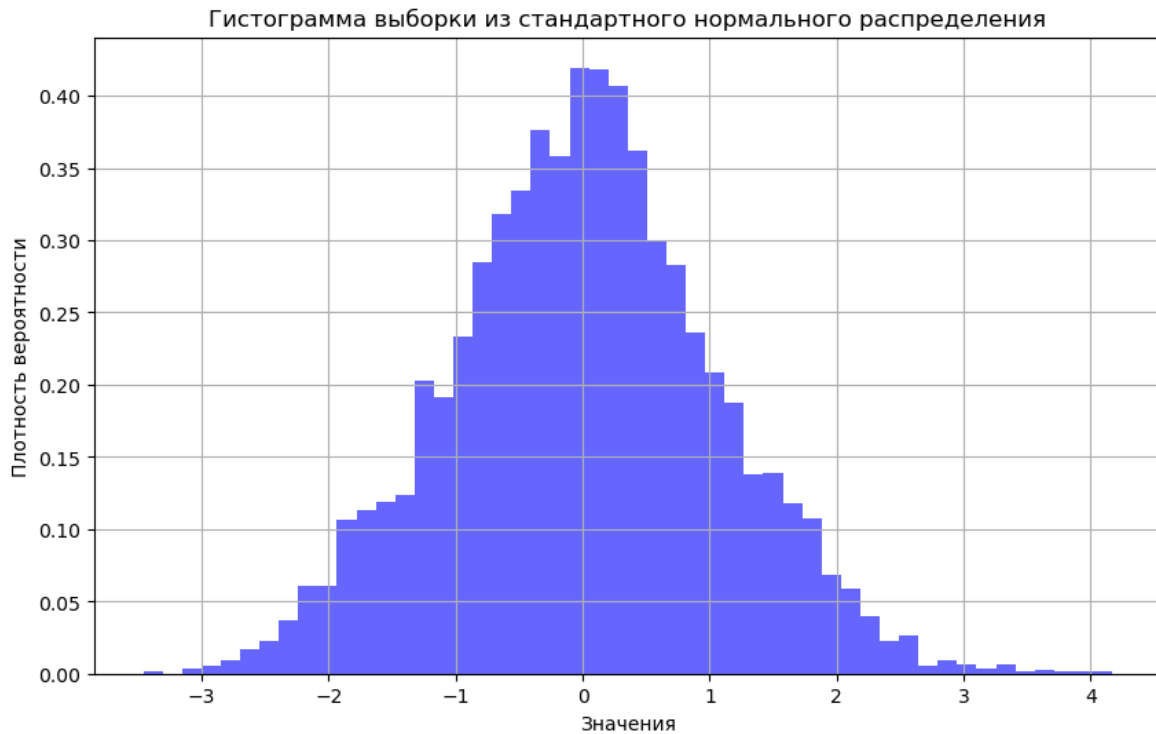


Рис. 17: Гистограмма выборки из стандартного нормального распределения (метод фон Неймана)

Normal Probability Plot: используется для проверки соответствия выборки нормальному распределению. На графике сравниваются квантили выборки (ось y) и квантили теоретического нормального распределения (ось x).

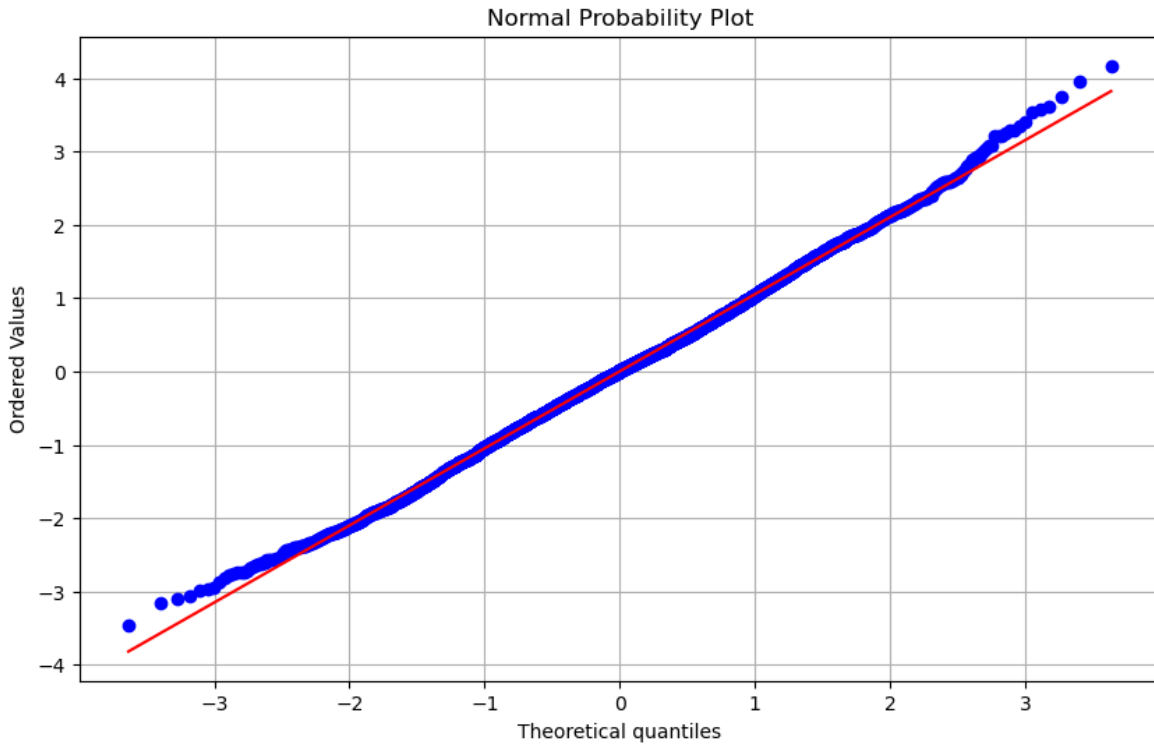


Рис. 18: Normal Probability Plot для выборки из стандартного нормального распределения (метод фон Неймана)

Линейная зависимость на графике указывает на соответствие выборки нормальному распределению. Отклонения от прямой линии могут свидетельствовать о выбросах или несоответствии выборки нормальному распределению. Для стандартного нормального распределения $N(0, 1)$ наклон линии равен 1, а пересечение с осью y равно 0.

Линейность обусловлена тем, что квантильная функция выборки соответствует квантильной функции стандартного нормального распределения. Наклон линии отражает стандартное отклонение σ , а смещение вдоль оси y связано с математическим ожиданием μ .

Метод фон Неймана успешно моделирует стандартное нормальное распределение, что подтверждается линейной зависимостью на Normal Probability Plot и совпадением эмпирической гистограммы с теоретической плотностью нормального распределения.

4.3 Сравнение скорости моделирования

Определение. Для оценки скорости работы алгоритмов было выполнено моделирование стандартного нормального распределения методами:

- Метод Бокса-Мюллера (Задание 3),

- Метод фон Неймана (Задание 4).

Время выполнения измерялось для различных размеров выборки.

Результаты:



Рис. 19: Сравнение скорости моделирования стандартного нормального распределения (Метод Бокса-Мюллера и метод фон Неймана)

Вывод: Метод Бокса-Мюллера значительно быстрее метода фон Неймана, особенно при увеличении размера выборки. Это связано с тем, что метод фон Неймана требует большого числа отклонённых значений, что увеличивает вычислительные затраты.

5 Задание 5

1. Пусть $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Убедиться эмпирически в справедливости теоремы о законе больших чисел (ЗБЧ) и центральной предельной теоремы (ЦПТ): исследовать поведение суммы $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и эмпирического распределения величины:

$$\sqrt{n} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right).$$

2. Считая μ и σ^2 неизвестными, построить доверительные интервалы для среднего и дисперсии по имеющейся выборке.
3. Пусть $X_i \sim K(a, b)$ имеет распределение Коши с параметрами a и b . Изучить эмпирически, как ведут себя суммы S_n/n , объяснить результат и найти закон распределения данных сумм.

5.1 Закон больших чисел и центральная предельная теорема для нормального распределения

5.1.1 Закон больших чисел (ЗБЧ)

Определение (Закон больших чисел). ЗБЧ утверждает, что для последовательности независимых и одинаково распределённых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n , математическое ожидание выборочного среднего сходится к истинному среднему μ при $n \rightarrow \infty$:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu.$$

Если случайные величины X_i имеют одинаковое математическое ожидание $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ и дисперсию $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$, то при увеличении числа испытаний n выборочное среднее становится более точной оценкой истинного среднего, так как:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Таким образом, разброс выборочного среднего уменьшается с ростом n .

Для моделирования нормального распределения $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ с параметрами $\mu = 4$ и $\sigma = 5$, вычислялось накопленное выборочное среднее:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Результат:

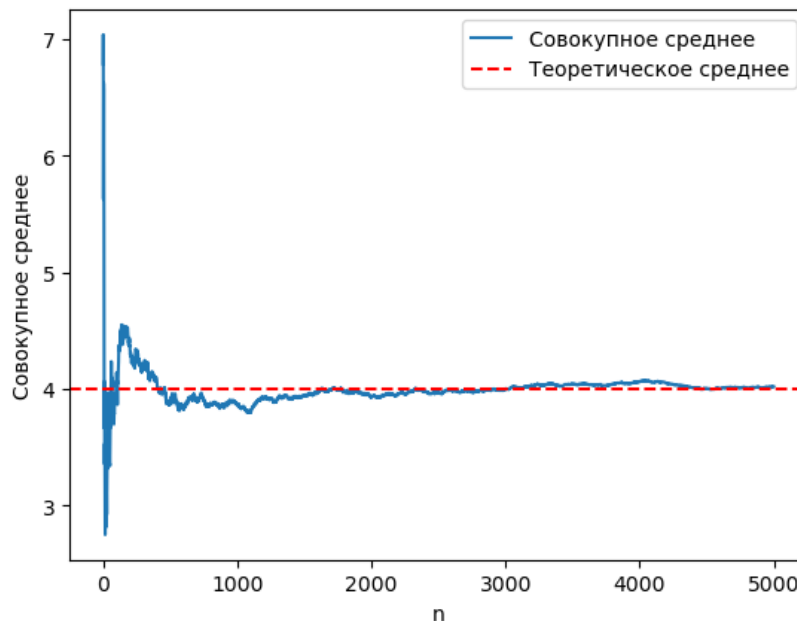


Рис. 20: Накопленное выборочное среднее \bar{X}_n ($\mu = 4, \sigma = 5$)

На графике видно, что накопленное выборочное среднее \bar{X}_n быстро приближается к истинному среднему $\mu = 4$ при увеличении n , подтверждая справедливость ЗБЧ.

5.1.2 Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Определение (Центральная предельная теорема). ЦПТ утверждает, что сумма независимых случайных величин $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, нормализованная с помощью \sqrt{n} , приближается к стандартному нормальному распределению $N(0, 1)$ при $n \rightarrow \infty$:

$$Z_n = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1).$$

ЦПТ справедлива для независимых случайных величин с одинаковым распределением и конечным математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Величина:

$$Z_n = \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n}{n} - \mu \right)$$

стандартизует сумму случайных величин и приближает её распределение к стандартному нормальному.

Для проверки ЦПТ моделировалась выборка из $n = 5000$ случайных величин $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ с параметрами $\mu = 4$, $\sigma = 5$. Нормализованные суммы Z_n сравнивались с теоретической функцией распределения:

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

где erf — функция ошибок.

Результат:

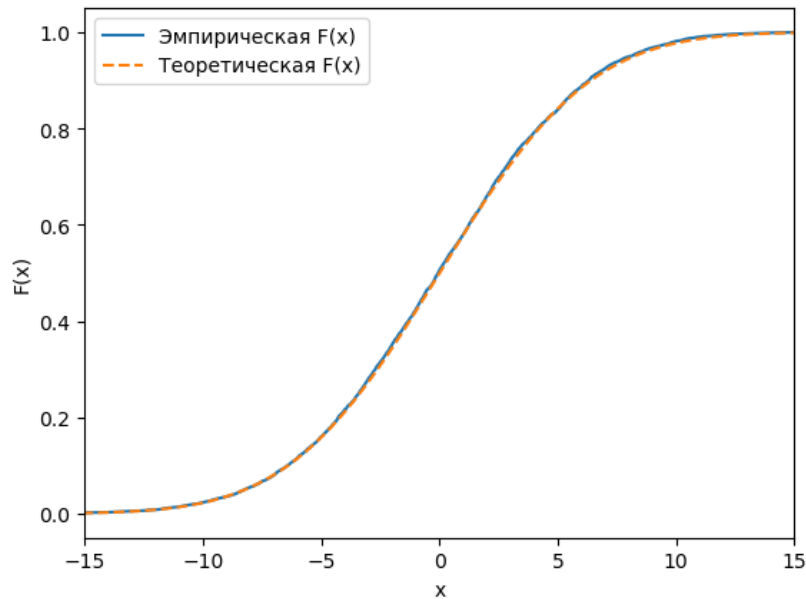


Рис. 21: Сравнение эмпирической и теоретической функции распределения нормализованных сумм

На графике показано, что эмпирическая функция распределения нормализованных сумм Z_n совпадает с теоретической функцией стандартного нормального распределения $N(0, 1)$. Это подтверждает справедливость ЦПТ.

5.2 Доверительные интервалы для среднего и дисперсии

5.2.1 Доверительный интервал для среднего μ

Определение. Для выборки $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ — независимых случайных величин из нормального распределения, доверительный интервал для среднего μ вычисляется как:

$$\mu \in \left(\bar{X} - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right),$$

где:

- $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ — выборочное среднее,
- $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ — выборочное стандартное отклонение,
- $t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы,
- n — размер выборки,
- α — уровень значимости.

Вывод интервала:

Распределение выборочного среднего \bar{X} при известной дисперсии имеет вид:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

При неизвестной дисперсии вместо σ^2 используется её оценка S^2 , а нормальное распределение заменяется распределением Стьюдента. Тогда доверительный интервал выводится из следующего неравенства:

$$P\left(-t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha.$$

Результат:

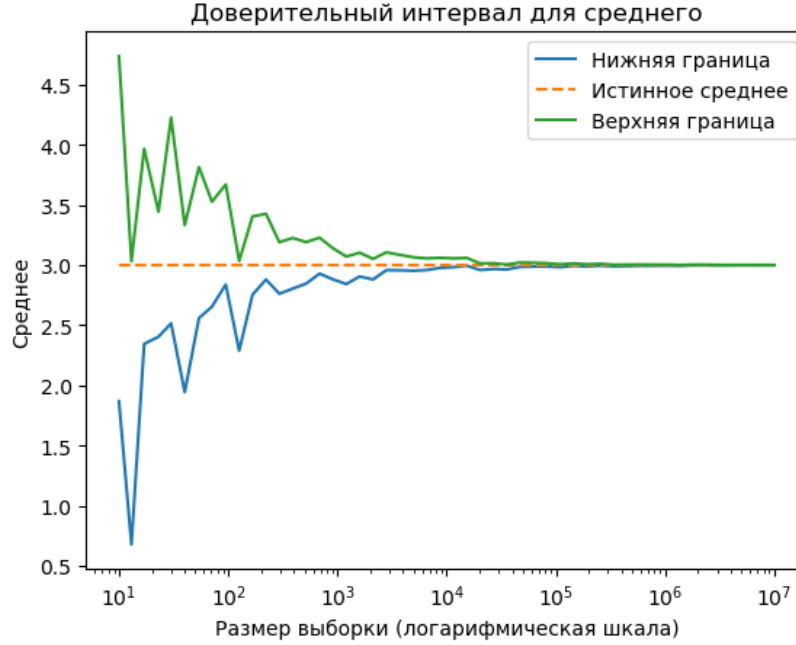


Рис. 22: Доверительный интервал для среднего

5.2.2 Доверительный интервал для дисперсии σ^2

Определение. Для выборки $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, доверительный интервал для дисперсии σ^2 вычисляется как:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right),$$

где:

- $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ — выборочная дисперсия,
- $\chi_{n-1, p}^2$ — квантиль распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Вывод интервала:

Распределение выборочной дисперсии S^2 имеет вид:

$$H = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

где $\chi^2(n-1)$ — распределение χ -квадрат с $n-1$ степенями свободы. Из свойства распределения χ -квадрат:

$$P\left(\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha.$$

Решая это неравенство относительно σ^2 , получаем интервал:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right).$$

Результат:

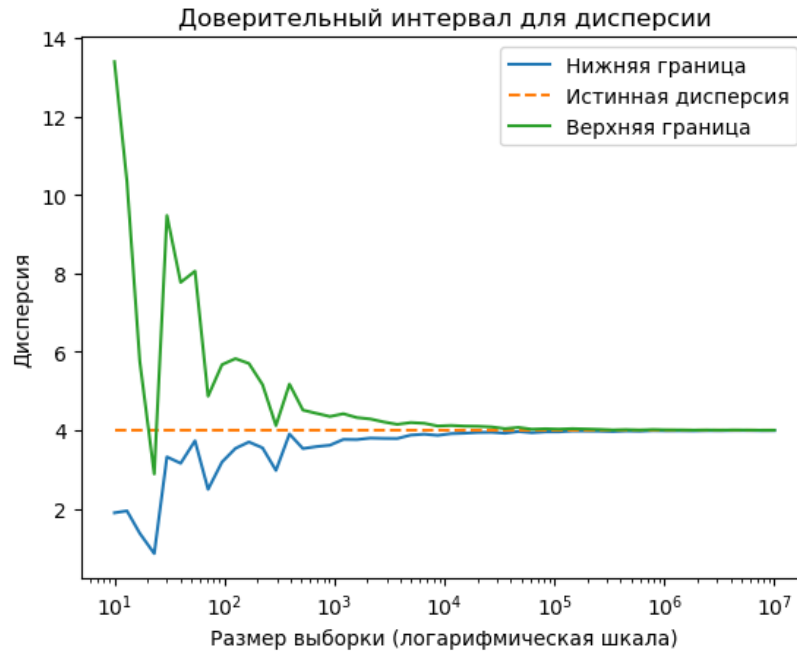


Рис. 23: Доверительный интервал для дисперсии

5.3 Распределение сумм для случайных величин с распределением Коши

Определение (Распределение Коши). *Распределение Коши с параметрами a (сдвиг) и b (масштаб) имеет плотность вероятности:*

$$f(x; a, b) = \frac{1}{\pi b \left(1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где:

- a — параметр сдвига, задающий медиану распределения,
- $b > 0$ — параметр масштаба, характеризующий "ширину" распределения.

Особенности распределения Коши:

- Распределение Коши не имеет конечного математического ожидания и дисперсии.
- Центральная предельная теорема (ЦПТ) неприменима, так как условия её выполнения нарушаются.
- Сумма $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и среднее S_n/n сохраняют распределение Коши с теми же параметрами a и b . Это свойство известно как замкнутость распределения Коши относительно сумм.

5.3.1 Суммы случайных величин

Формальное доказательство: Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n \sim K(a, b)$ — независимые случайные величины с распределением Коши. Их характеристическая функция имеет вид:

$$\phi_{X_i}(t) = \exp(it a - b|t|).$$

Для суммы $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ характеристическая функция равна:

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t) = \exp(it n a - n b |t|).$$

Это характеристическая функция распределения Коши с параметрами $a_n = a$ и $b_n = b$. Следовательно, $S_n \sim K(a, b)$.

Средние: Деление суммы S_n на n изменяет масштаб параметра b на b/n , но само распределение остаётся распределением Коши с параметрами a и b :

$$\frac{S_n}{n} \sim K(a, b).$$

5.3.2 Эмпирическое поведение средних

Рассмотрим выборку $X_1, X_2, \dots, X_n \sim K(a, b)$. Для каждой выборки вычислим сумму $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ и среднее S_n/n . Эмпирическая проверка демонстрирует сохранение распределения Коши для средних.

Результаты:

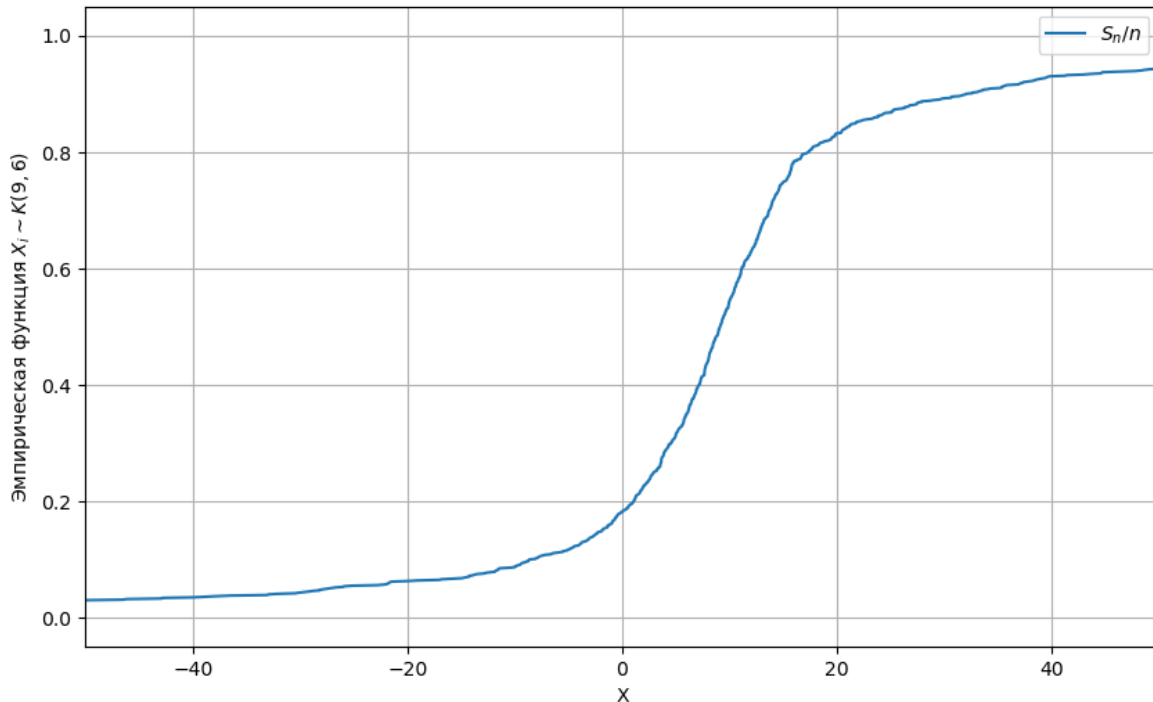


Рис. 24: Эмпирическая функция распределения средних S_n/n

На графике показана эмпирическая функция распределения средних S_n/n , которая соответствует распределению Коши с параметрами a и b .

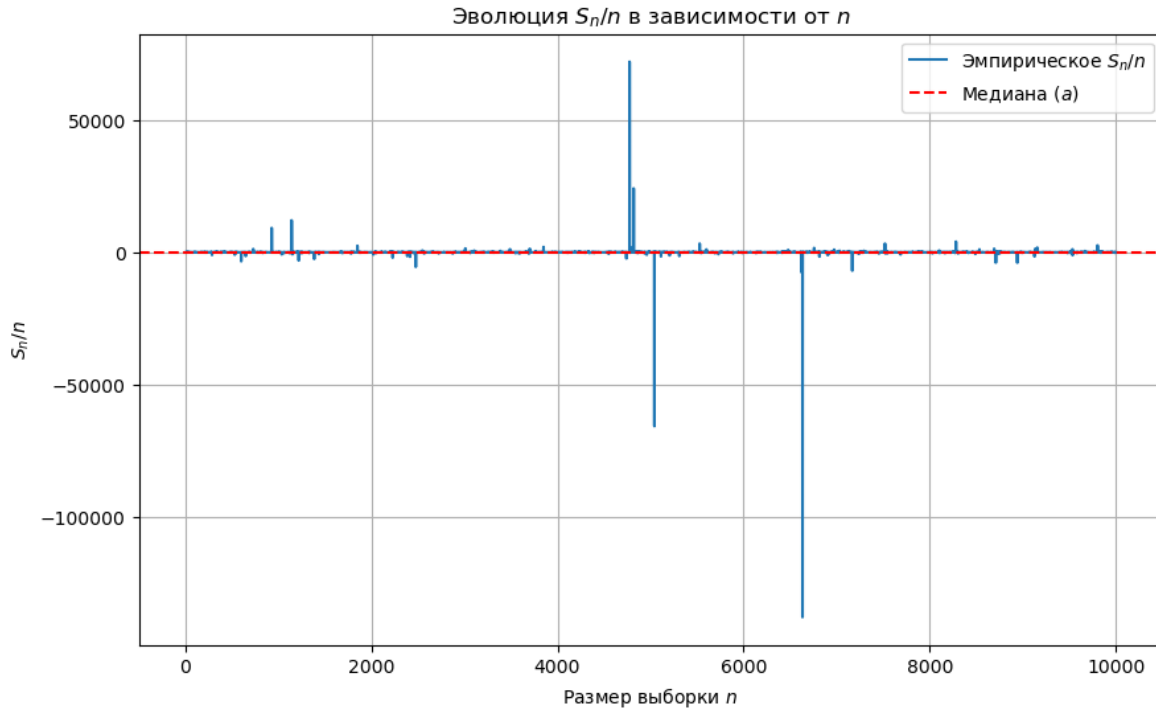


Рис. 25: Эволюция S_n/n в зависимости от размера выборки n

На графике видно, что средние S_n/n не стремятся к одному значению (в отличие от нормального распределения). Они сохраняют широкий разброс, обусловленный отсутствием математического ожидания у распределения Коши.

- Распределение Коши обладает уникальной особенностью: сумма случайных величин и средние сохраняют исходное распределение.
- Эмпирически показано, что средние S_n/n имеют то же распределение Коши с параметрами a и b , как и отдельные члены суммы.
- Это связано с замкнутостью распределения Коши относительно операций сложения и масштабирования.

6 Задание 6

Вычислить следующий интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + \cdots + x_{10}^2 + \frac{1}{27} \cdot x_1^2 \cdots x_{10}^2)}}{x_1^2 \cdots x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10}.$$

1. Методом Монте-Карло.

2. Методом квадратур, сводя задачу к вычислению собственного интеграла Римана.
3. Оценить точность вычислений для каждого из двух случаев.

6.1 Метод Монте-Карло

Определение. Метод Монте-Карло используется для численного интегрирования в задачах высокой размерности, когда аналитическое вычисление интеграла невозможно или затруднено. Метод основан на статистической оценке интеграла через случайные выборки из области интегрирования.

Для интеграла:

$$I = \int_{\Omega} f(x) dx,$$

где Ω — область интегрирования, а $f(x)$ — подынтегральная функция, метод Монте-Карло приближает значение интеграла следующим образом:

$$I \approx \bar{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

где:

- $x_i \in \Omega$ — случайные точки, равномерно распределённые в области интегрирования,
- n — количество случайных выборок.

Алгоритм метода Монте-Карло:

1. Определить область интегрирования Ω и подынтегральную функцию $f(x)$.
2. Сгенерировать n случайных точек x_i в области Ω . Для высокомерных областей удобно использовать равномерное распределение или стандартное нормальное распределение.
3. Вычислить значение функции $f(x)$ в каждой случайной точке x_i .
4. Найти среднее значение функции $\bar{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.
5. Умножить результат на объём области интегрирования, если используется равномерное распределение.

Метод Монте-Карло использует закон больших чисел, согласно которому среднее значение функции на случайной выборке приближается к её математическому ожиданию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) = \mathbb{E}[f(x)].$$

Таким образом, точность оценки увеличивается с ростом числа выборок n .

Погрешность метода оценивается через выборочную дисперсию σ_n^2 подынтегральной функции:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}},$$

где:

- $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \overline{f(x)} \right)^2$ — выборочная дисперсия,
- $\overline{f(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$ — выборочное среднее.

6.1.1 Применение для многомерного интеграла

Для интеграла высокой размерности:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x_1^2 + \cdots + x_{10}^2 + \frac{1}{27} \cdot x_1^2 \cdots x_{10}^2)}}{x_1^2 \cdots x_{10}^2} dx_1 dx_2 \dots dx_{10},$$

подынтегральная функция $f(x_1, \dots, x_{10})$ задаётся как:

$$f(x_1, \dots, x_{10}) = \frac{e^{-(x_1^2 + \cdots + x_{10}^2 + \frac{1}{27} \cdot x_1^2 \cdots x_{10}^2)}}{x_1^2 \cdots x_{10}^2}.$$

Результат:

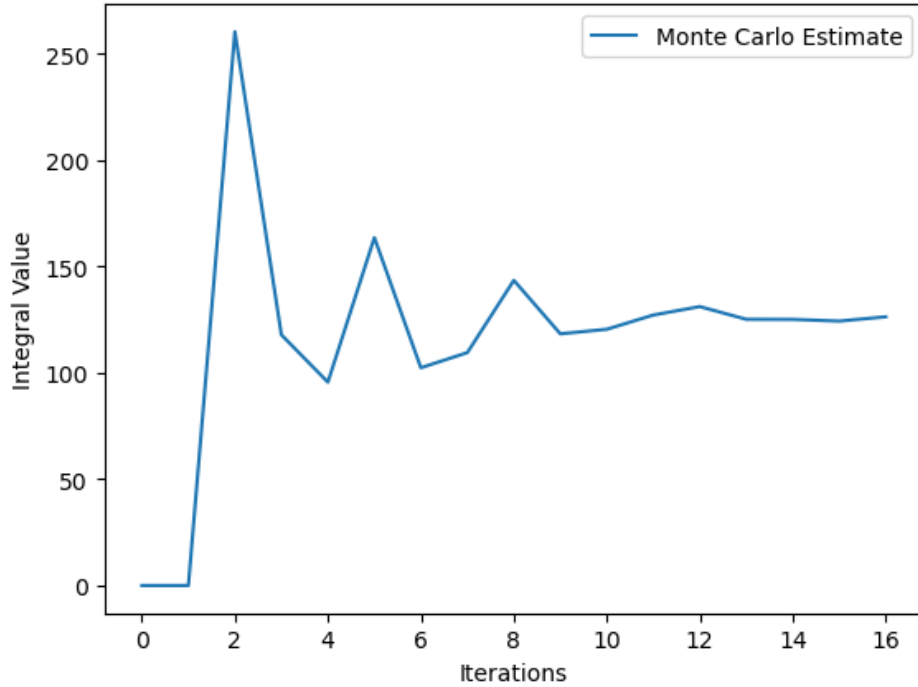


Рис. 26: Оценка значения интеграла методом Монте-Карло с увеличением числа выборок

Значение интеграла стабилизируется с ростом числа выборок n , что подтверждает сходимость метода Монте-Карло.

Финальный результат:

$$I_{\text{Monte Carlo}} = 126.3123$$

6.2 Метод квадратур

Определение (Метод квадратур). Метод квадратур приближает значение интеграла через взвешенную сумму значений функции $f(x)$ в заранее заданных узлах:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i),$$

где:

- x_i — узлы интегрирования,
- w_i — веса, зависящие от выбранного метода.

Применение:

1. Для многомерного интеграла заменяем бесконечные пределы конечными, используя замену переменных, например:

$$x_i = \tan\left(\frac{\pi}{2}t_i\right), \quad t_i \in [0, 1].$$

2. Строим сетку узлов в многомерной области.
3. Вычисляем значения функции в узлах:

$$f(t_1, \dots, t_{10}) = \frac{e^{-(\tan^2(\frac{\pi}{2}t_1) + \dots + \tan^2(\frac{\pi}{2}t_{10}) + \frac{1}{27} \prod_{i=1}^{10} \tan^2(\frac{\pi}{2}t_i))}}{\prod_{i=1}^{10} \tan^2(\frac{\pi}{2}t_i) \cos^2(\frac{\pi}{2}t_i)}.$$

4. Суммируем значения функции с учётом весов, чтобы получить приближение значения интеграла.

Результат:

$$I_{\text{quadrature}} = 216428.803.$$

6.3 Оценка точности вычислений

6.3.1 Метод Монте-Карло

Для метода Монте-Карло погрешность определяется через центральную предельную теорему. Вероятность того, что ошибка оценки интеграла $|\bar{I} - I|$ не превысит заданного значения ε , выражается как:

$$P(|\bar{I} - I| \leq \varepsilon) = 1 - \alpha,$$

где:

- \bar{I} — оценка интеграла по выборке,
- I — истинное значение интеграла,
- α — уровень значимости.

Погрешность оценивается по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} K_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

где:

- $\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(f(x_i) - \overline{f(x)}\right)^2$ — выборочная дисперсия функции $f(x)$,
- n — число выборок,
- $K_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

6.3.2 Метод квадратур

Погрешность метода квадратур оценивается с использованием формулы для метода трапеций:

$$E_{\text{quad}} = \sum_{i=1}^k \frac{\max_{x_i \in [0,1]} |f''(x_i)|}{24} h^3,$$

где:

- k — размерность интеграла,
- $h = \frac{1}{N}$ — шаг разбиения,
- $\max_{x_i \in [0,1]} |f''(x_i)|$ — максимум второй производной функции $f(x)$ на интервале $[0, 1]$.

Погрешность метода квадратур зависит от гладкости функции $f(x)$ и точности её аппроксимации квадратичным полиномом. Чем меньше значение h , тем выше точность метода, но это увеличивает вычислительные затраты, особенно для высокомерных интегралов.

Сравнение методов:

- Метод квадратур даёт высокую точность для гладких функций при небольшой размерности интеграла, но становится вычислительно затратным для высоких размерностей.
- Метод Монте-Карло эффективно работает для высокомерных интегралов, но его точность медленно увеличивается с ростом числа выборок n , так как погрешность уменьшается как $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

7 Задание 7

1. Методом случайного поиска найти минимальное значение функции f на множестве $A = \{x_1, x_2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, где

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10x_1x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0$$

При $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ функция доопределяется по непрерывности.

2. Методом имитации отжига найти минимальное значение функции Розенброка g в пространстве \mathbb{R}^2 , где

$$g(x) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2$$

3. Оценить точность и сравнить результаты со стандартными методами оптимизации.

7.1 Минимизация функции методом случайного поиска

Рассматривается функция:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^3 \sin \frac{1}{x_1} + 10x_1x_2^4 \cos \frac{1}{x_2}, & x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, \\ 0, & x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 0. \end{cases}$$

Область определения:

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}.$$

Метод случайного поиска основывается на генерации случайных точек внутри заданной области A и оценке значений функции $f(x_1, x_2)$ в этих точках. Основные этапы:

1. Генерация точек в области определения:

- Область A представляет собой единичный круг в плоскости x_1 - x_2 .
- Точки генерируются с использованием полярных координат:

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta,$$

где $r \sim U[0, 1]$ — равномерно распределённое значение радиуса, а $\theta \sim U[0, 2\pi]$ — равномерно распределённый угол.

2. **Вычисление значений функции:** Для каждой случайно сгенерированной точки (x_1, x_2) вычисляется значение функции $f(x_1, x_2)$.

3. **Поиск минимального значения:** Минимальное значение функции определяется как:

$$f_{\min} = \min\{f(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2) \in A\}.$$

4. **Точка минимума:** Параметры $(x_1, x_2)_{\min}$, соответствующие минимальному значению функции, также фиксируются.

Результаты:

Минимальное значение: $f(x_1, x_2) = -1.288392096518$.

Координаты точки минимума: $x_1 = -0.356814$, $x_2 = -0.934164$.

Результаты метода дифференциальной эволюции:

Минимальное значение: $f(x_1, x_2) = -1.288489070843$.

Координаты точки минимума: $x_1 = -0.357406$, $x_2 = -0.933949$.

7.1.1 Сравнение методов

Метод случайного поиска:

- Прост в реализации.
- Требуется большое количество итераций (10^6 случайных точек) для приближения к глобальному минимуму.
- Может пропустить точное значение глобального минимума из-за случайного характера поиска.

Метод дифференциальной эволюции:

- Эффективен при меньшем числе итераций, так как использует оптимизационную стратегию.
- Показывает лучшее приближение к глобальному минимуму.
- Более сложен в реализации.

Вывод: Метод случайного поиска является простым, но требует значительных вычислительных ресурсов. Метод дифференциальной эволюции показал лучшие результаты как по точности, так и по скорости выполнения.

7.2 Алгоритм имитации отжига для минимизации функции Розенброка

Определение (Функция Розенброка). *Целевая функция:*

$$g(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2,$$

где глобальный минимум достигается в точке $(x_1, x_2) = (1, 1)$ с минимальным значением $g(x) = 0$.

Основные шаги алгоритма

1. Параметры алгоритма:

- t — коэффициент охлаждения,
- σ — масштаб случайного поиска,
- t_0 — начальная температура,
- (x_0, y_0) — начальное приближение.

2. Генерация нового кандидата: Следующее положение кандидата (x_{k+1}, y_{k+1}) определяется с использованием нормального распределения:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) \sim \mathcal{N}(x_k, t_k \sigma^2), \quad \mathcal{N}(y_k, t_k \sigma^2).$$

Прирост функции вычисляется как:

$$\Delta g = g(x_{k+1}, y_{k+1}) - g(x_k, y_k),$$

где g — целевая функция.

3. Условие перехода:

- Если $\Delta g < 0$, новый кандидат принимается.
- В противном случае, шаг совершается с вероятностью:

$$p_k = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\Delta g}{t_k}\right).$$

4. **Обновление температуры:** Температура понижается с каждым шагом по следующему закону:

$$t_{k+1} = t_k \cdot \frac{m}{1 + 0.1|\Delta g|^{1/2}}.$$

5. **Критерий остановки:** Алгоритм прекращает выполнение, если:

- Температура t_k становится достаточно малой.
- Прирост функции $|\Delta g|$ становится меньше заданного порога.

Результаты минимизации:

Минимальное значение функции: $g(x_1, x_2) = 0.000010950175$.

Координаты точки минимума: $x_1 = 0.996695$, $x_2 = 0.993384$.

Число итераций: 4147.

Время выполнения: 0.071002 секунд.

Сравнение с методом BFGS

Метод BFGS минимизирует функцию Розенброка, используя информацию о градиентах. Это эффективный метод для гладких функций, таких как $g(x_1, x_2)$.

Результаты метода BFGS:

Минимальное значение функции: $g(x_1, x_2) = 0.000000000019$.

Координаты минимума: $x_1 = 0.999996$, $x_2 = y = 0.999991$.

Число итераций: 30.

Время выполнения: 0.005396 секунд.

Выводы:

- Метод BFGS превосходит имитацию отжига по скорости и точности, благодаря использованию градиентов.
- Метод имитации отжига находит приближение к глобальному минимуму, но требует больше времени и итераций.
- Имитация отжига полезна для задач с несколькими локальными минимумами, где градиентные методы могут застревать.

8 Задание 8

Условие задачи

Необходимо решить первую краевую задачу для двумерного уравнения Лапласа в единичном круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ u|_{\partial D} = f(x, y), \\ u \in C^2(D), & f \in C(\partial D), \end{cases}$$

где задано граничное условие:

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Метод Монте-Карло — это статистический метод, который используется для приближённого решения уравнений, таких как уравнение Лапласа. В данном случае метод применяется для оценки значений функции внутри области D с помощью случайного блуждания.

Алгоритм решения

1. **Построение сетки и определение точек** Первым шагом является построение равномерной сетки на области $[-1, 1] \times [-1, 1]$ с шагом ε . После этого определяем, какие точки лежат внутри единичного круга, то есть удовлетворяют неравенству:

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

2. **Определение граничных и внутренних точек**

- *Граничные точки:* Это точки, которые лежат внутри круга, но имеют хотя бы одного соседа вне круга.
- *Внутренние точки:* Это точки, все соседи которых также лежат внутри круга.

3. **Моделирование случайного блуждания**

- Для каждой внутренней точки запускается частица, которая выполняет случайное блуждание. На каждой итерации частица может с равной вероятностью перемещаться в одну из четырёх соседних точек: влево, вправо, вверх или вниз.
- Частица продолжает движение до тех пор, пока не достигнет границы круга.
- Как только частица попадает на границу, её значение фиксируется по граничному условию:

$$u(Q) = f(Q),$$

где Q — граничная точка.

- Для внутренних точек значение функции вычисляется как среднее значение соседей:

$$u(P) = \frac{1}{4}(u(P_1) + u(P_2) + u(P_3) + u(P_4)),$$

где P_1, P_2, P_3, P_4 — соседи точки P на сетке.

4. **Численное решение** Значение функции в каждой внутренней точке приближается через среднее значение функции на границе, которое получаем с помощью многократных запусков частиц:

$$T(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i),$$

где N — количество частиц, достигших границы круга, и $f(x_i, y_i)$ — значение функции на границе для каждой частицы.

5. **Аналитическое решение** Аналитическое решение задачи для функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ вычисляется непосредственно:

$$u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Аналитическое решение совпадает с граничным условием и позволяет проверить корректность численного метода.

Результаты численного метода

Числовое приближение значений функции внутри области совпадает с аналитическим решением с минимальной ошибкой.

- Числовое приближение температуры $T(x, y)$ в каждой точке области выражается как среднее значение функции на границе:

$$T(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i).$$

- Ошибка между аналитическим и численным решениями минимальна.

Результаты

Численное решение методом Монте-Карло

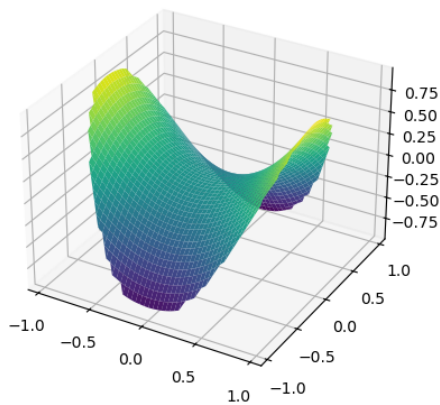


Рис. 27: Численное решение методом Монте-Карло

Аналитическое решение

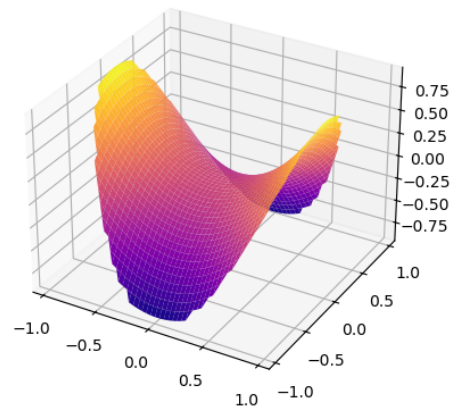


Рис. 28: Аналитическое решение

Ошибка между решениями

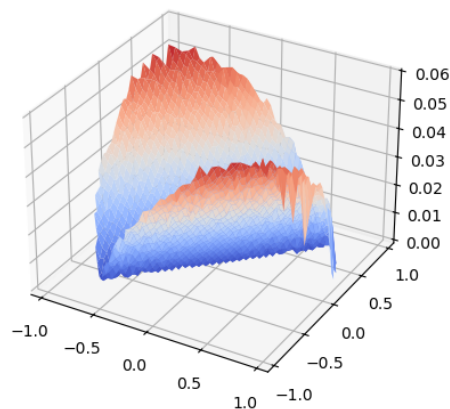


Рис. 29: Ошибка между аналитическим и численным решениями

Выводы

- Метод Монте-Карло показал хорошее совпадение с аналитическим решением.
- Ошибка между численным и аналитическим решениями минимальна и распределена равномерно внутри области.
- Метод Монте-Карло позволяет решать уравнения в сложных областях, где аналитическое решение затруднительно, но требует большого числа частиц для высокой точности.

9 Задание 9

Рассматриваются два вида гауссовских процессов:

- Винеровский процесс $W(t)$, $t \in [0, 1]$, $W(0) = 0$;
- Процесс Орнштейна–Уленбека $X(t)$, $t \in [0, 1]$, $X(0) = X_0$, где начальные значения X_0 выбираются случайным образом, чтобы процесс был стационарным.

Для данных процессов требуется:

1. Найти ковариационную функцию и переходные вероятности.
2. Промоделировать независимые траектории процесса с данными переходными вероятностями методом добавления разбиения отрезка.
3. Построить график траектории, не соединяя точки ломаной, для визуально непрерывной линии.

9.1 Ковариационная функция и переходные вероятности

Определение. Винеровским процессом с параметром $\sigma > 0$ называется случайная функция $\{W(t), t \geq 0\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $W(0) = 0$ почти наверное.
2. Приращения процесса независимы: для любых $0 \leq s < t$ приращение $W(t) - W(s)$ независимо от значений процесса на отрезке $[0, s]$.
3. Для любых $t, s \geq 0$ выполнено:

$$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2|t - s|).$$

Ковариационная функция. Ковариационная функция Винеровского процесса определяется как:

$$R(s, t) = \mathbb{E}[W(s)W(t)].$$

Рассмотрим два случая:

- Если $s \leq t$, то $W(t) = W(s) + (W(t) - W(s))$, где $W(t) - W(s)$ независимо от $W(s)$. Таким образом:

$$\mathbb{E}[W(s)W(t)] = \mathbb{E}[W(s)^2] = s.$$

- Аналогично при $t \leq s$: $\mathbb{E}[W(s)W(t)] = t$.

Итоговая формула ковариационной функции:

$$R(s, t) = \min(s, t).$$

Переходные вероятности. Для Винеровского процесса переходные вероятности задаются следующим образом:

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \Delta W_i, \quad \Delta W_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t}).$$

Определение. Процесс Орнштейна–Уленбека $X(t), t \geq 0$, является стационарным, марковским и гауссовским процессом, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX(t) = -\theta X(t)dt + \sigma dW(t),$$

где:

- $\theta > 0$ — коэффициент скорости возврата к среднему,
- $\sigma > 0$ — интенсивность шума,
- $W(t)$ — винеровский процесс.

Ковариационная функция. Процесс Орнштейна–Уленбека является стационарным, поэтому ковариационная функция зависит только от разности $\tau = |t_2 - t_1|$:

$$R(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|t_2 - t_1|}.$$

Переходные вероятности. Для каждого момента времени t_{i+1} , условное математическое ожидание и дисперсия определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t_{i+1})|X(t_i)] &= X(t_i)e^{-\theta\Delta t}, \\ \text{Var}(X(t_{i+1})|X(t_i)) &= \frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta\Delta t}). \end{aligned}$$

Следующее значение генерируется по формуле:

$$X(t_{i+1}) = \mathbb{E}[X(t_{i+1})|X(t_i)] + \sqrt{\text{Var}(X(t_{i+1})|X(t_i))} \cdot \xi_i, \quad \xi_i \sim N(0, 1).$$

9.2 Моделирование траекторий

Винеровский процесс:

- Разбиение временного интервала $[0, 1]$ на N точек с шагом $\Delta t = 1/N$.
- Генерация приращений $\Delta W_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$.
- Траектория процесса строится как:

$$W(t_k) = \sum_{i=1}^k \Delta W_i, \quad W(0) = 0.$$

Процесс Орнштейна–Уленбека:

- Начальное значение:

$$X(0) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right).$$

- Для каждого временного шага:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i)e^{-\theta\Delta t} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\theta}(1 - e^{-2\theta\Delta t})} \cdot \xi_i, \quad \xi_i \sim N(0, 1).$$

9.3 Графики траекторий

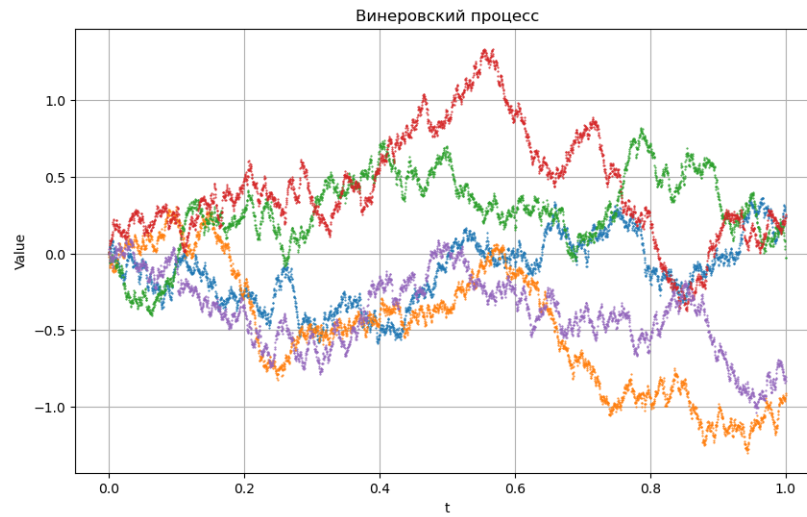


Рис. 30: Траектория Винеровского процесса

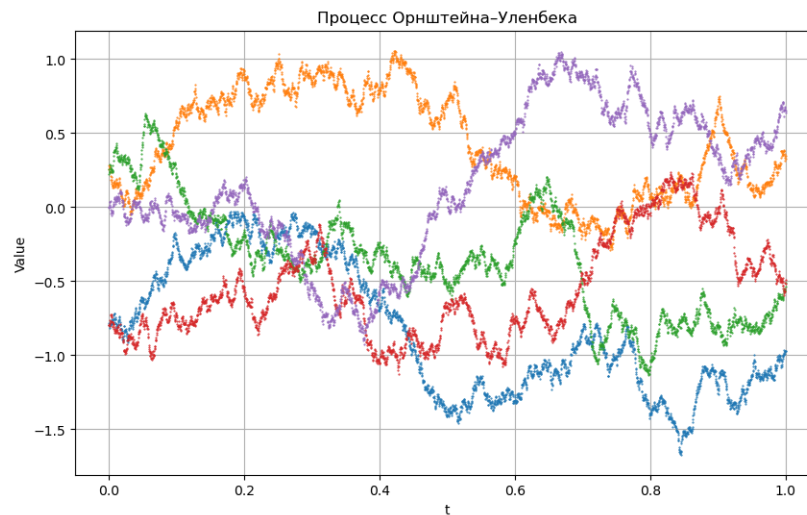


Рис. 31: Траектория процесса Орнштейна–Уленбека

9.4 Выводы

- Для Винеровского процесса ковариационная функция $R(s, t) = \min(s, t)$ отражает независимость его приращений.
- Для процесса Орнштейна–Уленбека экспоненциальная форма ковариационной функции демонстрирует убывающую корреляцию с увеличением временного расстояния.
- Моделирование методом разбиения отрезка позволяет визуализировать основные свойства процессов: непрерывность траектории Винеровского процесса и стационарность процесса Орнштейна–Уленбека.

10 Задание 10

Произвести фильтрацию одномерного процесса Орнштейна–Уленбека:

1. Используя генератор белого шума, добавить к реализации процесса Орнштейна–Уленбека случайную ошибку с заранее известной дисперсией.
2. При помощи одномерного фильтра Калмана оценить траекторию процесса по зашумленному сигналу, считая известными параметры шума и процесса.
3. Рассмотреть следующие виды шума:
 - (а) Гауссов шум.
 - (б) Шум Коши.

Свойство. Процесс Орнштейна–Уленбека $X(t)$ является стационарным и имеет следующие свойства:

- Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0.$$

- Ковариационная функция:

$$R(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X(t_1)X(t_2)] = \frac{\sigma^2}{2\theta} e^{-\theta|t_2-t_1|}.$$

- Стационарное распределение:

$$X(t) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}\right).$$

При наблюдении за реальным процессом данные обычно зашумлены. Мы моделируем это добавлением случайного шума $\eta(t)$:

$$Y(t) = X(t) + \eta(t),$$

где $X(t)$ — истинный процесс Орнштейна–Уленбека, $\eta(t)$ — шум наблюдения.

Гауссов шум:

$$\eta(t) \sim N(0, \sigma_\eta^2),$$

где σ_η^2 — дисперсия шума.

Шум Коши:

$$\eta(t) \sim \text{Cauchy}(x_0, \gamma),$$

где x_0 — центр распределения, γ — параметр масштаба.

10.1 Фильтр Калмана

Фильтр Калмана — это алгоритм для оценки состояния линейной системы с гауссовским шумом наблюдений. Он выполняется в два этапа:

Прогноз:

$$\begin{aligned}\hat{X}_{k|k-1} &= F \hat{X}_{k-1|k-1}, \quad F = e^{-\theta \Delta t}, \\ P_{k|k-1} &= F^2 P_{k-1|k-1} + Q, \quad Q = \frac{\sigma^2}{2\theta} (1 - e^{-2\theta \Delta t}).\end{aligned}$$

Обновление:

$$\begin{aligned}K_k &= \frac{P_{k|k-1}}{P_{k|k-1} + R}, \quad R = \sigma_\eta^2, \\ \hat{X}_{k|k} &= \hat{X}_{k|k-1} + K_k (Y_k - \hat{X}_{k|k-1}), \\ P_{k|k} &= (1 - K_k) P_{k|k-1}.\end{aligned}$$

Здесь:

- $\hat{X}_{k|k-1}$ — прогноз состояния,
- $P_{k|k-1}$ — прогноз дисперсии ошибки,
- K_k — коэффициент Калмана,
- $\hat{X}_{k|k}$ — обновлённое состояние,
- $P_{k|k}$ — обновлённая дисперсия ошибки.

10.2 Результаты моделирования

Процесс Орнштейна–Уленбека с параметрами:

- $\theta = 4.0$,
- $\sigma = 5.0$,
- $\Delta t = \frac{1}{200}$ (200 точек на отрезке $[0, 1]$).

Добавлены два типа шума:

- Гауссов шум с дисперсией $\sigma_\eta^2 = 0.3^2$,

- Шум Коши с параметром масштаба $\gamma = 0.3$.

Фильтрация методом Калмана:

- Для гауссовского шума фильтр Калмана эффективно восстанавливает траекторию процесса.
- Для шума Коши фильтр Калмана демонстрирует меньшую точность из-за тяжёлых хвостов распределения шума.

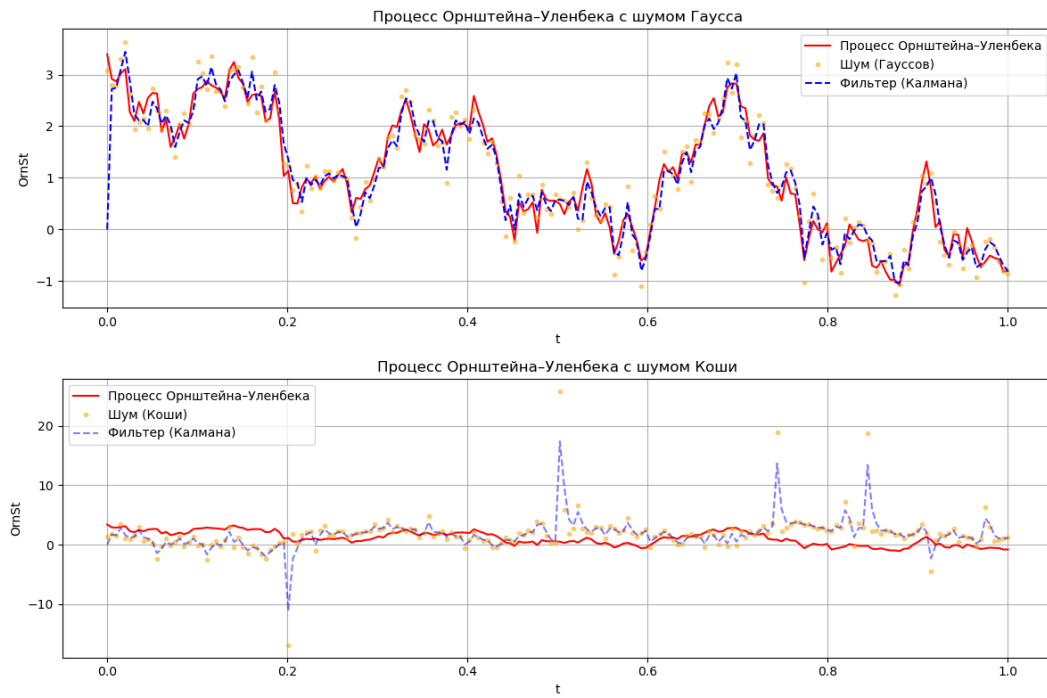


Рис. 32: Процесс Орнштейна-Уленбека с гауссовским шумом



Рис. 33: Процесс Орнштейна-Уленбека с шумом Коши

Выводы

- Фильтр Калмана эффективно восстанавливает истинную траекторию процесса Орнштейна–Уленбека при наличии гауссовского шума.
- Для шума Коши фильтр Калмана менее устойчив, поскольку метод предполагает гауссовский характер распределения шума.
- При наличии тяжёлых хвостов (шум Коши) требуются более сложные подходы к фильтрации.

11 Задание 11

Рассматривается построение двумерного пуассоновского поля, отвечающего следующим задачам:

1. Система массового обслуживания (СМО), где первая координата представляет время поступления заявки, а вторая — время её обслуживания, распределённое по закону χ^2 с десятью степенями свободы.
2. СМО с циклической интенсивностью $\lambda(1 + \cos(t))$, где вторая координата моделируется распределением Бернулли с использованием метода Льюиса и Шедлеара.
3. Работа страховой компании, где первая координата — момент наступления страхового случая (равномерное распределение), а вторая — величина ущерба (распределение Парето). Капитал компании поступает линейно со скоростью $c > 0$, начальный капитал $W > 0$.

11.1 Система массового обслуживания

Система массового обслуживания описывает процесс поступления, обработки и завершения заявок.

Модель:

- Заявки поступают по пуассоновскому процессу с интенсивностью λ .
- Время поступления равномерно распределено на интервале $[0, T]$.
- Время обслуживания каждой заявки распределено по закону $\chi^2(10)$.

Пуассоновский процесс: Число заявок N за интервал времени T распределено по закону Пуассона:

$$P(N = k) = \frac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}.$$

Время обслуживания: Время обслуживания заявки распределено по плотности вероятности:

$$f(x) = \frac{x^4 e^{-x/2}}{2^5 \Gamma(5)}, \quad x > 0,$$

где Γ — гамма-функция.

Динамика системы:

$$t_{\text{end},i} = \max(t_{\text{arrival},i}, t_{\text{end},i-1}) + \tau_i,$$

где $t_{\text{arrival},i}$ — время поступления i -й заявки, τ_i — время её обслуживания.

Графики:

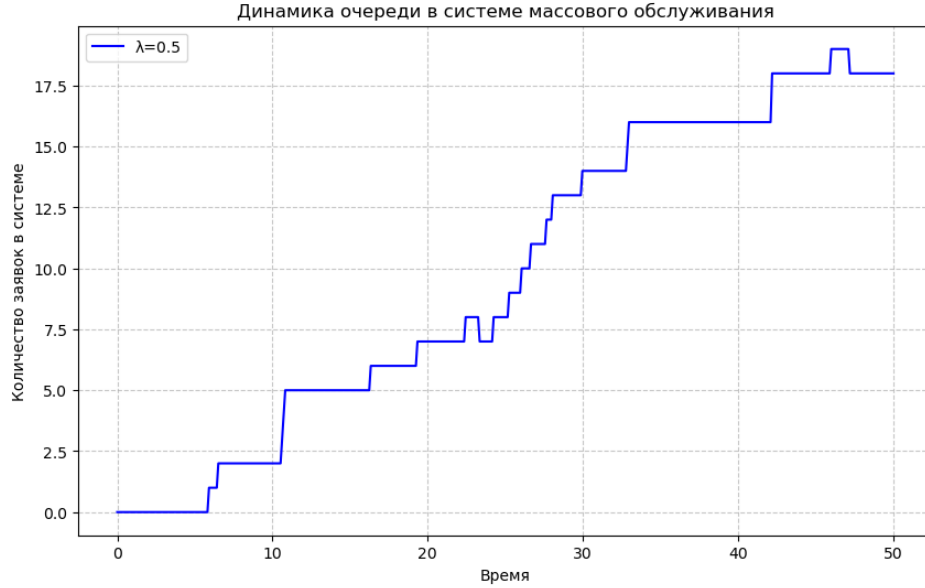


Рис. 34: Динамика очереди в СМО при различных интенсивностях λ .

11.2 СМО с циклической интенсивностью

Заявки поступают с циклической интенсивностью:

$$\lambda(t) = \lambda(1 + \cos(t)).$$

Для моделирования используется метод Льюиса и Шедлеара:

1. Генерируется однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_{\max} = 2\lambda$.
2. Каждое событие фильтруется через распределение Бернулли с вероятностью:

$$P = \frac{\lambda(t)}{\lambda_{\max}}.$$

3. Остаются только события, соответствующие реальной интенсивности $\lambda(t)$.

Результаты:

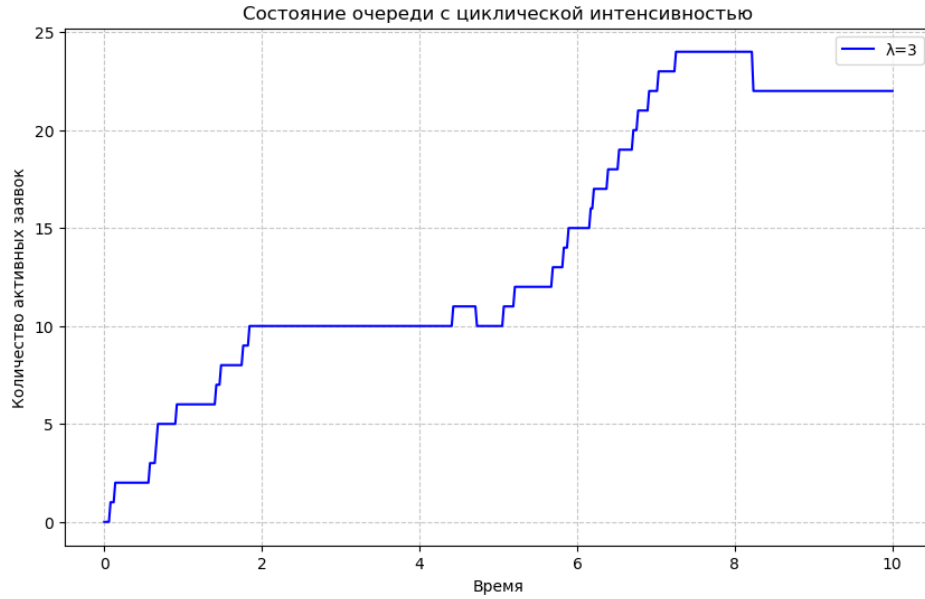


Рис. 35: Состояние очереди в СМО с циклической интенсивностью.

11.3 Работа страховой компании

Модель описывает динамику капитала компании, учитывая случайные страховые случаи и поступление капитала.

Условия:

- Моменты наступления страховых случаев распределены равномерно.
- Размеры убытков τ следуют распределению Парето:

$$F(\tau) = 1 - \left(\frac{b}{\tau}\right)^a, \quad \tau \geq b, a > 0.$$

- Капитал компании увеличивается линейно со скоростью c :

$$W(t) = W_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} \tau_i,$$

где $N(t)$ — число страховых случаев к моменту t , τ_i — размер убытка.

Графики:



Рис. 36: Динамика капитала страховой компании.

Выводы:

- Система массового обслуживания демонстрирует зависимость динамики очереди от интенсивности поступления заявок.
- Циклическая интенсивность приводит к колебаниям нагрузки на систему, что требует адаптивного управления.
- Модель страховой компании позволяет оценить риск банкротства при различных параметрах распределения убытков и скорости поступления капитала.

Список литературы

- [1] Ширяев А. Н. *Вероятность* — 1. МЦНМО, 2004.
- [2] Ульянов В. В. *Лекции по теории вероятностей и математической статистике*, 2022.
- [3] Смирнов С. Н. *Лекции по стохастическому анализу и моделированию*, 2024.