Санкт-Петербургский Политехнический Университет
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Курсовая работа

Решение уравнения Матье

по дисциплине «Вычислительная математика»

Выполнил студент
Группы 23534/2: Бабинцева К.А.
Преподаватель: Леонтьева Т. В.

Санкт-Петербург
2019

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПОЛНЕНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

студенту группы 23534/2 Бабинцева Ксения Александровна
(номер группы) (фамилия, имя, отчество)

1. Тема проекта (работы): Решение уравнение Матье

2. Срок сдачи студентом законченного проекта (работы) 25 мая

3. Исходные данные к проекту (работе): уравнение Матье, заданное дифференциальным уравнением второго порядка, значения δ, E, A, B, заданные преподавателем.

4. Содержание пояснительной записки (перечень подлежащих разработке вопросов): постановка задачи, ход работы, результат работы программы, вывод, приложение

Примерный объём пояснительной записки 15 страниц печатного текста.

5. Перечень графического материала (с указанием обязательных чертежей и плакатов):

7. Дата получения задания: « 26 » февраля 2019 г.

Руководитель ________ Леонтьева Т.В.
(подпись) (инициалы, фамилия)

Задание принял к исполнению ________ Бабинцева К.А.
(подпись студента) (инициалы, фамилия)

26.02.2019 (дата)

Постановка задачи:

Вариант № 21А

Во многих задачах, в частности в задачах об устойчивости поперечной колонны, подверженной периодической поперечной нагрузке, о распространении электромагнитных волн в среде с периодической структурой, о движении Луны, а также в задачах о возбуждении некоторых электрических систем встречается уравнение Матье:

$\frac{d^2U}{dt^2} + (\delta + Ecos2t)U = 0;$

$U(0) = A;$

$U'(0) = B;$

имеющее в зависимости от δ и E как устойчивые, так и неустойчивые решения. Построить график $U(t)$ и оценить погрешность результата и влияние на точность погрешности исходных данных.

Заданные преподавателем значения:

$A = 1;$

$B = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(1.1x)}{x} dx - 1.4656901;$

$\delta = 0.1272739 * x^*$

где x* - наибольший корень уравнения $x = 1.3^x$;

$E = 0.5$.

Рекомендуемое время наблюдения T=10 с, с шагом T=0.5с.

Ход работы:

1) Так как значение B представлено интегралом, для его подсчета использовалась программа QUANC8. Полученное значение равно 1.4656901, с точностью до 7-го знака.
2) Для нахождения δ необходимо было найти наибольший корень уравнения $x = 1.3^{x}$. Для нахождения корня была использована программа ZEROIN, результат – 0.99999935, с точностью до 8-го знака.
3) В дифференциальном уравнении была выполнена следующая замена:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -z_1(\delta + E\cos 2t) \end{cases}$$

Была получена система дифференциальных уравнений, которая была решена с помощью программы RKF45 на промежутке [0,10] с шагом 0.5.

Результат работы программы:

```
A = 1
B = 4.91299e-030
Sigma = 0.999999
Epsilon = 0.5

RKF45:
step     x1              x2
0.5      0.8229011912    -0.6693195462
1        0.3902676134    -0.9987891452
1.5      -0.1285452183   -1.045978727
2        -0.6314733118   -0.9364741866
2.5      -1.018888533    -0.5506555398
3        -1.120169493    0.1881816265
3.5      -0.8300333008   0.9282922002
4        -0.2623943401   1.265852641
4.5      0.3771473939    1.255640141
5        0.9675595545    1.077397063
5.5      1.405777553     0.6039233381
6        1.493599127     -0.3143112314
6.5      1.079353448     -1.295443108
7        0.2885463201    -1.760431629
7.5      -0.5937566372   -1.712993668
8        -1.391515966    -1.450006376
8.5      -1.992930711    -0.8722410595
9        -2.159360962    0.3057479214
9.5      -1.643034921    1.724558311
10       -0.5443372766   2.51664167
```

Рис.1: Решение системы дифференциальных уравнений с начальными условиями A и B

```
A = 1
B = 4.91299e-030
Sigma = 1.01
Epsilon = 0.505

RKF45:
step      x1             x2
0.5       0.8211837243   -0.6756055762
1         0.3848218732   -1.006609416
1.5       -0.1375416049  -1.052045875
2         -0.6426488211  -0.9385791617
2.5       -1.029147702   -0.543886729
3         -1.12392417    0.2073417406
3.5       -0.8222107204  0.9535904049
4         -0.2427258732  1.286543668
4.5       0.4050219242   1.267694454
5         0.9991657572   1.079720579
5.5       1.434767139    0.5894750216
6         1.509506243    -0.3522906596
6.5       1.072080147    -1.346852428
7         0.2567603072   -1.804002339
7.5       -0.6430247468  -1.739135175
8         -1.449618902   -1.45897516
8.5       -2.049794254   -0.8558461854
9         -2.198568271   0.3613026895
9.5       -1.645785684   1.810354688
10        -0.5038809945  2.597597012
```

Рис.2: Решение системы дифференциальных уравнений с увеличенными на 1% начальными условиями

```
A = 1
B = 4.91299e-030
Sigma = 0.989999
Epsilon = 0.495

RKF45:
step        x1              x2
0.5         0.8246197055    -0.6630255963
1           0.3957257244    -0.9909286013
1.5         -0.1195069972   -1.039834694
2           -0.6202082491   -0.9342533729
2.5         -1.008470362    -0.5572650304
3           -1.116178545    0.1691468331
3.5         -0.8376022927   0.9029099438
4           -0.2819229376   1.244796921
4.5         0.3491793531    1.243037541
5           0.9355597266    1.074430248
5.5         1.376062316     0.617709397
6           1.476681827     -0.2767375263
6.5         1.085573733     -1.243734375
7           0.3196433716    -1.71573187
7.5         -0.5444718775   -1.685227526
8           -1.332531113    -1.439237593
8.5         -1.934286968    -0.8868987512
9           -2.117634177    0.2512667724
9.5         -1.637593611    1.638233373
10          -0.5828554109   2.433258185
```

Рис.3: Решение системы дифференциальных уравнений с уменьшенными на 1% начальными условиями

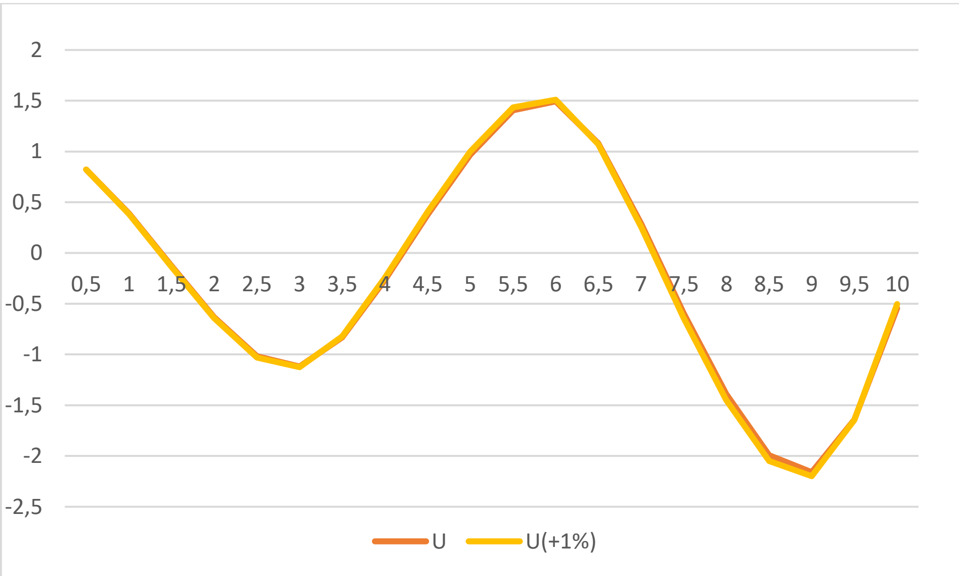

Рис.3: График U(t) и график U(t) с увеличенными исходными данными на 1%

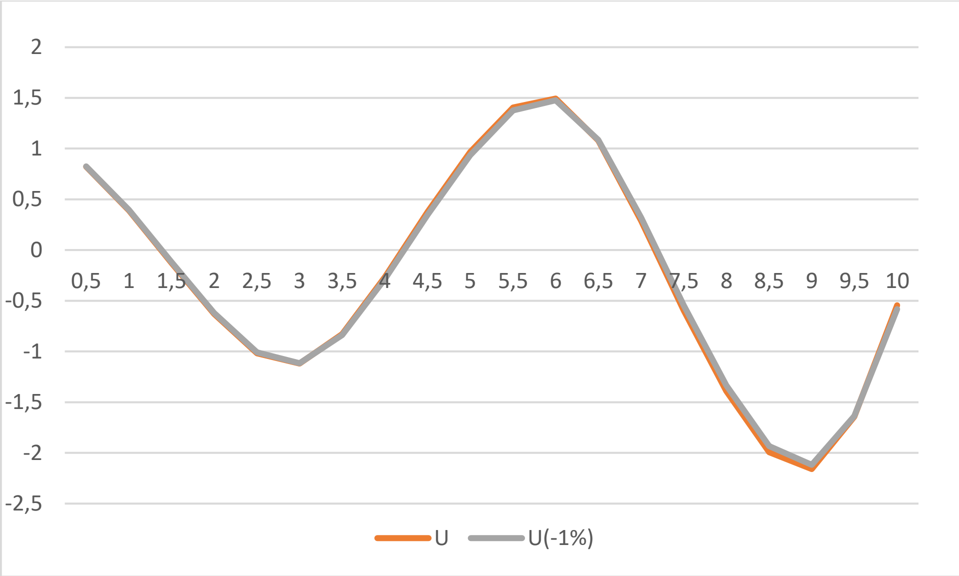

Рис.4: График U(t) и график U(t) с уменьшенными исходными данными на 1%

Вывод:

Для того чтобы приступить к расчетам системы дифференциальных уравнений, в первую очередь необходимо было посчитать значение B, используя программу QUANC8, полученный результат составил 1.46569019 (с точностью до 7-го знака). Затем для получения значения δ использовалась программа ZERION, на выходе получили - 0.99999935(с точностью до 8-го знака). Затем для удобства подсчета дифференциального уравнения второго порядка ($\frac{d^2U}{dt^2} + (\delta + Ecos2t)U = 0$), была выполнена замена, после которой была получена система дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = -z_1(\delta + Ecos2t) \end{cases}$$

Данная система решалась с использованием программы RKF45.

Исходя из полученных результатов, можно сказать, что при изменении начальных данных в большую или меньшую сторону на малую величину, получаются решения, полученные программой RKF45, искаженные примерно на такую же величину в соответствующую сторону. Из работы программы и графиков, представленных выше, видно, что при увеличении и уменьшении исходных данных на 1%, результаты также изменялись примерно на 1% в большую или меньшую сторону. Это говорит о том, что наша система является устойчивой даже к небольшим изменениям в начальных условиях. Однако в нашем случае амплитуда колебаний, описываемых функцией U(t), со временем увеличивается, что свидетельствует о неустойчивости решения уравнение Матье для заданных параметров E и δ.

Общая погрешность, то есть погрешность полученного результата, это есть сумма погрешности исходных данных и погрешности в ходе вычислений. Погрешность результата имеет порядок 10^-7. Таким образом, в полученном результате точно можно определить 7 знаков после запятой.

Приложение

Листинг 1. main.cpp

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include "rkf45.hpp"
#include "zeroin.hpp"
#include "quanc8.hpp"

const int N = 2;
const double START = 0.0;
const double END = 10.0;
const double STEP = 0.5;
const double E = 0.5;
const double A = 1.0;
double sigma;
double B;

double zeroin_function(double x)
{
    return (pow(1.3, x) - x);
}

double function(double x)
{
    return (sin(1.1 * x)) / x;
}

double calculate_sigma()
{
    double ax = 7.856;
    double bx = 7.858;
    double tol = 1.0e-10;
    double x_z = ZEROIN(ax, bx, zeroin_function, tol);
    sigma = 0.1272739 * x_z;
}

void fun(double t, double *z, double *dz)
{
    dz[0] = z[1];
    dz[1] = - z[0] * (sigma + E * cos(2 * t));
```

```
}

double calculate_B()
{
    double a = 0.0;
    double bx = M_PI / 2;
    double abserr = 1e-8;
    double relerr = 0;
    double errest;
    int nofun;
    double flag;
    double result;
    quanc8(function, a, bx, abserr, relerr, &result, &errest, &nofun,
&flag);
    B = pow((result - 1.4656901), 4);
    return B;
}

double **rkf45(int N, int points)
{
    double z[] = {A, calculate_B()};
    double t = 0.0;
    double tout;
    double relerr = 1e-8;
    double abserr = 1e-8;
    int flag;
    double work[15];
    int iwork[5];
    double **values = new double *[points];

    for (int i = 1; i <= points; i++)
    {
        values[i] = new double[N];
    }

    calculate_sigma();

    for (int i = 1; i <= END / STEP; i++)
    {
        tout = STEP * i;
        t = tout - STEP;
        flag = 1;
        RKF45(fun, N, z, &t, &tout, &relerr, &abserr, &flag, work, iwork);

        for (int j = 0; j < N; ++j)
        {
            values[i][j] = z[j];
        }
    }
    return values;
}

void print_rkf45(int N, int points)
{
    double **values = new double *[points];
    values = rkf45(N, points);

    std::cout << "RKF45: " << std::endl
              << std::left << std::setw(10) << "step"
              << std::left << std::setw(15) << "x1"
              << std::left << std::setw(15) << "x2" << std::endl;

    for (int i = 1; i <= points; i++)
```

```
    {
        std::cout << std::setw(10) << START + STEP * i;
        for (int j = 0; j < N; j++)
        {
            std::cout << std::setw(15) << values[i][j];
        }
        std::cout << std::endl;
    }
}

int main()
{
    int points = END / STEP;
    print_rkf45(N, points);
    return 0;
}
```