DD1352 - Mästarprov 2

millasvs

November 2016

1 Ultrasmart maraton

Ultrasmart Maraton-problemet bygger på ett vägnät med stigar och vägskäl som representeras som en oriktad graf med positiva kantvikter som väglängder. Målet för de som deltar i Ultrasmart Maraton är att springa så att de når varje vägskäl precis en gång och samtidigt springa så långt som möjligt. Här kan man se en likhet med Hamiltonsk stig-problemet, som bygger på att nå alla noder i en graf precis en gång. De som deltar i maratonet kan vinna ett specialpris om de springer minst hälften så långt som summan av alla vägsträckor. Frågan som ska besvaras är "Är det möjligt att vinna ett specialpris?" eller med andra ord "Är det möjligt att hitta en Hamiltonsk stig i denna graf där den sammanlagda vikten av alla kanter i stigen är minst hälften så stor som summan av alla kantvikter i grafen?"

För att visa att Ultrasmart Maraton-problemet är NP-fullständigt är det två saker som behöver visas:

1. att problemet är i NP
2. att problemet är NP-svårt

Att ett problem ligger i NP innebär att det kan verifieras på polynomisk tid. En lösning till Ultrasmart Maraton skulle vara en stig i grafen. För att verifiera att den är korrekt kollas att stigen verkligen är en stig och att alla noder i grafen ingår i stigen, samt att summan av kantvikterna i stigen är minst lika stor som hälften av summan av alla kantvikter i grafen. Denna kontroll är linjär i antal noder och kanter i grafen (man behöver gå igenom alla noder i grafen för att titta om de finns i stigen och man behöver gå igenom alla kanter i grafen för att komma fram till vad den sammanlagda vikten för grafen är).

Att ett problem är NP-svårt innebär att det är minst lika svårt som alla problem som ligger i NP. För nummer 2 kan man visa att problemet är NP-svårt genom att visa att det är minst lika svårt som ett NP-fullständigt problem, för i så fall har man bevisat att problemet är minst lika svårt som alla problem i NP eftersom det NP-fullständiga problemet ju är det. I detta fall är det NP-fullständiga problemet Hamiltonsk stig. Med andra ord ska följande visas:

$$\text{Hamiltonsk stig} \leq_p \text{Ultrasmart Maraton} \tag{1}$$

Detta kan visas genom att reducera Hamiltonsk stig till Ultrasmart Maraton-problemet. Vi säger att om det finns en svart låda som kan lösa Ultrasmart Maraton problemet så kan vi använda den svarta lådan för att lösa Hamiltonsk stig-problemet, och därmed visa att Ultrasmart Maraton problemet är "kraftfull" nog för att lösa Hamiltonsk stig. Reduktionen kan skrivas som

Hamiltonsk stig(G)
Data: Oriktad graf med kantvikter G. G består av en sammanhängande komponent, inga ensamma hörn och har högst en kant mellan två hörn.
Result: Ett 'ja' eller 'nej' på frågan om det finns en Hamiltonsk stig i grafen, det vill säga om det finns en stig i grafen som besöker varje hörn precis en gång
`// om G är en komplett graf, returnera minsta ja-instansen till Ultrasmart Maraton`
if $|e| == \frac{n(n-1)}{2}$ **then** G" $\leftarrow$ två noder med en kant mellan sig
return Ultrasmart Maraton(G")

G' $\leftarrow$ G
for *e = (u,v) in G'* **do**
  set e.weight = 1
end
while $|n| - 1 < \frac{|e|}{2}$ **do**
  for *e = (u,v) in G'* **do**
    if $d(u) \geq 3$ *and* $d(v) \geq 3$ **then** `// d(u) = gradtalet för noden u`
    remove e
  end
end
return Ultrasmart Maraton(G')

I reduktionen ovan har alla kanter som inte tagits bort från grafen fått kantvikten 1, för att underlätta saker för oss. Då vet vi att om det finns en Hamiltonsk stig så kommer den ha vikten $|n|$-1, och vi vet också att vikten av hela grafen (det vill säga summan av alla kantvikter i grafen) är $|e|$. Så Ultrasmart Maraton-frågan som lyder "finns det en Hamiltonsk stig vars sammanlagda vikt är åtminstone hälften av summan av alla kantvikter i grafen" kan omformuleras som "är $|n|$-1 minst lika stor som $\frac{|e|}{2}$?", eller om man vill vara ännu mer fåordig: "$|n| - 1 \geq \frac{|e|}{2}$?". Ultrasmart Maraton-problemet blir alltså Hamiltonsk stig-problemet + den här frågan. För att ett ja på Hamiltonsk stig-frågan ska leda till ett ja på Ultrasmart Maraton-frågan krävs därför att svaret på den frågan också är ja. Om den här frågan är nej måste vi alltså göra den till ett ja, genom att ta bort kanter.

För att visa på korrektheten i reduktionen ovan behöver två punkter visas:

1. Om det finns en Hamiltonsk stig i G så leder det till att det finns en Hamiltonsk stig hs i G', samt att $|n| - 1 \geq \frac{|e|}{2}$, där $|n|$ betecknar antalet noder och $|e|$ betecknar antalet kanter i G'.

2. Vice versa, d.v.s. om det finns en Hamiltonsk stig hs i G', samt att $|n| - 1 \geq \frac{|e|}{2}$ i G', så leder det till att det finns en Hamiltonsk stig i G.

Vi börjar med nummer 1. Om det finns en Hamiltonsk stig i G och vi har att $|n| - 1 \geq \frac{|e|}{2}$ så sätter vi alla kantvikter i G till 1 och skickar direkt vidare grafen till Utrasmart Maraton-problemet, som returnerar 'ja' eftersom båda dess villkor är uppfyllda. Om vi har en Hamiltonsk stig i G och vi har att $|n| - 1 < \frac{|e|}{2}$, så att en ja-instans på Hamiltonsk stig-problemet blir en nej-instans av Ultrasmart Maraton-problemet, så går vi igenom alla kanter och tar bort de vars bägge ändnoder har en kardinalitet som är större än eller lika med 3, ända tills vi har att $|n| - 1 = \frac{|e|}{2}$. Nu vill jag hävda att om vi hade en Hamiltonsk stig i den grafen så kommer inte denna stig att försvinna, för en Hamiltonsk stig kräver bara att alla noder har gradtal två, förutom ändnoderna som bara behöver en utgående kant. D.v.s. det enda som krävs (förutsatt att man har en graf med bara en sammanhängande komponent, och inte mer än en kant mellan två noder samt att inga noder har loopar) är att $|e| = 2n - 2$, vilket är precis vad det kommer bli. Alla de kanter man tar bort klarar sig den hamiltonska stigen utan.

När det kommer till nummer 2 så är det ganska självklart att det stämmer. Eftersom G' är en delmängd av G (det vill säga G' är G fast med färre eller lika många kanter) så kommer G alltid ha en hamiltonsk stig om G' har det.