DD1352 - Mästarprov 2

millasvs

November 2016

1 Ultrasmart maraton

Ultrasmart Maraton-problemet bygger på ett vägnät med stigar och vägskäl som representeras som en oriktad graf med positiva kantvikter som väglängder. Målet för de som deltar i Ultrasmart Maraton är att springa så att de når varje vägskäl precis en gång och samtidigt springa så långt som möjligt. Här kan man se en likhet med Hamiltonsk stig-problemet, som bygger på att nå alla noder i en graf precis en gång. De som deltar i maratonet kan vinna ett specialpris om de springer minst hälften så långt som summan av alla vägsträckor. Frågan som ska besvaras är "Är det möjligt att vinna ett specialpris?" eller med andra ord "Är det möjligt att hitta en Hamiltonsk stig i denna graf där den sammanlagda vikten av alla kanter i stigen är minst hälften så stor som summan av alla kantvikter i grafen?"

För att visa att Ultrasmart Maraton-problemet är NP-fullständigt är det två saker som behöver visas:

1. att problemet är i NP
2. att problemet är NP-svårt

Att ett problem ligger i NP innebär att det kan verifieras på polynomisk tid. En lösning till Ultrasmart Maraton skulle vara en stig i grafen. För att verifiera att den är korrekt kollas att stigen verkligen är en stig och att alla noder i grafen ingår i stigen, samt att summan av kantvikterna i stigen är minst lika stor som hälften av summan av alla kantvikter i grafen. Denna kontroll är linjär i antal noder och kanter i grafen (man behöver gå igenom alla noder i grafen för att titta om de finns i stigen och man behöver gå igenom alla kanter i grafen för att komma fram till vad den sammanlagda vikten för grafen är).

Att ett problem är NP-svårt innebär att det är minst lika svårt som alla problem som ligger i NP. För nummer 2 kan man visa att problemet är NP-svårt genom att visa att det är minst lika svårt som ett NP-fullständigt problem, för i så fall har man bevisat att problemet är minst lika svårt som alla problem i NP eftersom det NP-fullständiga problemet ju är det. I detta fall är det NP-fullständiga problemet Hamiltonsk stig. Med andra ord ska följande visas:

$$\text{Hamiltonsk stig} \leq_p \text{Ultrasmart Maraton} \tag{1}$$

Detta kan visas genom att reducera Hamiltonsk stig till Ultrasmart Maraton-problemet. Vi säger att om det finns en svart låda som kan lösa Ultrasmart Maraton problemet så kan vi använda den svarta lådan för att lösa Hamiltonsk stig-problemet, och därmed visa att Ultrasmart Maraton problemet är "kraftfull" nog för att lösa Hamiltonsk stig. Reduktionen kan skrivas som

Hamiltonsk stig(G)
Data: Oriktad graf med kantvikter G. G består av en sammanhängande komponent, inga ensamma hörn och har högst en kant mellan två hörn.
Result: Ett 'ja' eller 'nej' på frågan om det finns en Hamiltonsk stig i grafen, det vill säga om det finns en stig i grafen som besöker varje hörn precis en gång
`// om G är en komplett graf, returnera minsta ja-instansen till Ultrasmart Maraton`
G" $\leftarrow$ två noder med en kant med kantvikt 0 mellan sig
return Ultrasmart Maraton(G")
G' $\leftarrow$ G
for *kant e = (u,v) in G'* **do**
  set e.weight = 0
end
return Ultrasmart Maraton(G')

I reduktionen ovan har alla kanter fått kantvikten 0. Detta eftersom kantvikterna egentligen inte spelar någon roll för Hamiltonsk stig-problemet, så därför kan vi lika gärna sätta kantvikterna på detta sätt för att underlätta för oss.

Då vet vi att om det finns en Hamiltonsk stig så kommer den ha vikten 0, och vi vet också att vikten av hela grafen (det vill säga summan av alla kantvikter i grafen) är 0. Så Ultrasmart Maraton-frågan som lyder "finns det en Hamiltonsk stig vars sammanlagda vikt är åtminstone hälften av summan av alla kantvikter i grafen" kan omformuleras som "finns det en Hamiltonsk stig vars sammanlagda vikt 0 minst hälften stor som grafens vikt 0?" Eftersom "$0 \geq \frac{0}{2} = 0$?" är en fråga som alltid returnerar 'true' eller i den här instansen 'ja', så kommer då Ultrasmart Maraton-problemet här bara leta efter en Hamiltonsk stig.

För att visa på korrektheten i reduktionen ovan behöver följande visas:

1. En ja-instans av Hamiltonsk stig $\implies$ en ja-instans av Ultrasmart Maraton.

2. En nej-instans av Hamiltonsk stig $\implies$ en nej-instans av Ultrasmart Maraton.

(Vi hade också på nummer två kunnat visa att en ja-instans av Ultrasmart Maraton leder till en ja-instans av Hamiltonsk stig, dessa två påståenden är ekvivalenta).

En ja-instans av Hamiltonsk stig kommer leda till en ja-instans av Ultrasmart Maraton eftersom Ultrasmart Maraton kommer behandla grafen G' där alla kantvikter är 0 som Hamiltonsk stig-problemet and "$0 \geq 0$?". Vid en ja-instans av Hamiltonsk stig-problemet kommer alltså Utrasmart Maraton returnera 'ja' AND 'ja' == 'ja'. Och när det kommer till en nej-instans av Hamiltonsk stig så kommer Ultrasmart Maraton returnera 'nej' AND 'ja' == 'nej'. Det kan tyckas konstigt att sätta alla kantvikter till 0 om grafen ska representera ett maraton (då är ju sträckorna icke-existerande) men jag vill hävda att eftersom Ultrasmart Maraton problemet tar in en graf med kantvikter som är positiva heltal och finner en Hamiltonsk stig samt tittar om längden av stigen är minst lika lång som halva längden av hela grafen kommer acceptera en sådan här graf eftersom 0 är ett positivt heltal och att finna en Hamiltonsk stig i en graf egentligen inte kräver någon vikt på kanterna.