

PEL208 — Relatório Atividade 1

Implementação do Método dos Mínimos Quadrados

Miller Horvath

Mestrando em Engenharia Elétrica (Processamento de Sinais e Imagens)

Centro Universitário FEI, São Bernardo do Campo, SP, Brasil

16 de outubro de 2018

1 Introdução

Este trabalho apresenta o relatório do desenvolvimento da primeira atividade avaliativa referente à disciplina PEL208, intitulada Tópicos Especiais em Aprendizagem, apresentada pelo Prof. Dr. Reinaldo Augusto da Costa Bianchi.

O objetivo desta atividade é implementar o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ), conforme abordado em sala de aula. Para isso, a linguagem de programação *C++* foi adotada. A atividade permite a utilização de bibliotecas que proveem operações de álgebra linear para realizar cálculos matriciais básicos, como multiplicação e transposição de matrizes. Entretanto, um dos requisitos da atividade é a implementação do cálculo da matriz inversa, necessário para o MMQ.

2 Conceitos Fundamentais

2.1 Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

Apesar de Carl Friedrich Gauss reivindicar que já detinha o conhecimento deste método desde 1795, o primeiro registro de publicação do MMQ é apresentado em ([LEGENDRE, 1805](#)). Segundo [Wikipedia \(2018b\)](#), o MMQ é um método linear popularmente utilizado para ajuste de curva em problemas estatísticos de regressão.

Dado um vetor de entrada (ou de características) $\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, um modelo de regressão linear estima o valor de uma variável de saída \hat{y} (ou variável objetivo) através de uma curva modelo, representada pela seguinte equação:

$$\hat{y} = \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \quad (1)$$

Sendo α o termo independente e $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ o vetor de coeficientes da curva modelo em questão.

Convenientemente, adiciona-se o valor 1 no início do vetor de características \vec{x} e valor de α (ou β_0) no início do vetor de coeficientes β para permitir a representação vetorial da Equação 1, dada pela seguinte equação:

$$\hat{y} = \vec{x}\beta^T \quad (2)$$

A partir de um conjunto de observações $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, representados pelo conjunto de vetores de características $X = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\}$, o MMQ calcula os coeficientes β da curva modelo que melhor se ajusta ao conjunto de dados. Este calculo é realizado pela minimização da soma dos resíduos ao quadrado ($S(\beta)$) entre as observações Y e os valores estimados \hat{Y} , calculados através da Equação 2. A função $S(\beta)$ é dada pela equação:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^m (y_i - \vec{x}_i\beta^T)^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3)$$

Similarmente, a Equação 3 pode ser representada em sua forma matricial:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^m (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \quad (4)$$

Sendo Y uma matriz $m \times 1$, X uma matriz $m \times n$ e β um vetor (\mathbb{R}^n) representado por uma matriz $n \times 1$.

Em seguida, a minimização da Equação 4 é definida através da sua derivada parcial em relação a β igualada a zero, conforme a seguinte resolução de equações:

$$\begin{aligned} \min S(\beta) &\equiv \frac{\delta S}{\delta \beta} = 0 \\ \frac{\delta S}{\delta \beta} &= -2X^T(Y - X\beta) = 0 \\ -2X^TY + 2X^TX\beta &= 0 \\ 2X^TX\beta &= 2X^TY \equiv X^TX\beta = X^TY \end{aligned}$$

Sendo assim, caso X^TX não seja uma matriz singular, o conjunto β que minimiza $S(\beta)$ é definido pela Equação 5.

$$\beta = (X^TX)^{-1}X^TY \quad (5)$$

O MMQ, assim como outros métodos lineares, também podem ser utilizados para aproximar curvas polinomiais. Por exemplo, para utilizar o MMQ para ajustar uma curva quadrática com n características, os vetores \vec{x} pertencentes ao conjunto X devem ter o seguinte formato:

$$\vec{x} = [1, x_1, x_1^2, x_2, x_2^2, \dots, x_n, x_n^2] \quad (6)$$

Indivíduo	Altura (polegadas)	Tamanho do Calçado (US)
1	69	9.5
2	67	8.5
3	71	11.5
4	65	10.5
5	72	11
6	68	7.5
7	74	12
8	65	7
9	66	7.5
10	72	13

Tabela 1 – Tabela que possui a altura (em polegadas) e o tamanho do calçado (padrão americano) de 10 indivíduos.

2.1.1 Exemplo de Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados

Dado um conjunto de dados que relaciona a altura de um grupo de indivíduos com o tamanho do calçado que eles vestem, representada na Tabela 1, pode-se aplicar o MMQ para definir um modelo de regressão linear que estime o tamanho do calçado de uma pessoa dada a sua altura da seguinte maneira:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 69 \\ 1 & 67 \\ 1 & 71 \\ 1 & 65 \\ 1 & 72 \\ 1 & 68 \\ 1 & 74 \\ 1 & 65 \\ 1 & 66 \\ 1 & 72 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 9.5 \\ 8.5 \\ 11.5 \\ 10.5 \\ 11 \\ 7.5 \\ 12 \\ 7 \\ 7.5 \\ 13 \end{bmatrix} \quad X^T X = \begin{bmatrix} 10 & 689 \\ 689 & 47565 \end{bmatrix} \quad X^T Y = \begin{bmatrix} 98 \\ 6800 \end{bmatrix}$$

Conforme a Equação 5:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 10 & 689 \\ 689 & 47565 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 98 \\ 6800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51.2 & -0.7417 \\ -0.7417 & 0.0108 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 98 \\ 6800 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25.6512 \\ 0.5145 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Sendo \hat{y} a curva modelo do sistema de regressão linear, definida por $\hat{y} = \beta_1 x + \beta_0$, foi possível determinar através do MMQ que os coeficientes β que melhor ajustam a curva \hat{y} às observações apresentadas na Tabela 1 são: $\beta_0 = -25.6512$ e $\beta_1 = 0.5145$. Portanto a curva resultante da regressão linear é definida por $\hat{y} = 0.5145x - 25.6512$, ilustrada na Figura 1.

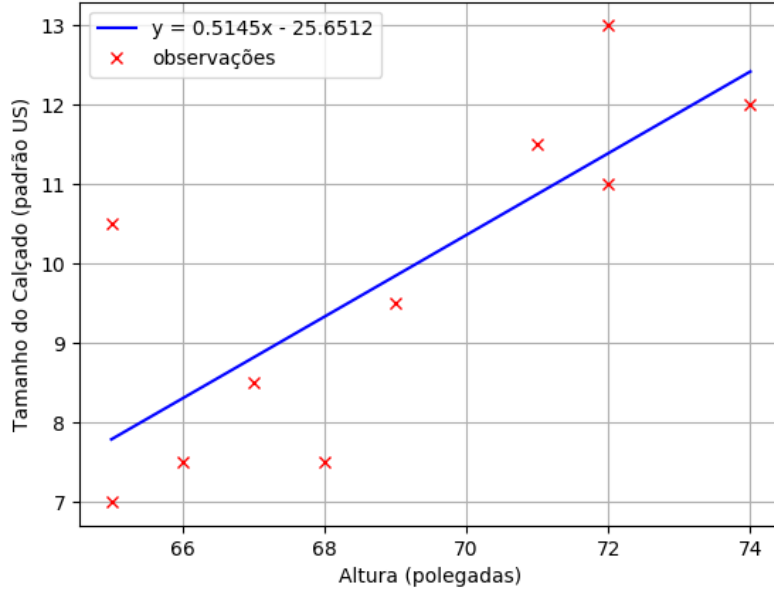


Figura 1 – Ilustração da curva y ajustada ao conjunto de observações

2.2 Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (MMQP)

Em estatística, valores atípicos (do inglês *outliers*) são valores consideravelmente distantes dos demais dados em uma distribuição (WIKIPEDIA, 2018d). A qualidade do ajuste de curva calculado através MMQ é afetada negativamente caso o conjunto de dados de entrada tenha muitos valores atípicos, pois a influência destes valores no ajuste de curva faz com que a mesma se distancie das demais observações.

O MMQP visa diminuir o impacto de valores atípicos atribuindo um peso para cada uma das observações, de modo a valorizar valores mais próximos da distribuição de dados. Caso o peso seja o mesmo para todas as observações, o resultado do MMQP será o mesmo que o MMQ. Sendo assim, o MMQP pode ser definido como uma generalização do MMQ, dado pela seguinte equação:

$$\beta = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (8)$$

Considerando um conjunto com m observações, W é uma matriz diagonal quadrada ($m \times m$), sendo que cada valor $W_{i,i}$ em sua diagonal principal é equivalente ao peso da i -ésima observação.

Quando os *outliers* do conjunto de dados de entrada são conhecidos, pode-se aplicar o ponderamento seletivo, onde o peso de cada observação é definido manualmente. Por exemplo, definindo peso 0 aos *outliers* e peso 1 aos demais. Em contrapartida, não é recomendável remover observações, mesmo as consideradas *outliers*, em aplicações reais, pois elas podem representar casos específicos no contexto do problema. Outra abordagem

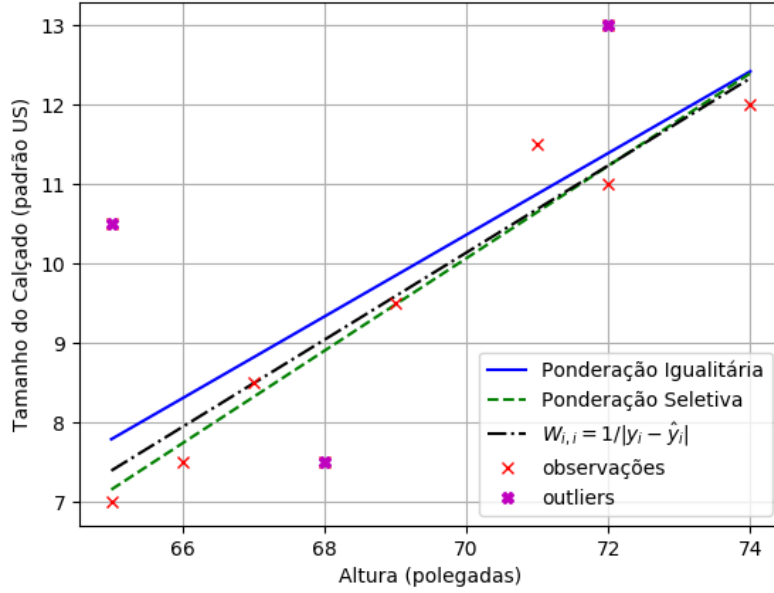


Figura 2 – Ilustração que compara curvas ajustadas através do MMQP utilizando diferentes critérios de ponderação.

para o MMQP calcula os pesos de forma inversamente proporcional em relação variância dos dados, através da equação:

$$W_{i,i} = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (9)$$

Outra alternativa para o cálculo dos pesos baseia-se no erro absoluto entre a variável objetivo observada e a sua estimativa para cada observação através do MMQ tradicional, através da seguinte Equação 10:

$$W_{i,i} = \frac{1}{|y_i - \hat{y}_i|} \quad (10)$$

A Figura 2 ilustra a diferença entre o MMQP utilizando pesos iguais para todas as observações (ponderação igualitária), peso 0 aos *outliers* e peso 1 aos demais (ponderação seletiva), e pesos calculados através da Equação 10. Sendo que a Figura 2 foi construída utilizando os mesmos dados do exemplo apresentado na Seção 2.1.1, mas utilizando a Equação 8 para o ajuste de curva.

2.3 Inversão de Matrizes

Um dos requisitos desta atividade é a implementação das funções de inversão de matrizes. Sendo assim, dois métodos foram implementados: (1) cálculo da matriz inversa através Eliminação de Gauss-Jordan (WIKIPEDIA, 2018a), e (2) cálculo da matriz pseudo-inversa através da inversa de Moore-Penrose (WIKIPEDIA, 2018c).

Conforme abordado na Seção 2.1, a componente $X^T X$ da Equação 5 deve ser uma matriz não-singular para que a sua inversa possa ser calculada, sendo o método de eliminação de Gauss-Jordan adequado nesse contexto.

No entanto, a pseudo-inversa de uma matriz é uma generalização de sua inversa, sendo frequentemente utilizada no método dos mínimos quadrados para solução de sistemas de equação lineares com múltiplas soluções, além de poder ser aplicada também em matrizes singulares (WIKIPEDIA, 2018c). A inversa de Moore-Penrose é o tipo mais famoso de pseudo-inversa. Neste trabalho, a inversa de Moore-Penrose é calculada através da decomposição em valores singulares.

2.3.1 Eliminação de Gauss-Jordan

A eliminação de Gauss-Jordan é uma variação da eliminação de Gauss utilizada para calcular a inversa de uma matriz não-singular. Primeiramente, dada uma matriz quadrada $A_{n \times n}$, deve-se aumentar a matriz A com a matriz identidade de mesma dimensão ($[A|I]$), da seguinte maneira:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & a_{2,n-1} & a_{2,n} & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (11)$$

Em seguida, aplica-se o escalonamento da matriz $[A|I]$, através de operações elementares em linha, para reduzi-la para a matriz $[I|B]$, resultando na seguinte matriz:

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & b_{2,1} & b_{2,2} & \ddots & b_{2,n-1} & b_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \ddots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n-1} & b_{n,n} \end{array} \right] \quad (12)$$

Dadas as seguintes operações elementares em linha:

- Permutação entre linhas;
- Multiplicação de linha por uma constante diferente de 0 (zero); e
- Somar uma linha à outra multiplicada por uma constante diferente de 0 (zero)

Caso seja possível reduzir $[A|I]$ à $[I|B]$, então $AB = I$ e $B = A^{-1}$.

Segue um exemplo da eliminação de Gauss-Jordan para uma matriz $A_{3 \times 3}$:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} & [A|I] &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
L_3 + L_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow L_3 - 4L_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} & \Rightarrow L_1 + 2L_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & | & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow L_1 - 3L_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -10 & 2 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} & = [I|B] & \quad (13) \\
&\quad \therefore B = A^{-1}
\end{aligned}$$

2.3.2 Decomposição em Valores Singulares

Segundo ([WIKIPEDIA, 2018e](#)), a decomposição em valores singulares é a fatoração de uma matriz real ou complexa, com diversas aplicações importantes em processamento de sinais e estatística. A decomposição em valores singulares de uma matriz $M_{m \times n}$ dada por:

$$M = U \Sigma V^* \quad (14)$$

Onde U é uma matriz unitária $m \times m$, Σ é uma matriz retangular diagonal $m \times n$ com números reais não-negativos na diagonal, e V^* (a conjugada transposta de V) é uma matriz unitária $n \times n$. Os valores $\Sigma_{i,i}$ são os chamados valores singulares de M . As m colunas de U e as n colunas de V são os chamados vetores singulares à esquerda e vetores singulares à direita de M , respetivamente.

2.3.3 Inversa de Moore-Penrose (Pseudo-Inversa)

Um dos métodos de calcular a inversa de Moore-Penrose de uma matriz A é através da decomposição em valores singulares ([WIKIPEDIA, 2018c](#)). Dadas as matrizes resultantes da decomposição em valores singulares de A , vide Equação 14, a matriz A^+ (pseudo-inversa de A) é dada pela seguinte equação:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^* \quad (15)$$

Sendo Σ^+ a pseudo-inversa de Σ calculada em duas etapas:

1. Para todo $\Sigma_{i,i} \neq 0$ na diagonal principal da matriz Σ , calcula-se $\Sigma_{i,i} = \Sigma_{i,i}^{-1}$, resultando na matriz $\hat{\Sigma}$;
2. $\Sigma^+ = \hat{\Sigma}^T$

3 Metodologia

A implementação da atividade foi desenvolvida na linguagem *C++*, utilizando o software Visual Studio 2017. Para apoiar os cálculos algébricos, foram utilizados os seguintes recursos da biblioteca *Eigen* (GUENNEBAUD; JACOB et al., 2010):

- Classe *MatrixXd*, sendo uma estrutura de dados para matrizes multidimensionais compostas por valores do tipo *double*;
- Classe *VectorXd*, sendo uma estrutura de dados para vetores multidimensionais compostos por valores do tipo *double*;
- Classe *ArrayXXd* usada para gerar matrizes nulas multidimensional compostas por valores do tipo *double*;
- Sobrecarga de operadores para soma, subtração; divisão e multiplicação de vetores e matrizes;
- Métodos de transposição de matrizes;
- Classe *JacobiSVD*, utilizada para aplicação da decomposição em valores singulares de matrizes.

A função de inversão de matrizes foi implementada com base na Seção 2.3.1, no vídeo em (SLCMATH@PC, 2013) e no algoritmo em (BHOJASIA, 2014).

A função de cálculo da pseudo-inversa de matrizes foi implementada com base na Seções 2.3.2 e 2.3.3 e no vídeo em (MACHINELEARNINGGOD, 2017).

4 Experimentos

O código desenvolvido neste trabalho está disponibilizado em (HORVATH, 2018). Para testar e analisar a implementação desenvolvida, foram utilizadas 3 bases de dados, que serão descritas nas subseções seguintes. Em cada uma das bases de dados, foi utilizado o MMQ e o MMQP, descritos respectivamente nas Seções 2.1 e 2.2, para ajustar os dados, tanto à uma reta, quanto à um polinômio de grau 2.

4.1 Bases de Dados

4.1.1 Alps Water

Possuí informações sobre o ponto de ebulição da água sob efeito de diferentes pressões atmosféricas. Esta base de dados possui 17 observações e 2 características, que são:

- Temperatura — temperatura do ponto de ebulição da água medida em graus Fahrenheit (F); e
- Pressão — pressão atmosférica medida em polegadas de mercúrio (”Hg).

Sendo que, nesta atividade, a pressão foi definida como a variável objetivo desta base de dados

4.1.2 Livros x Notas

Possuí informações sobre o desempenho de alunos em uma aula de estatística. Esta base de dados possui 40 observações e 3 características, que são:

- Livros — quantidade de livros lidos pelos alunos;
- Assiduidade — quantidade de aulas em que os alunos estavam presentes; e
- Nota — nota final dos alunos no curso.

Sendo que, nesta atividade, a nota foi definida como a variável objetivo desta base de dados

4.1.3 US Cesus Dataset

Possuí informações sobre o registro de contagem populacional nos Estados Unidos a cada 10 anos. Esta base de dados possui 11 observações e 2 características, que são:

- Ano — ano em que a contagem foi realizada; e
- População — numero de habitantes registrados.

Sendo que, nesta atividade, a população foi definida como a variável objetivo desta base de dados

5 Resultados

Nesta seção, são apresentados os gráficos obtidos através do desenvolvimento experimental descrito na Seção 4.

5.1 Alps Water

A Figura 3 mostra que o MMQP não apresenta grandes diferenças em relação ao MMQ tradicional. Esta constatação sugere que a base de dados *Alps Water* não possui muitos *outliers*. Além disso, os dados parecem ser adequadamente ajustados por uma reta.

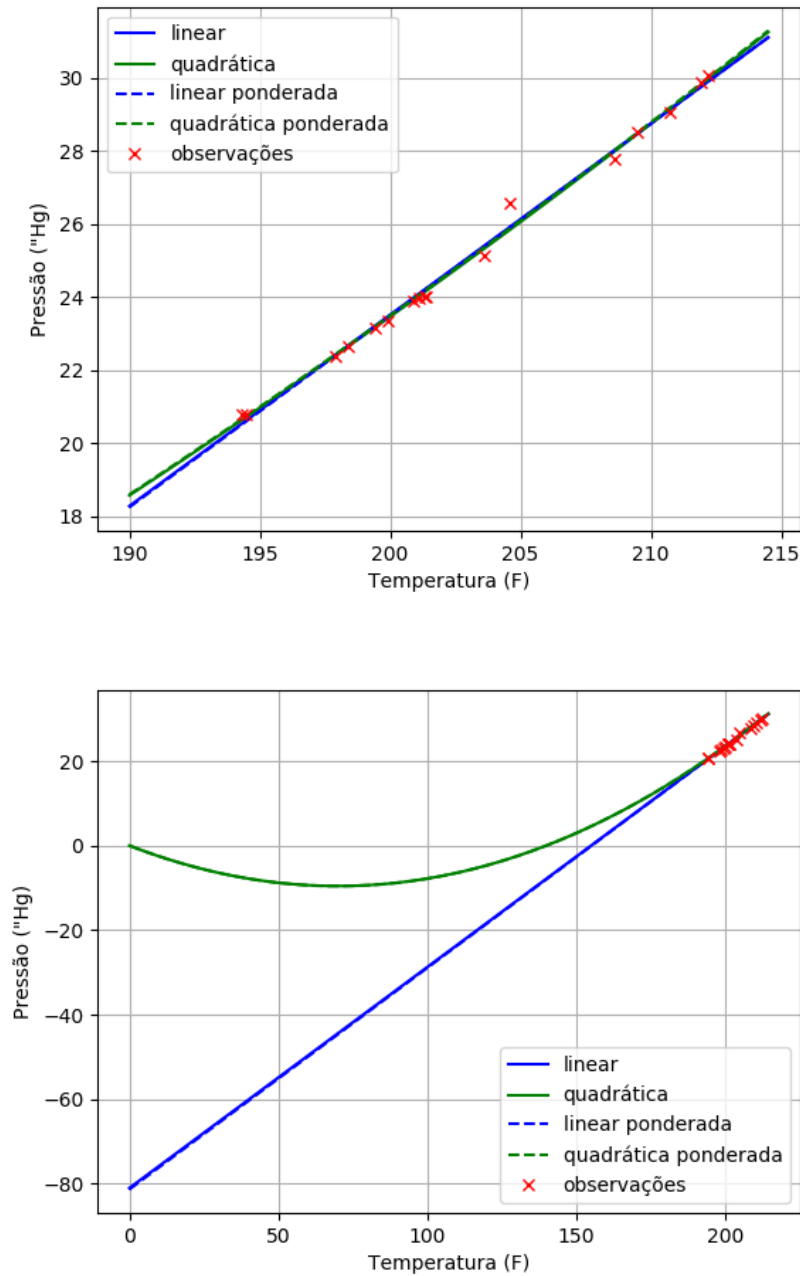


Figura 3 – Ilustração das curvas ajustadas à base de dados *Alps Water* (Seção 4.1.1), conforme descrito na Seção 4

5.2 Livros x Notas

A Figura 4 mostra que há uma grande diferença entre o MMQP e o MMQ tradicional para ambas as curvas lineares e quadráticas. Esta constatação sugere que a base de dados *Livros x Notas* possui muitos *outliers*. Além disso, boa parte das observações parecem estar bastante distantes em relação as curvas ajustadas, sugerindo que polinômios de maior grau devem ser mais adequados para este conjunto de dados.

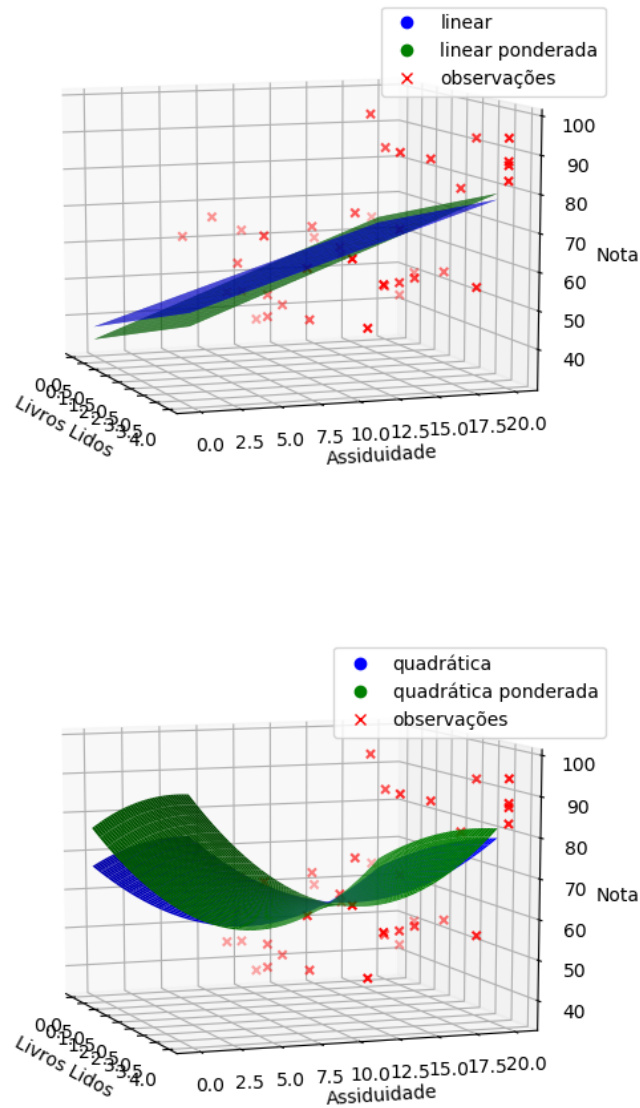


Figura 4 – Ilustração das curvas ajustadas à base de dados *Livros x Notas* (Seção 4.1.1), conforme descrito na Seção 4

5.3 US Census Dataset

Similarmente aos resultados apresentados na Seção 5.1, a Figura 5 sugere que a base de dados *US Census Dataset* não possui muitos *outliers*, pois o MMQP não apresenta grandes diferenças em relação ao MMQ tradicional. Além disso, os dados parecem ser adequadamente ajustados por uma reta.

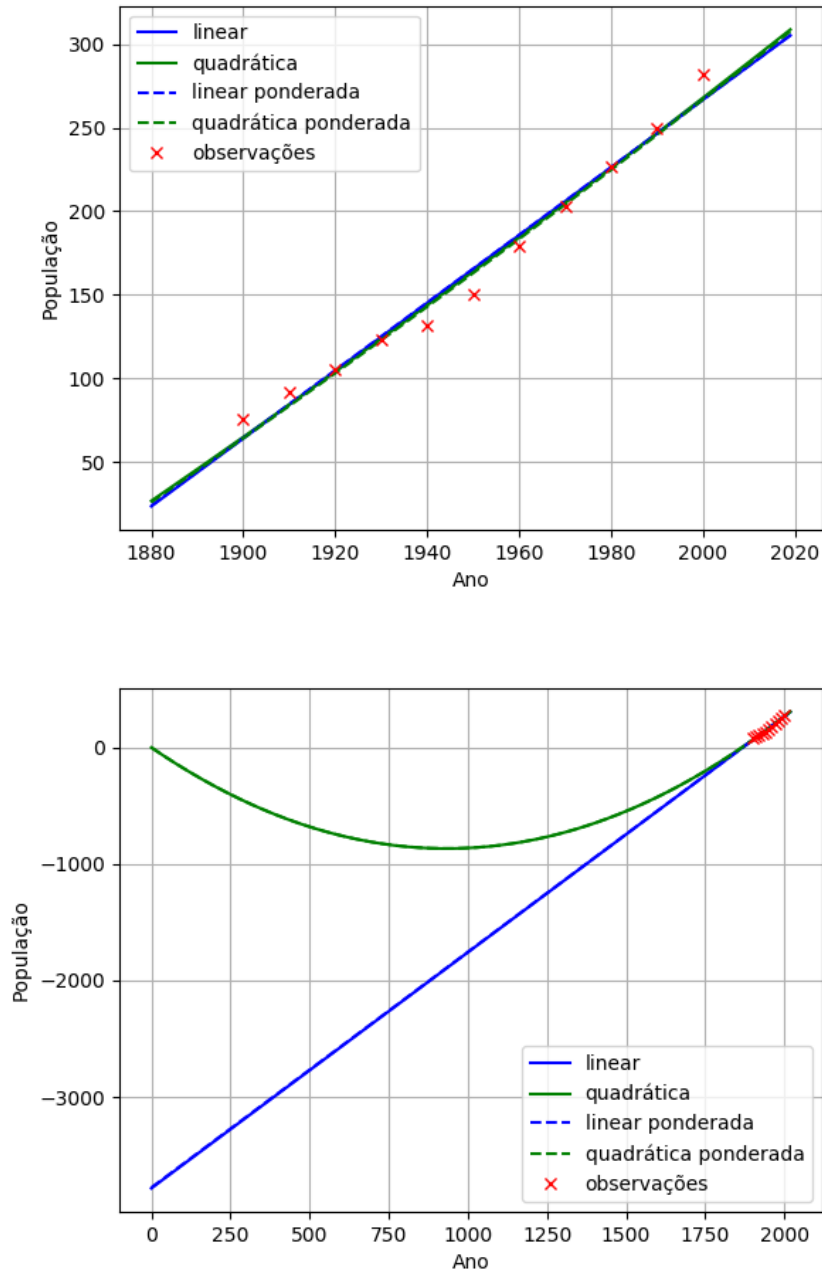


Figura 5 – Ilustração das curvas ajustadas à base de dados *Alps Water* (Seção 4.1.1), conforme descrito na Seção 4

Os resultados apresentados na Figura 5 foram calculados utilizando a matriz pseudo-inversa. Exclusivamente para esta base de dados, os resultados obtidos com o uso da pseudo-inversa são consideravelmente discrepantes aos obtidos com o uso da matriz inversa, ilustrados na Figura 6.

Essa discrepância, observada pela diferença entre as Figuras 5 e 6, pode estar relacionada ao número limitado de observações contidas nesta base de dados.

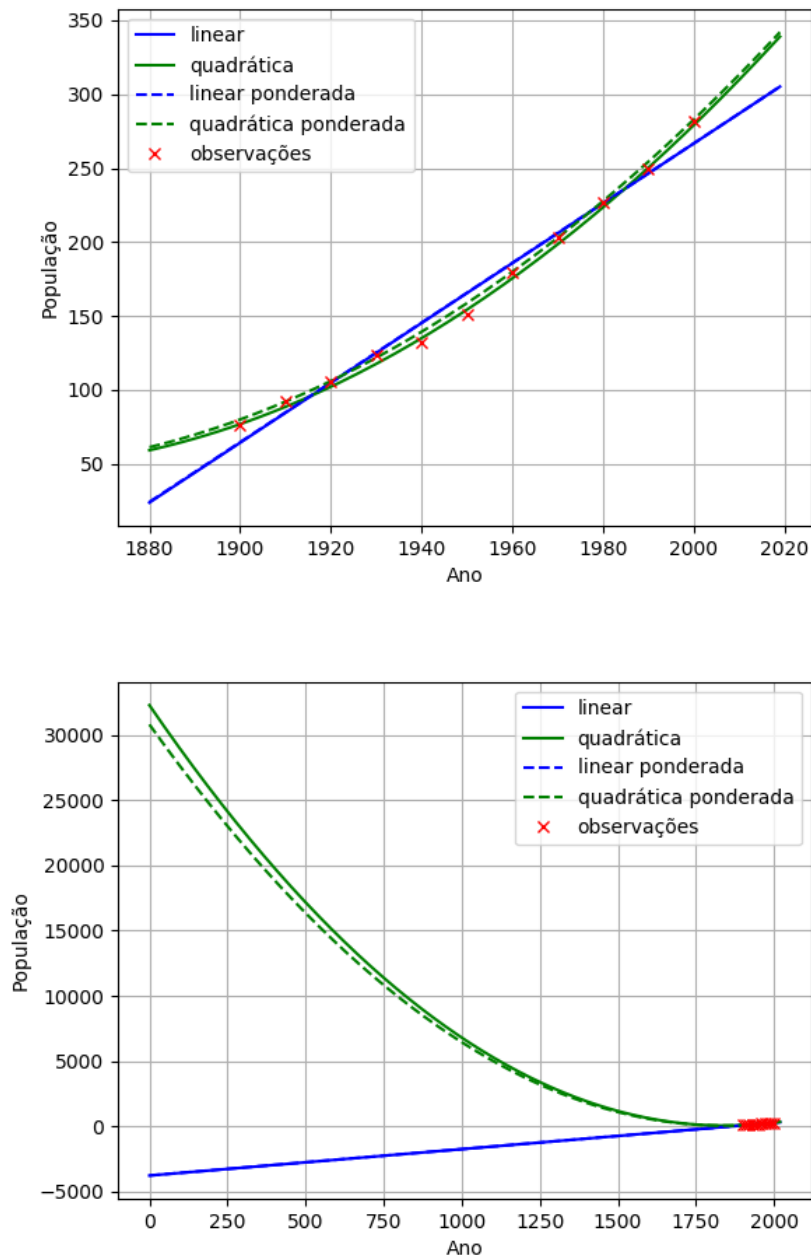


Figura 6 – Ilustração das curvas ajustadas à base de dados *Alps Water* (Seção 4.1.1), conforme descrito na Seção 4

6 Conclusão

Este trabalho visa relatar a implementação do método dos mínimos quadrados, utilizando *C++* como linguagem de programação, como tarefa do curso PEL208 do programa de pós-graduação em engenharia elétrica do Centro Universitário FEI. O fato dos resultados, apresentados na Seção 5, serem condizentes com os apresentados em aula sugere que a implementação foi adequada.

Foi possível avaliar o impacto da ponderação das observações no ajuste de curvas nas diferentes bases de dados adotadas. Além disso, foi possível constatar um caso específico onde a utilização da matriz pseudo-inversa produz resultados bastante divergentes aos produzidos com a utilização da matriz inversa.

Referências

- BHOJASIA, M. *C++ Program to Implement Gauss Jordan Elimination — Sanfoundry*. 2014. <<https://www.sanfoundry.com/cpp-program-implement-gauss-jordan-elimination/>>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado na página 8.
- GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. et al. *Eigen v3*. 2010. [Http://eigen.tuxfamily.org](http://eigen.tuxfamily.org). Citado na página 8.
- HORVATH, M. *Least Squares in C++*. figshare, 2018. Disponível em: <https://figshare.com/articles/PEL208_FEI-LeastSquares/7210172/2>. Citado na página 8.
- LEGENDRE, A. M. *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. [S.l.]: F. Didot, 1805. Citado na página 1.
- MACHINELEARNINGGOD. *2.9 The Moore-Penrose Pseudoinverse — YouTube*. 2017. <<https://www.youtube.com/watch?v=jYw0OIeRnQE>>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado na página 8.
- SLCMATH@PC. *Matrix Inverse - Algorithm — YouTube*. 2013. <https://www.youtube.com/watch?v=bt52Y_1crAo/>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado na página 8.
- WIKIPEDIA. *Gaussian elimination — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2018. <https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination/>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado na página 5.
- WIKIPEDIA. *Least squares — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2018. <https://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares/>. [Online; accessed 14-October-2018]. Citado na página 1.
- WIKIPEDIA. *Moore-Penrose inverse — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2018. <https://en.wikipedia.org/wiki/Moore-Penrose_inverse/>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado 3 vezes nas páginas 5, 6 e 7.

WIKIPEDIA. *Outlier* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2018. <<https://en.wikipedia.org/wiki/Outlier/>>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado na página 4.

WIKIPEDIA. *Singular value decomposition* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2018. <https://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition>. [Online; accessed 15-October-2018]. Citado na página 7.