Oppgaver til kapittel 3

3.1

T = sant, F = usant

(a)

P	$\neg\neg P \rightarrow P$
T	T
F	T

(b)

P	Q	$P \vee Q$	$P \rightarrow (Q \vee P)$	$\neg(P \rightarrow (Q \vee P))$
F	F	T	T	F
F	T	T	T	F
T	F	T	T	F
T	T	F	T	F

(c)

P	Q	R	$Q \vee R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R) \rightarrow P \vee (Q \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	T

3.2

P	Q	R	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
F	F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

(d) er ekvivalent med (a), dette kan deduseres ved å ta formelen til (d) og bruke DeMorgans lov og lemmaet nedenfor.

Lemma: $\neg A \vee B = A \rightarrow B$ (dette kan lett bevivses ved å se på sannhetstabellene til de respektive påstandene)

$$\text{(d)} = \neg\big(P \wedge (\neg Q \vee \neg R)\big) = \neg\big(P \wedge \neg(Q \wedge R)\big) = \big(\neg P \vee (Q \wedge R)\big) = (P \rightarrow (Q \wedge R)) = \text{(a)}$$

(b) er ekvivalent med (e), dette kan dedusered ved å ta formelen til (b) og bruke DeMorgans lov og lemmaet ovenfor.

$$\text{(b)} = \big((\neg P \vee \neg Q) \vee R\big) = (\neg(P \wedge Q) \vee R) = \big((P \wedge Q) \rightarrow R\big) = \text{(e)}$$

3.3

$((\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R)$, fin tre ekvivalente uttrykk

Dette kan veldig lett gjøres ved å bruke DeMorgans lov gjentatte ganger

1. $(\neg(P \lor Q) \lor \neg R)$
2. $\neg((P \lor Q) \land R)$
3. $\neg((P \land R) \lor (Q \land R))$

3.4

(a) $P \lor R \lor Q \to R \lor Q$

Denne påstanden er usann hvis og bare hvis P er sann og både Q og R er usann. Dette samsvarer med F.

(b) $\neg(P \land \neg Q \land \neg R)$

Eneste tilfelle der F er usann er når P er sann OG Q er usann OG R er usann, ergo er det motsatte av dette alle tilfellene der F er sann.

Oppgaver til kapittel 4

4.1

(a) $P \to Q$ er usann hvis og bare hvis P er sann og Q er usann. $Q \land P$ er usann hvis enten Q eller P er usann, og sann hvis begge verdiene er sanne. Ergo vil den første påstanden være sann i alle tilfellene der den andre påstanden er sann, så den andre påstanden medfører den første. Hvis Q og P er begge usanne, vil den første påstanden være sann og den andre usann, ergo er de ikke ekvivalente påstander.

(b) Den andre påstanden er sann selv hvis både P og Q er usann. Denne påstenden fungerer derfor som en logisk ELLER mellom P og Q. ELLER medfører men er ikke ekvivalent med OG. $((P \to Q) \land (Q \to P)) \leftrightarrow P \lor Q, P \lor Q \to Q \land P$

4.2

(a) Nei, A kan være en tautologi og dermed både være oppfyllbar og ufalsifiserbar.

(b) Ja, kontradiksjoner er ikke oppfyllbare og tautologier er ikke falsifiserbare. Derfor er A ingen av delene.

(c) Ja, denne påstanden er en tautologi og er dermed nødvendigvis sann.

(d) Nei, tautologier er alltid sanne og sier derfor ingenting utover seg selv. Eksempelvis vil ikke påstanden $B \to B$ medføre at A er sann.

(e) Nei, motsigelser er alltid usanne og sier derfor intengint utover seg selv. Eksempelvis vil ikke påstanden $B \to \neg B$ medføre at A er sant.

(f) Ja, hverken tautologien eller kontradiksjonen er logiske konsekvenser av hverandre, ergo er mengden uavhengig.

4.3

(a) Anta at A er usann. Gitt $(A \lor B)$ kan vi dedusere at B er sann. Dermed kan vi gitt $(C \land B)$ dedusere at C er sann. $(A \to C)$ vil ut i fra dette også være sann, siden A er usann og denne påstanden sier kun noe om C i de tilfellene der C er sann.

Premissene følger selv hvis A er usann, dermed kan vi ikke fastslå konklusjonen som sann. Argumentet er derfor UGYLDIG. Dette er fordi at skulle argumentet være gyldig ville vi forventet en logisk kontradiksjon ved å anta det motsatte av konklusjonen.

(b) Anta $(A \land B)$ er usann. Dette betyr at enten A eller B eller begge er usanne. Gitt $(A \land C)$ kan vi dedusere at A må være sann og derfor må B være usann; C må også av den grunn nødvendigvis være sann.

Gitt $(C \to B)$ har vi en kontradiksjon, siden C er sann og B er usann.

Argumentet er derfor GYLDIG, siden å anta det motsatte medfører en kontradiksjon.

4.4

(a) Ingen av delene, dåg kan forenkles til $(P \wedge Q)$

(b) Tautologi. På standen er sann hvis A og B er sanne, enten A eller B er sanne, eller ingen av delene.

(c) Ingen av delene, dåg kan forenkles til $\neg(P \oplus Q)$

(d) Kontradiksjon, $(A \wedge B)$ er kun sann hvis både A og B er sanne, men $\neg(A \vee B)$ er kun sann hvis både A og B er usanne, disse påstandene er dermed gjensidig utelukkende og medfører nødvendigvis en kontradiksjon.