Suites

Convergence : $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon.$$

$$\text{Cauchy} : \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Non-convergence : $\lim_{n\to\infty} x_n \neq l$

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - l| \geq \varepsilon.$$

Divergence : $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n > M \text{ (ou) } x_n < -M.$$

Non-divergence : $\lim_{n\to\infty} x_n \neq \pm\infty$

$$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \leq M \text{ (ou) } x_n \geq -M.$$

Outils

- Sandwich.
- Cauchy $\iff$ convergence.
- $x_n \nearrow$ et x_n bornée sup. $\Longrightarrow$ convergence.
- Opérations.

Séries

Definition : $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$.

Garder en tête :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} < \infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \\ = \infty & \text{si} \quad \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Outils

- Convergence $\iff$ queue de série $\longrightarrow 0$.
- $x_n \to\neq 0 \quad \Longrightarrow$ divergence.
- $\sum x_n \leq \sum |x_n| < \infty$.
- $\infty = \sum x_n \leq \sum |x_n| = \infty$.
- Critère de Leibnitz sur les séries alternées.
- Comparaison **direct** (1er critière).
- Comparaison de **croissance** (2ème critère).
- Similitude de comportement (3ème critère).
- Quotient d'Alembert.
- Racine de Cauchy.
- Condensation ($p_n \searrow$).
- Raabe-Duhamel.

Fonctions

Limite ponctuelle : $\lim_{x\to a} f(x)$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Outils

- Lien avec les suites.
- Sandwich.
- Opérations.
- Compositions.

Continuité : si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Implications (sur intervals fermés)

- Min-max.
- TVI.

Continuité uniforme

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, x, y \in D(f). |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Outils

(pour prouver)

- Definition.
- Intervals fermés, ok.
- Intervals ouverts, ok *si prolongeable* (même à l'infini).
- f est M-lipschitzienne. (suffisant mais pas nécessaire)

(pour réfuter)

- Suites x_n, y_n particulières.

Dérivées

Rolle : (f continue dérivable) $\exists c$ t.q. $f'(c) = 0$.
TAFG : (=) $\exists c$ t.q. $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$.
TAF : (=) $\exists c$ t.q. $(f(b) - f(a)) = (b - a) f'(c)$.
Croissance : $f \nearrow \iff f'(x) \geq 0$, ect.
L**-Lipschitzienne** : $\exists L \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$\forall x, y \in D(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Extremas : **1**. $\in \{a, b\}$, **2**. pt. crit., **3** . pt. f non dérivable.
Convexité : f est convexe sur (a, b) si :

$$\forall\lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in (a, b), f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Concavité : $-f$ convexe.
Implications

- f continue !
- $\iff f' \nearrow$.
- $\iff f'' \geq 0$.

Bernoulli - L'Hôpital

Développement limité

Fonctions o : $o(x)$ est t.q. $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.
Taylor : ($f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, c entre x et a)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k - 1)!}(x - a)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - a)^n.$$

Suites de fonctions

Convergence ponctuelle

$$\forall\varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Convergence uniforme

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

Uniformité de Cauchy

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

Outils

- Non conv. ponct. $\Longrightarrow$ Non conv. unif.
- (prouver conv. u.) $\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|, \quad x \in E\}$.
- Unif. de Cauchy $\iff$ unif. convergence.
- Combinaison **préserve** la conv. unif.
- *Dini* sur les suites monotones.

Implications : si $f_n \xrightarrow{U} f$

- Alors $\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$
- Si $f_n \in \mathcal{C}^0$, alors $f \in \mathcal{C}^0$ (aussi pour réfuter, si $f \notin \mathcal{C}^0$).

Séries entières

Définition : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Domaine : $D(f) := \{x \text{ t.q. } f(x) < \infty\} = [-R, R)$ (ouvert/fermé à voir les cas).
Rayon : $R := \sup |D(f)|$.
Implications : $\forall 0 < \rho < R$

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k x^k| \xrightarrow{U} f(x), \text{ sur } [-\rho, \rho] \text{ (puissant).}$$

Outils (pour trouver le rayon)

- Définition.
- $R = 1/ \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}$.
- $R = 1/ \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Implications

- $f \in \mathcal{C}^\infty((-R, R), \mathbb{R})$.