Suites

Convergence : $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

$$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |x_n-l|<\varepsilon.$$

$$\text{Cauchy} : \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\geq N, |x_n-x_m|<\varepsilon.$$

Non-convergence : $\lim_{n\to\infty} x_n \neq l$

$$\exists\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N, |x_n-l|\geq\varepsilon.$$

Divergence : $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$

$$\forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, x_n>M \text{ (ou) } x_n<-M.$$

Non-divergence : $\lim_{n\to\infty} x_n \neq \pm\infty$

$$\exists M>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N, x_n\leq M \text{ (ou) } x_n\geq -M.$$

Outils
- Sandwich.
- Cauchy $\iff$ convergence.
- $x_n \nearrow$ et x_n bornée sup. $\implies$ convergence.
- Opérations.

Séries

Definition : $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$.

Garder en tête :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} <\infty & \text{si} \quad \alpha>1 \\ =\infty & \text{si} \quad \alpha\leq 0 \end{cases}.$$

Outils
- Convergence $\iff$ queue de série $\longrightarrow 0$.
- $x_n \to\neq 0 \quad \implies$ divergence.
- $\sum x_n \leq \sum |x_n| < \infty$.
- $\infty = \sum x_n \leq \sum |x_n| = \infty$.
- Critère de Leibnitz sur les séries alternées.
- Comparaison **direct** (1er critière).
- Comparaison de **croissance** (2ème critère).
- Similitude de comportement (3ème critère).
- Quotient d'Alembert.
- Racine de Cauchy.
- Condensation ($p_n \searrow$).
- Raabe-Duhamel.

Fonctions

Limite ponctuelle : $\lim_{x\to a} f(x)$

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, x\in D(f), 0<|x-a|<\delta \implies |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Outils
- Lien avec les suites.
- Sandwich.
- Opérations.
- Compositions.

Continuité : si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Implications (sur intervals fermés)
- Min-max.
- TVI.

Continuité uniforme

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, x,y\in D(f). |x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Outils

(pour prouver)
- Definition.
- Intervals fermés, ok.
- Intervals ouverts, ok *si prolongeable* (même à l'infini).
- f est M-lipschitzienne. (suffisant mais pas nécessaire)

(pour réfuter)
- Suites x_n, y_n particulières.

Dérivées

Rolle : (f continue dérivable) $\exists c$ t.q. $f'(c)=0$.
TAFG : (=) $\exists c$ t.q. $[f(b)-f(a)]\,g'(c) = [g(b)-g(a)]\,f'(c)$.
TAF : (=) $\exists c$ t.q. $(f(b)-f(a)) = (b-a)f'(c)$.
Croissance : $f \nearrow \iff f'(x)\geq 0$, ect.
L-Lipschitzienne : $\exists L\in\mathbb{R}_+$ t.q.

$$\forall x,y\in D(f), |f(x)-f(y)|\leq L|x-y|.$$

Extremas : **1**. $\in\{a,b\}$, **2**. pt. crit., **3** . pt. f non dérivable.
Convexité : f est convexe sur (a,b) si :

$$\forall\lambda\in[0,1], \forall x_1,x_2\in(a,b), f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

Concavité : $-f$ convexe.
Implications
- f continue !
- $\iff f' \nearrow$.
- $\iff f''\geq 0$.

Bernoulli - L'Hôpital

Développement limité

Fonctions o : $o(x)$ est t.q. $\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x} = 0$.
Taylor : ($f\in\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, c entre x et a)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n}.$$

Suites de fonctions

Convergence ponctuelle

$$\forall\varepsilon>0, \forall x\in E, \exists N(\varepsilon,x)\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Convergence uniforme

$$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon, \forall x\in E.$$

Uniformité de Cauchy

$$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \forall n,m\geq N, |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon, \forall x\in E.$$

Outils
- Non conv. ponct. $\implies$ Non conv. unif.
- (prouver conv. u.) $\lim_{n\to\infty}\sup\{|f_n(x)-f(x)|, \quad x\in E\}$.
- Unif. de Cauchy $\iff$ unif. convergence.
- Combinaison **préserve** la conv. unif.
- *Dini* sur les suites monotones.

Implications : si $f_n \xrightarrow{U} f$
- Alors $\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$
- Si $f_n\in\mathcal{C}^0$, alors $f\in\mathcal{C}^0$ (aussi pour réfuter, si $f\notin\mathcal{C}^0$).