

Suites

Convergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon.$$

Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$

Non-convergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq l$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - l| \geq \varepsilon.$$

Divergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm \infty$

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n > M \text{ (ou) } x_n < -M.$$

Non-divergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \pm \infty$

$$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \leq M \text{ (ou) } x_n \geq -M.$$

Outils

- Sandwich.
- Cauchy \iff convergence.
- $x_n \nearrow$ et x_n bornée sup. \implies convergence.
- Opérations.

Série

Definition : $s_n := \sum_{k=0}^n a_k.$

Garder en tête :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} < \infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \infty & \text{si } \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Outils

- Convergence \iff queue de série $\longrightarrow 0.$
- $x_n \rightarrow \neq 0 \implies$ divergence.
- $\sum x_n \leq \sum |x_n| < \infty.$
- $\infty = \sum x_n \leq \sum |x_n| = \infty.$
- Critère de Leibnitz sur les séries alternées.
- Comparaison **direct** (1er critère).
- Comparaison de **croissance** (2ème critère).
- Similitude de comportement (3ème critère).
- Quotient d’Alembert.
- Racine de Cauchy.
- Condensation ($p_n \searrow$).
- Raabe-Duhamel.

Fonction