

Suites

Convergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon.$$

Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$

Non-convergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq l$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - l| \geq \varepsilon.$$

Divergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n > M \text{ (ou) } x_n < -M.$$

Non-divergence : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq \pm\infty$

$$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \leq M \text{ (ou) } x_n \geq -M.$$

Outils

- Sandwich.
 - Cauchy \iff convergence.
 - $x_n \nearrow$ et x_n bornée sup. \implies convergence.
 - Opérations.
-

Séries

Definition : $s_n := \sum_{k=0}^n a_k$.

Garder en tête :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \left\{ \begin{array}{ll} < \infty & \text{si } \alpha > 1 \\ = \infty & \text{si } \alpha \leq 0 \end{array} \right..$$

Outils

- Convergence \iff queue de série $\rightarrow 0$.
- $x_n \rightarrow \neq 0 \implies$ divergence.
- $\sum x_n \leq \sum |x_n| < \infty$.
- $\infty = \sum x_n \leq \sum |x_n| = \infty$.
- Critère de Leibnitz sur les séries alternées.
- Comparaison **direct** (1er critère).
- Comparaison de **croissance** (2ème critère).
- Similitude de comportement (3ème critère).
- Quotient d'Alembert.
- Racine de Cauchy.
- Condensation ($p_n \searrow$).
- Raabe-Duhamel.

Fonctions

Limite ponctuelle : $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Outils

— Lien avec les suites.

— Sandwich.

— Opérations.

— Compositions.

Continuité : si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Implications (sur intervalles fermés)

— Min-max.

— TVI.

Continuité uniforme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x, y \in D(f), |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Outils

(pour prouver)

— Définition.

— Intervalles fermés, ok.

— Intervalles ouverts, ok *si prolongeable* (même à l'infini).

— f est M -lipschitzienne. (suffisant mais pas nécessaire)

(pour réfuter)

— Suites x_n, y_n particulières.

Dérivées

Rolle : (f continue dérivable) $\exists c$ t.q. $f'(c) = 0$.

TAFG : (=) $\exists c$ t.q. $[f(b) - f(a)] g'(c) = [g(b) - g(a)] f'(c)$.

TAF : (=) $\exists c$ t.q. $(f(b) - f(a)) = (b - a) f'(c)$.

Croissance : $f \nearrow \iff f'(x) \geq 0$, ect.

L-Lipschitzienne : $\exists L \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$\forall x, y \in D(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Extremas : 1. $\in \{a, b\}$, 2. pt. crit., 3. pt. f non dérivable.

Convexité : f est convexe sur (a, b) si :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in (a, b), f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

Concavité : $-f$ convexe.

Implications

— f continue !

— $\iff f' \nearrow$.

— $\iff f'' \geq 0$.

Bernoulli - L'Hôpital

Développement limité

Fonctions o : $o(x)$ est t.q. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

Taylor : ($f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, c entre x et a)

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}.$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (x - a)^{k-1} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - a)^n.$$