Suites

Convergence : $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - l| < \varepsilon.$$

$$\text{Cauchy} : \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq N, |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Non-convergence : $\lim_{n\to\infty} x_n \neq l$

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |x_n - l| \geq \varepsilon.$$

Divergence : $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n > M \text{ (ou) } x_n < -M.$$

Non-divergence : $\lim_{n\to\infty} x_n \neq \pm\infty$

$$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, x_n \leq M \text{ (ou) } x_n \geq -M.$$

Outils
- Sandwich.
- Cauchy $\iff$ convergence.
- $x_n \nearrow$ et x_n bornée sup. $\implies$ convergence.
- Opérations.

Séries

Definition : $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_n$.
Garder en tête :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} < \infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \\ = \infty & \text{si} \quad \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Outils
- Convergence $\iff$ queue de série $\longrightarrow 0$.
- $x_n \to\neq 0 \quad \implies$ divergence.
- $\sum x_n \leq \sum |x_n| < \infty$.
- $\infty = \sum x_n \leq \sum |x_n| = \infty$.
- Critère de Leibnitz sur les séries alternées.
- Comparaison **direct** (1er critière).
- Comparaison de **croissance** (2ème critère).
- Similitude de comportement (3ème critère).
- Quotient d'Alembert.
- Racine de Cauchy.
- Condensation ($p_n \searrow$).
- Raabe-Duhamel.

Fonctions

Limite ponctuelle : $\lim_{x\to a} f(x)$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, x \in D(f), 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Outils
- Lien avec les suites.
- Sandwich.
- Opérations.
- Compositions.

Continuité : si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
Implications (sur intervals fermés)
- Min-max.
- TVI.

Continuité uniforme

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, x, y \in D(f). |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Outils
(pour prouver)
- Definition.
- Intervals fermés, ok.
- Intervals ouverts, ok *si prolongeable* (même à l'infini).
- f est M-lipschitzienne. (suffisant mais pas nécessaire)

(pour réfuter)
- Suites x_n, y_n particulières.

Dérivées

Rolle : (f continue dérivable) $\exists c$ t.q. $f'(c) = 0$.
TAFG : (=) $\exists c$ t.q. $[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c)$.
TAF : (=) $\exists c$ t.q. $(f(b) - f(a)) = (b - a) f'(c)$.
Croissance : $f \nearrow \iff f'(x) \geq 0$, ect.
L-Lipschitzienne : $\exists L \in \mathbb{R}_+$ t.q.

$$\forall x, y \in D(f), |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Extremas : **1**. $\in \{a, b\}$, **2**. pt. crit., **3** . pt. f non dérivable.
Convexité : f est convexe sur (a, b) si :

$$\forall\lambda \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in (a, b), f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Concavité : $-f$ convexe.
Implications
- f continue !
- $\iff f' \nearrow$.
- $\iff f'' \geq 0$.

Bernoulli - L'Hôpital

Développement limité