

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

Tesis para optar el título de Magister en Ciencias - Astronomía:
**SOBRE LA ACELERACIÓN ESTOCÁSTICA DE ELECTRONES
Y LA SISMICIDAD ASOCIADA A FULGURACIONES SOLARES**

Bogotá - Colombia.
2013



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
OBSERVATORIO ASTRONÓMICO NACIONAL

**SOBRE LA ACELERACIÓN ESTOCÁSTICA DE ELECTRONES
Y LA SISMICIDAD ASOCIADA A FULGURACIONES SOLARES**

Juan Camilo Buitrago-Casas

*Director : Prof. Benjamín Calvo-Mozo
Observatorio Astronómico Nacional, Bogotá-Colombia*

*Asesor internacional : PhD. Juan Carlos Martínez-Oliveros
Space Sciences Laboratory, Berkeley University, California-USA*



Bogotá-Colombia
2013

Sobre la aceleración estocástica de electrones y la sismicidad asociada a fulguraciones solares.

Juan Camilo Buitrago-Casas

Trabajo de grado presentado al programa de Maestría en Ciencias Astronomía de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Colombia sede Bogotá como parte de los requisitos de grado necesarios para obtener el título de Magister en Ciencias: Astronomía.

Director : Prof. Benjamín Calvo-Mozo

Asesor internacional : PhD. Juan Carlos Martínez-Oliveros

Banca Examinadora

Coordinación Área Curricular de la Maestría en Ciencias: Astronomía



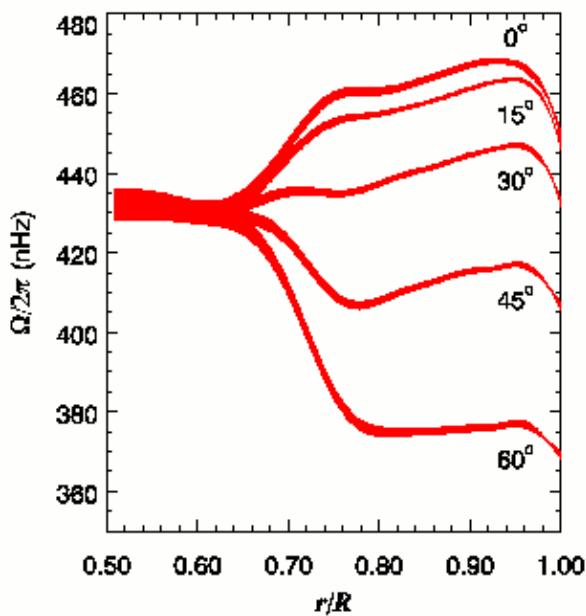
Contenido

Heliosismología	4
Heliosismología local	4
Diagrama de anillos	5
Diagrama de Tiempo-Distancia	6
Holografía heliosismológica	9
Proyección Postel	13
Sismicidad asociada a las fulguraciones solares	15
Método de limpieza de observaciones hechas desde tierra	17
Algoritmo paramétrico de corrección por turbulencia (PASCAL)	17
Algoritmo numérico para el cálculo del laplaciano de una función bidimensional	19
Proyecciones heliográfica y postel aplicadas a un fotograma solar	24
Implementación del método PASCAL sobre una muestra de fulguraciones energéticas	29
 Aceleración estocástica de partículas en una fulguración solar	33
Ecuación de Fokker-Planck	34
Un primer acercamiento: la ecuación de Langevin	35
Deducción de la ecuación de Fokker-Planck unidimensional	36
Ecuación de Fokker-Planck Multi-dimensional	40
Dinámica de un paquete de electrones que se inyecta en un plasma magnetizado	42
Procesos relevantes involucrados en las colisiones en plasmas	44
Colisión Coulombiana	44
Radiación giro-sincrotrón	47
Reflexión magnética	49
Simulación	53
Solución numérica de la Ecuación de Fokker-Planck dependiente del tiempo	53
Código numérico	57
Parámetros de entrada del conjunto de programas	60

Heliosismología

Una pregunta importante en el estudio del Sol es ¿Cómo pueden hacer los físicos solares conocer el interior solar si el mismo no es visible? La forma de hacerlo es justamente la tarea de la Helio-sismología que mediante observaciones y medidas de las oscilaciones vistas en la superficie hace inferencias y prospecciones acerca de las propiedades del interior solar. Las medidas que se pueden obtener son medidas en el cambio de la velocidad superficial vía *efecto Doppler* a causa del plasma que se mueve hacia adentro y hacia fuera en la línea de la visual del observador, según el momento en el que se le observe y el *modo de oscilación* predominante bajo el cual esté sometido.

Heliosismología local



NSO/NSF

Figure 1: Rotación de la estructura interna solar inferida de los datos heliosismológicos [Thompson et al., 1996].

Dependiendo del tipo de oscilación en el que se esté interesado la *heliosismología* se divide en *global* y *local*. Cuando se analizan los modos globales de oscilación (aquellos que abarcan toda la superficie solar) es posible construir un esquema de la estructura global interna de la estrella. Gracias a esta rama de la física solar se ha podido lograr establecer, por ejemplo, que la zona de discontinuidad entre la zona radiativa y la zona convectiva conocida como la *tacocilina*, aparte de ser una región en el interior solar donde cambia el mecanismo de transporte de energía, es también un lugar desde el cual el Sol deja de rotar como un cuerpo rígido y empieza a hacerlo de forma diferencial y en función de la latitud heliográfica (ver figura 2). Uno de los hallazgos más importantes de esta rama es el llamado *modo normal de oscilación* el cual tiene un periodo cercano a los cinco minutos, una frecuencia asociada de unos ~ 3 mHz que será un valor importante para nosotros en el momento en que toquemos el tema de los mapas de egresión acústica, y del cual se ha hallado una fuerte correlación con el periodo de oscilación de las espículas [De Pontieu et al., 2004]. Los avances de mayor impacto en esta

área son expuestos en un artículo de hace una década [Christensen-Dalsgaard, 2002].

La *heliosismología local* por su lado se centra en el estudio detallado de eventos sísmicos mucho más localizados, especialmente sobre aquellos que tienen lugar en regiones activas de la superficie solar. Esto último ofrece un nuevo problema a la heliosismología y se trata de la forma en la que se desarrolla el tratamiento para dar cuenta de la propagación de la perturbación acústica por debajo de la superficie solar ya que para la determinación de las propiedades de esa zona hasta entonces se ha apelado exclusivamente a solucionar las ecuaciones hidrodinámicas en ausencia de campo magnético, lo cual, por supuesto, deja de ser válido en las regiones activas del Sol que es donde se enfoca el estudio de esta rama. Por otro lado, una ventaja que puede ofrecer el estudio sísmico de manchas solares es la posibilidad de desentrañar la estructura de estas en el interior solar y a su vez dar visos de la fenomenología escondida detrás de su aparición y evolución. Dentro de las prioridades en este momento es encontrar el mejor modelo que de cuenta de la propagación de una onda acústica dentro de un plasma acoplado con un campo magnético relativamente fuerte, para enseguida buscar la mejor manera de implementarlo al problema particular de la aparición de un sismo asociado una mancha solar.

La Heliosismología local es una rama de la física solar relativamente nueva, desarrollada básicamente durante las últimas dos décadas desde el reporte por Kosovichev and Zharkova [1998] del primer sismo asociado a una fulguración tipo X2.6 en la región activa NOAA 7978. Los datos observacionales para este tipo de análisis han sido tomados por dos instrumentos espaciales y una red de telescopios solares en tierra. Estos son el MDI (*Michelson Doppler Imager*) a bordo del SOHO (*SOlar and Heliospheric Observatory*) [Scherrer et al., 1995], el recientemente enviado a órbita HMI (*Helioseismic and Magnetic Imager*) a bordo del SDO (*Solar Dynamic Observatory*) [Kosovichev and HMI Science Team, 2007], y la red de observatorios GONG++ (*Global Oscillation Network Group*) [Harvey et al., 1996]. Las imágenes que se obtienen son imágenes del disco solar completo y la resolución varía de un instrumento al otro siendo las imágenes de MDI y de GONG archivos de 1024×1024 píxeles y las de HMI de 4096×4096 píxeles, teniendo en cuenta que para los observatorios en tierra se debe considerar además el efecto producido por la turbulencia atmosférica sobre los datos de ciencia.

Para el análisis heliosimológico local de los Dopplergramas¹ obtenidos con los instrumentos anteriormente mencionados se han desarrollado una serie de métodos diferentes entre los que se obtiene un acercamiento prospectivo y/o dinámico. Entre los más utilizados hoy en día se encuentran el *análisis por diagrama de anillos*, los *diagramas tiempo-distancia (time distance)* o diagramas TS como se encuentra en alguna literatura, la *holografía acústica*, la técnica de *Fourier-Hankel*, cada una de ellas utilizada para un fin específico que a continuación discutimos brevemente.

Diagrama de anillos

Esta técnica se basa en cubrir varias regiones pequeñas en forma de anillos sobre la superficie solar. En cada una de las zonas pequeñas se infieren dos cantidades físicas que por lo general son la velocidad del sonido y la densidad de masa como función de la profundidad, y basados en estas, se determinan las otras cantidades como presión y temperatura. Haciendo una combinación de la información de cada zona pequeña es posible construir una visualización en 3D de la estructura interna. Este método ha sido usado típicamente para encontrar

¹Se llaman Dopplergramas a los fotogramas del Sol 2D en los que se marcan diferencias en la velocidad en la componente de la visual.

el límite externo de la zona convectiva a unos ~ 30 Mm de profundidad (siendo esta profundidad usualmente medida desde la alta fotosfera) [Haber et al., 2002].

La forma de proceder es construyendo un espectro de potencia en 3D para cada una de las regiones pequeñas lo cual resulta en una imagen de anillo [Hill, 1988].

Las propiedades del plasma bajo la superficie solar son inferidas mediante el análisis en las variaciones en frecuencias de los espectros de potencia. La presencia de un flujo interno introduce un corrimiento Doppler en las frecuencias, y por lo tanto un cambio en la forma de los anillos. La forma en la que se afectan los diferentes *modos* da un indicativo de la profundidad y dimensiones del flujo interno [González Hernández et al., 2006]. Nótese que los anillos mostrados en la figura 2 son construidos a frecuencias muy cercanas a la que hoy día sabemos que corresponde al modo normal (de resonancia) en el Sol que es el del orden de los cinco minutos [Goldreich and Keeley, 1977] (recordemos que $v_{fund} = \frac{1}{T_{fund}} = \frac{1}{300\text{s}} = 3,3\text{ mHz}$).

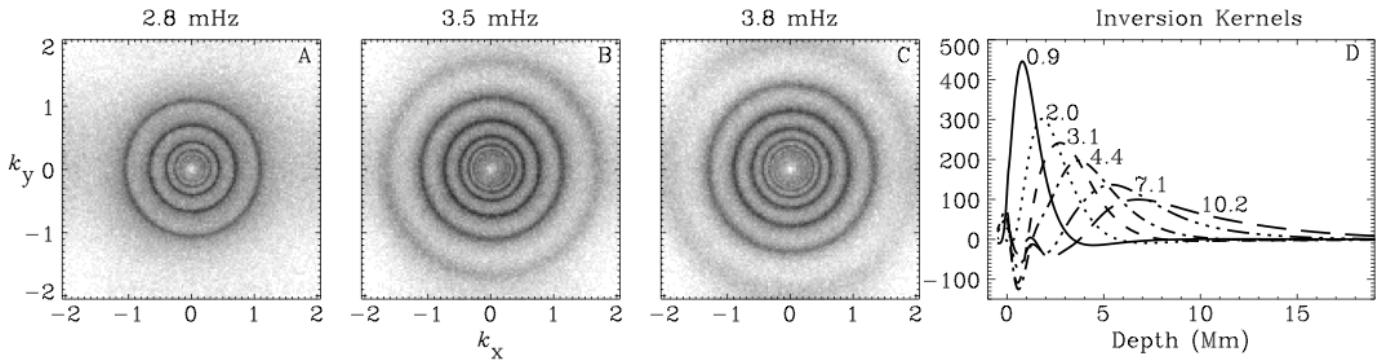


Figure 2: (a) - (c) Corte transversal de un espectro de potencias de un diagrama de anillo tridimensional para tres frecuencias diferentes. Cada anillo corresponde a un único orden radial n . (d) Núcleos representativos para una inversión basada en los diagramas de anillo graficados como función de la profundidad bajo la fotosfera [Haber et al., 2002].

Diagrama de Tiempo-Distancia

Esta técnica expuesta por primera vez por Duvall et al. [1993] se basa en la medida de la trayectoria descrita por una onda acústica (vista vía efecto Doppler) que viaja de un punto a otro sobre la superficie solar. Esta técnica es muy usada hoy en día para la determinar si un cierto evento de fulguración solar tiene, o no, asociado un sismo. La forma de implementarlo es tomar la imagen Doppler del disco solar obtenida con alguno de los instrumentos dispuestos para esto y recortar la imagen en la zona en donde se produjo la fulguración para luego centrar sobre ella un círculo cuyo radio va hasta unos 20 Mm y hacer las restas entre imágenes consecutivas para encontrar de esta manera la señal de una fuerte variación acústica que se propaga desde el centro del círculo hacia afuera de él.

Este protocolo ya se ha sistematizado y por ejemplo el equipo de la Universidad de Stanford en California encargado del almacenamiento y distribución de los datos tomados por *HMI/SDO* ha construido una serie de programas que cada ocho horas hace un barrido del disco en las fulguraciones que tuvieron lugar durante ese lapso de tiempo y aplican este método sobre los Dopplergramas denotados como *near-real-time* para determinar la existencia o no de sismos solares [Zhao et al., 2011]. Esto resulta ser una ventaja apreciable ya que se puede informar a la comunidad científica mundial la aparición de un nuevo sismo solar en tan solo unas pocas horas después de que ocurra, tal como ocurrió con el primer sismo del ciclo 24 asociado a la fulguración tipo X2.2 de la región activa NOAA 1158 que tuvo lugar el 15 de Febrero de 2011 y que tan solo cuatro horas después fue reportado por Kosovichev [Kosovichev, 2011].

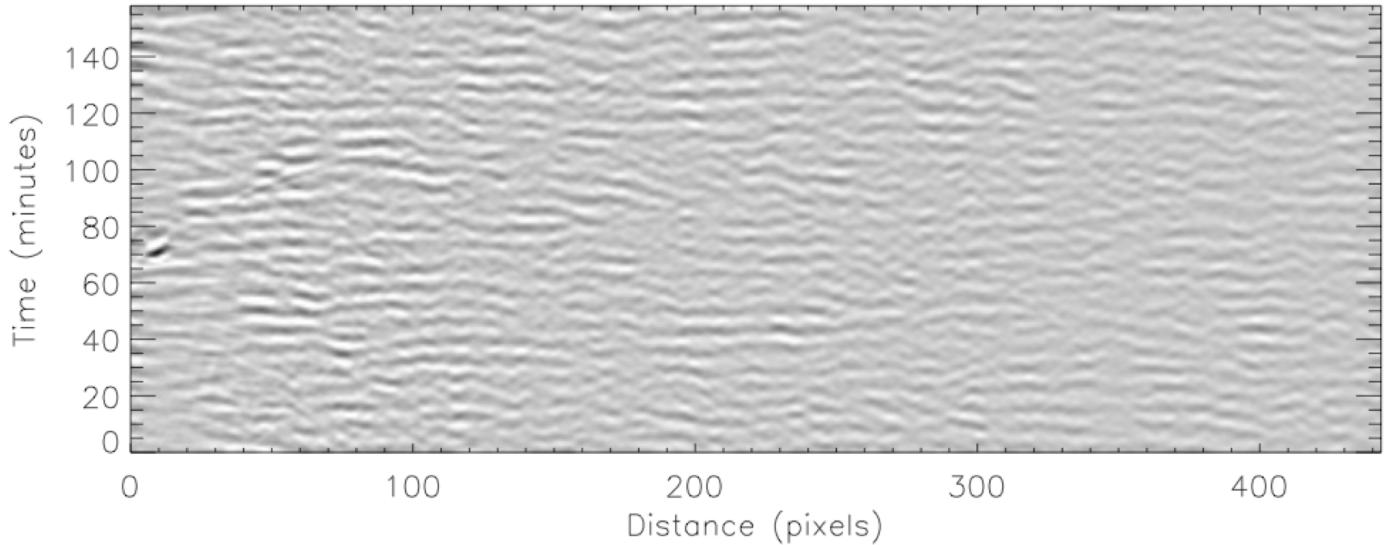


Figure 3: Diagrama TD para la fulguración solar clase GOES X2.2 del 15 de Febrero de 2011. Podemos discernir una señal acústica ubicada al lado izquierdo que incrementa su velocidad al transcurrir el tiempo.

Los principales progresos en la heliosismología de la década pasada ocurrieron a través del análisis de los modos normales de oscilación [Christensen-Dalsgaard et al., 1991], esto debido principalmente a la dificultad de observar el viaje temporal de señales acústicas que se confunden con el ruido provocado por los muchos modos de oscilación que llegan a la superficie solar. Esto entra en contraste con la forma de hacer sísmica en nuestro planeta en donde mediante la medida de diferencias de tiempo y diferencias de distancia medidas a través de diferentes estaciones ubicadas en varios puntos de la superficie terrestre se puede desarrollar una prospección del subsuelo mediante el análisis espacio temporal de estas señales [Gubbins, 1990]. La técnica del diagrama Tiempo-Distancia trata de emular esta forma de hacer sísmica aquí en la tierra y haciendo uso de los datos de mejor resolución y observando eventos de fulguraciones solares puede seguir la respuesta sobre la superficie de este tipo de señales como lo reportaron por primera vez Kosovichev and Zharkova [1998].

La causa de la perturbación sísmica que da lugar a las ondas vistas después de un evento de fulguración solar es un problema abierto de la física solar que es discutido en los más importantes congresos que se celebran en esta área y a donde asisten los científicos más reconocidos y de más amplia trayectoria que trabajan en estos temas [Zharkova et al., 2011]. Para efectos de entender la forma en la que un frente de onda acústica se

propaga por el interior solar para luego ser registrada en una diagrama TD vamos a suponer simplemente que la fuente sísmica existe, que es muy fuerte y que está bien localizada.

La forma en la que ampliamente se concibe la trayectoria de una onda acústica cuya fuente está ubicada cerca de la superficie solar es esquematizada en el diagrama de rayos de la figura 4. Una fuente que tiene lugar en el punto a de la superficie solar es el punto de partida de un rayo que es refractado debido al incremento de la velocidad del sonido local del medio en el que se propaga hasta invertir su dirección radial y llegar al punto c . Una vez llega a c se encuentra con un cambio brusco en la densidad local, razón por la cual la onda es reflejada y continúa una trayectoria similar hacia otro punto sobre la superficie solar. De esta manera es como se presenta una correlación entre el frente de onda visto en c y el punto a desde el cual se originó. La distancia que se observa es la que está sobre la superficie Δ pero claramente el camino recorrido es b a través del interior solar. Si la fuente acústica tuvo lugar en el tiempo t , entonces decimos que el tiempo característico que tarda el frente de onda de ir desde el punto a hasta el punto c es T y al que se le conoce como el *tiempo de viaje*. A pesar de esta relación directa entre los dos puntos sobre la superficie solar a y c , las señales que se observan se ven afectadas por un ruido apreciable introducido por todas aquellas perturbaciones *extras* que presentan de forma aleatoria a lo largo del camino b y que a pesar de ser de menor intensidad, también tienen una respuesta que es vista en los mismos dos puntos a y c . La literatura se refiere a esta interferencia como el *problema de oblicuidad*. Es por esta misma razón que no se puede construir un espectro de potencia unidimensional en una línea de píxeles definida sobre una imagen solar, sino que en vez de esto se debe realizar un análisis que abarque una circunferencia centrada en la fuente del sismo.

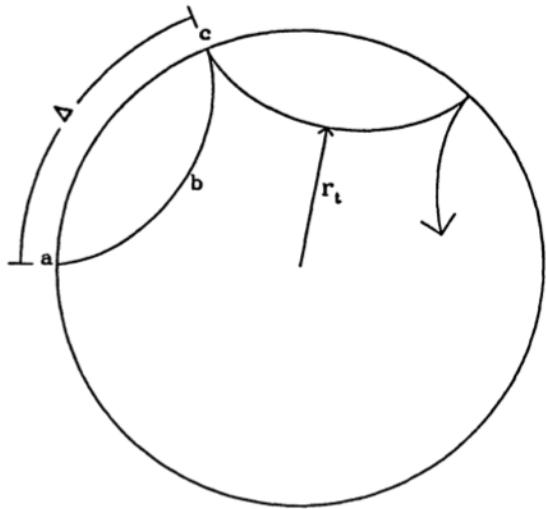


Figure 4: Esquema que muestra el camino por el que se propaga una onda sonora a lo largo del interior solar. Tomado de [Duvall, 1995]

Los primeros trabajos en los que se implementó este método TD se encontraron *tiempos de viaje* del orden de los 75 minutos y distancias Δ del orden de 25 grados de arco heliosféricos [Duvall, 1995] mucho mayor a los tiempos y distancias reportados en los sismos asociados a eventos de fulguración solar en las vecindades de las manchas solares (ver por ejemplo [Donea et al., 2006b, Kosovichev, 2011, Martínez-Oliveros, 2009, Martínez-Oliveros et al., 2008b, Moradi et al., 2006b]) en los que los tiempos de viaje son del orden de los 30 minutos y las distancias son cercanas a los 5 o 10 grados heliosféricos. La razón es que a pesar de que el diagrama TD es un método centrado en una localidad finita de la superficie solar, en un principio fue usado dentro del marco de la heliosismología global bajo la suposición de un número de *Reynolds magnético* grande de manera que son los *modos-p* la base sobre la cual el frente de onda acústico se propaga. Claramente, el plasma confinado en una mancha solar se comporta siguiendo un régimen magnético de manera que las líneas de campo magnético se encuentran congeladas y los modos-p de vibración son amortiguados fuertemente [Braun et al., 1988, D'Silva and Duvall, 1995].

Los diagramas de tiempo-distancia trabajados por Duvall [1995] están centrados principalmente en un sector de *Sol calmo* pero la perturbación acústica que se propaga con el tiempo logra entrar luego en una región

activa en donde se visualiza una fractura de la trayectoria y después de un corto tiempo se observa una disminución en la intensidad de la señal y una descomposición en su banda de líneas que, se cree, es debido a la presencia de campo magnético dentro de la mancha a través de la cual continúa propagándose la perturbación. Esto sugiere que la forma en la que se da esta fractura y la posterior aparición de una banda de curvas puede estar relacionada fuertemente con la estructura interna de la mancha solar y es esta la principal razón por la que hoy día es un tema que genera un gran apetito científico para los físicos solares, pues un estudio detallado de este fenómeno podría ayudar a construir un mayor entendimiento de la estructura sub-superficial del Sol.

Para explicar la disminución de la intensidad de la señal acústica, una vez la perturbación entra a la mancha solar, se apela a pensar en fenómenos de difusión acústica que atenúen la onda. Para dar cuenta de esto desde un acercamiento netamente fenomenológico se hacen algunas hipótesis como que a través de la mancha solar, y de forma completamente perpendicular, atraviesa un tubo magnético monolítico que incrementa la disipación de los modos acústicos al pasar por las capas resonantes y el un conglomerado de fibrillas internas del tubo además de la atenuación debida a la conversión de modos *acústicos* a modos *magneto-acústicos*. Una revisión detallada de la matemática propuesta para describir esta dinámica se encuentra en D'Silva [1996, 2001], D'Silva and Duvall [1995], Spruit and Bogdan [1992] y Kosovichev and Duvall [2011].

Una de las debilidades más remarcadas de este método es aquella que concierne al ruido que se filtra en los diagramas TD como bien se puede ver, por ejemplo, de aquel que construimos para el evento del 15 de Febrero de 2011 (ver figura 4) y más aún la **razón señal-ruido** de la supuesta propagación acústica que se registra. En aras de dar solución a este problema se ha tratado de caracterizar el ruido acústico considerando a los mecanismos de excitación de los modos como fenómenos de naturaleza estocástica que generan oscilaciones estacionarias y homogéneas sobre toda la superficie solar. De esta manera es posible construir una matriz de covarianza entre las medidas del tiempo de viaje y la inversión acústica que resulta de este tipo de análisis:

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_j) = \frac{h_t}{T - |t_j|} \sum_i \phi(\mathbf{x}_1, t_i) \phi(\mathbf{x}_2, t_i + t_j), \quad (1)$$

donde $\phi(\mathbf{x}, t)$ denota la señal acústica filtrada observada para un punto \mathbf{x} en un instante² t , h_t es la cadencia del instrumento con el que son tomadas las imágenes, $t_j = j h_t$ con $j \in \mathbb{Z}$, y T es el tiempo total sobre el cual se está haciendo el análisis. Un trabajo completo en el que se desarrolla este método de limpieza del ruido en la señal y se compara con datos observacionales reales obtenidos con MDI/SOHO es mostrado en Gizon and Birch [2004]. Como vemos el proceso de filtrado de la señal acústica genera una repercusión apreciable sobre las medidas de manera que se debe tener en cuenta a la hora de intentar hacer alguna interpretación física de las observaciones, como bien lo indican Braun and Birch [2008], Chou et al. [2009], Salabert et al. [2009] y Donea and Newington [2011]. Este es un método que se ha convertido en una herramienta potente de la física solar, pero que aún hoy en día se discuten sus problemas, como fue el caso del último encuentro AGU-2010 (*American Geophysical Union*) en donde Duvall [2010] expuso el estado del arte de este tema.

²Este filtrado se realiza mediante la aplicación de un par de operadores en el dominio del espacio de Fourier del conglomerado de datos observados que generalmente es la remoción de todas aquellas oscilaciones que son múltiplos enteros del modo fundamental de oscilación y un filtro Gaussiano en fase con la velocidad de la forma $\exp[-(\omega/k - v)^2/(2s^2)]$ siendo $v = 36.5 \text{ km s}^{-1}$ y $s = 2.5 \text{ km s}^{-1}$.

Holografía heliosismológica

El método de *holografía heliosismológica* es una técnica cuya finalidad es la reconstrucción tridimensional de la morfología interna de la atmósfera solar basándose en la propagación de los modos-p y la forma en que estos se registran en la superficie del Sol. En Octubre de 1997 Chang y sus colaboradores proponen el método llamado *imaginología acústica* que consiste en la observación del ruido acústico sobre la superficie solar suponiendo que ha sido generado de forma homogénea en su interior de manera que (asumiendo además un primer modelo de la estructura interna de la capa más externa del Sol, la *atmósfera solar*) si no hubiese ningún tipo de obstáculo las señales alcanzarían la superficie con cierta fase. El no encontrar las señales acústicas con la fase esperada supondría la existencia de un obstáculo “óptico” interno y la forma de dimensionarlo sería justamente aplicando un método análogo al usado en óptica clásica cuando con ayuda de un montaje óptico se registra la señal de una fuente de luz en cuyo camino óptico se ha atravesado un obstáculo que dispersa los rayos. Esta técnica fue inicialmente pensada para poder generar la imagen de prospección interna de inhomogeneidades en el plasma solar tales como las que se presentan en el surgimiento de manchas solares [Chang et al., 1997]. Para ese mismo año los doctores Charles Lindsey y Douglas Braun publican un artículo en el que por primera vez proponen la **holografía heliosismológica** como un método de prospección acústica que permite la ubicación de la fuente de sismos fuertemente localizados en la superficie del Sol [Lindsey and Braun, 1997].

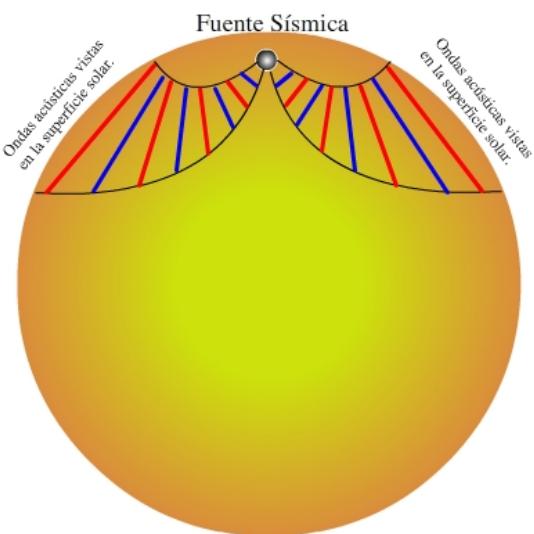


Figure 5: Figura que representa la propagación de una señal acústica en el interior solar cerca de la superficie. El dibujo se ha exagerado un poco

³La *atmósfera solar* es un medio por el cual propagan las ondas acústicas cobra una importancia sobresaliente cuando la propagación se hace sobre un medio que no es isotrópico y/o homogéneo, ya que la dinámica de propagación de las ondas cambia completamente y empieza a depender por ejemplo de la dirección en la que se propague un frente de onda. *y densidad de masa con la profundidad, así como*

Obviamente la atmósfera solar no es un medio uniforme y homogéneo a través del cual se propagan las ondas; por esta razón, también se da la *imaginología acústica* en el medio. Las líneas

azules y rojas representan picos y valles de la señal. Se asume un medio cuyas propiedades físicas cambian únicamente con la dirección ra-

Mucho del tratamiento matemático que se usa en la **holografía acústica** es análogo y tomado del formalismo definido sobre la holografía óptica propuesta por el científico Húngaro-Británico *Dennis Gabor* en 1947 y por el cual ganó el premio nobel de física en 1971 [Collier et al., 1971]. En este contexto, el registro de un patrón dos-dimensional generado por una superposición de ondas sonoras se considera un **holograma acústico**. Entonces, haciendo uso de estos *hologramas* es posible realizar una prospección del campo de ondas acústicas que han viajado a través de un espacio tridimensional del cual se conocen sus características generales como composición y topología³.

El caso más sencillo de suponer es un medio de propagación uniforme y homogéneo dentro del cual se encuentra una fuente de ondas acústicas que se propagan y son registradas en algún lugar durante un periodo de tiempo determinado⁴. En general, un holograma es generado cuando sobre una superficie “plana” se graba la superposición de

la llegada de dos o más ondas provenientes de iluminar el objeto de estudio desde diferentes lugares (diferentes *perspectivas*). Para poder obtener un holograma acústico asociado a un evento de sismo localizado en la superficie solar se hacen un par de suposiciones moderadas para crear un primer acercamiento a esta construcción. Primero se supone una atmósfera solar cuyas propiedades físicas no cambian con la latitud y la longitud heliográficas; esto es, se dice que por ejemplo la densidad cambia solo con la profundidad de la atmósfera solar, siguiendo por ejemplo un modelo como el propuesto por Benz [2002] (ver figura ??). Además, se plantea una fuente sísmica muy bien localizada (*casi-puntual*) en el interior solar, de manera que hay una cierta simetría en las ondas cuando salen de allí. Para analizar la forma en la que aplica esta técnica sobre la superficie solar, consideremos la situación planteada en la figura 5. Allí se presenta una fuente de ondas acústicas cerca de la superficie solar. La parte de la señal sonora que va hacia adentro del Sol sufre una retro-dispersión a causa del aumento de la densidad de masa, a lo cual se asocia también un aumento gradual en el valor del índice “óptico” del medio de propagación⁵.

El formalismo teórico detrás de la holografía acústica es relativamente simple y completamente análogo al usado en holografía óptica. Un frente de onda definido sobre una longitud de onda particular se puede representar mediante un número complejo \mathbf{U} , en donde la amplitud y la fase del frente de onda son el valor absoluto y el ángulo del número complejo respectivamente. Si sobre la “pantalla” en la que se construye el holograma están incidiendo dos frentes de onda provenientes de dos lugares distintos desde los cuales se ilumina el objeto, cada uno de estos frentes de onda puede ser representado por un número complejo que llamamos \mathbf{U}_1 y \mathbf{U}_2 , de manera que la combinación de estos dos se reduce a su suma, $\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2$. La energía de esta superposición de rayos está dada por

$$|\mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2|^2 = |\mathbf{U}_1|^2 + |\mathbf{U}_2|^2 + \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^* + \mathbf{U}_1^* \mathbf{U}_2 \quad (2)$$

en donde los dos primeros términos de la derecha son las intensidades de las ondas \mathbf{U}_1 y \mathbf{U}_2 , mientras que los dos últimos términos representan las intensidades adicionales debido a la interferencia entre los dos frentes de onda. Cuando el rayo del objeto y el rayo de referencia provienen de direcciones apreciablemente diferentes, los frentes de onda de la imagen virtual, real y de referencia emergen con diferentes ángulos siendo posible reconstruir el objeto y verlo claramente.

La holografía heliosismológica (en términos muy generales) toma las oscilaciones observadas en la superficie solar y calcula la “imagen sísmica” a cierta profundidad del Sol. Cuando esta es calculada hacia adelante en el tiempo se le llama imagen, o mapa, de **egresión**, mientras que cuando se calcula hacia atrás en el tiempo se le llama imagen, o mapa, de **ingresión**. El ejercicio de diagnóstico básico de la holografía

⁵La manera en la que la fuente de la señal acústica es generada es un tema de fuerte debate aún hoy en día y su discusión se presentó en el subcapítulo de **sismicidad asociada a fulguraciones solares**.

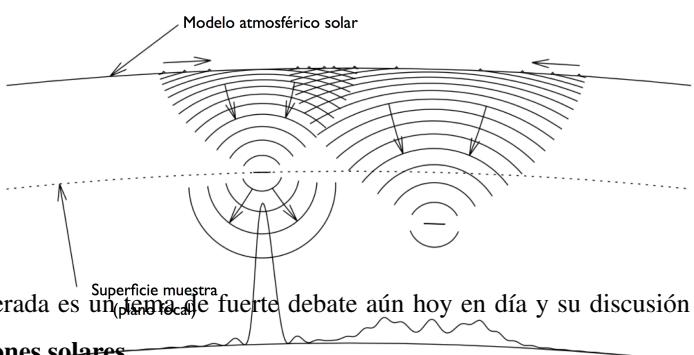


Figure 6: Representación de una regresión holográfica basada en un campo acústico observado en la superficie solar. Figura tomada de Lindsey and Braun [2000].

sísmica consiste en aplicar una inversión temporal sobre un conjunto de observaciones sísmicas de la superficie solar basándose en un modelo computacional de la atmósfera solar desprovisto de fuentes, sumideros o dispersiones acústicas. En general, esta técnica debe aplicarse sobre una región limitada de la superficie solar. Abusando del lenguaje propio de la óptica a la región sobre la que se aplica este procedimiento se le llama la *pupila*. Una vez se define esta pupila sobre los parámetros de entrada del código numérico y este se corre, las ahora entrantes perturbaciones acústicas convergen todas juntas al punto donde se localizó la fuente acústica. Si se toma una muestra de la potencia acústica en una superficie, i.e., en un “*plano focal*”, a la profundidad en la que tuvo lugar la fuente acústica, el resultado será una señal intensa y bien definida cuyo ancho estará definido por el límite de difracción de la señal, tal y como aparece debajo de la fuente en la parte izquierda de la figura 6. De otro lado, si el plano focal es movido hacia arriba o hacia abajo de la profundidad a la cual se presentó la fuente, la señal en general no desaparece pero sí se desenfoca apreciablemente, observándose un perfil difuso como el que se esquematiza en la parte baja del lado derecho de la figura 6.

Considerando un medio continuo, libre de fuentes, sumideros y/o puntos de dispersión, a través del cual se propaga un tren de ondas, bastaría conocer la amplitud y la derivada de esta en un tiempo dado para poder extrapolar el campo acústico a través de todo el interior solar y todo tiempo por medio de la solución de la integral de Kirchhoff [Born and Wolf, 1975]. Este tipo de procedimientos suponen una distribución *continua* de datos, que por obvias razones no se puede obtener de las observaciones heliosismológicas, razón por la cual a pesar de que esta solución (la de la integral de Kirchhoff) pueda representar una componente significativa del campo acústico subyacente, **no** debe ser considerada como una solución que de cuenta del campo acústico *real* ya que el medio a través del cual se propagan las ondas está permeado de un montón de anomalías físicas. De esta manera es que se encuentra la necesidad de establecer la diferencia entre el campo acústico obtenido mediante la aplicación de un modelo teórico de egresión, H , y el campo acústico *real*, ψ . Lindsey and Braun [1997] establecen que estos dos últimos campos se relacionan mediante una función de *Green* que da cuenta de la propagación hacia adelante y hacia atrás en el tiempo, $H_+(\mathbf{r}, z, t)$ y $H_-(\mathbf{r}, z, t)$ respectivamente. A $H_+(\mathbf{r}, z, t)$ se le suele llamar la “*egresión acústica*” que se relaciona con ϕ mediante la siguiente expresión

$$H_+(\mathbf{r}, z, t) = \int dt' \int_{a < |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < b} d^2\mathbf{r}' G_+ (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, z, t - t') \phi(\mathbf{r}', t'), \quad (3)$$

en donde G_+ es la función de *Green* que expresa cómo una perturbación registrada en un punto transitorio único en (\mathbf{r}, z, t) , en el interior solar, se propaga hacia las capas más externas hasta alcanzar la superficie en donde se registra el frente de onda viajero en $(\mathbf{r}', 0, t')$. Por otra lado, la *ingresión acústica*, H_- , es la inversión temporal de la *egresión acústica* H_+ . Esta *ingresión* da cuenta de las ondas que de manera coherente convergen todas juntas a un mismo punto focal en (\mathbf{r}, z) . La *ingresión* puede ser calcu-

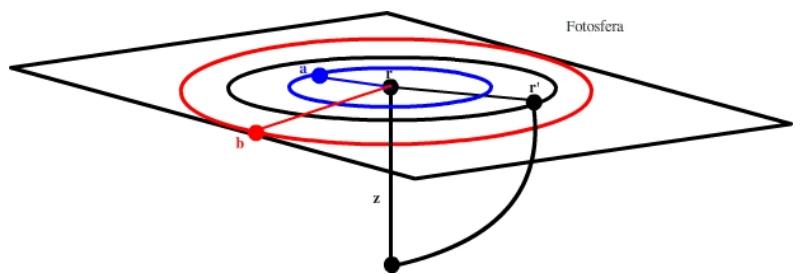


Figure 7: Figura que esquematiza la pupila usada en la técnica de holografía acústica sobre la superficie del Sol, en donde se resalta que se usa una pupila anular con radio interior a (azul) y radio exterior b (rojo). Además que el mapa de egresión es calculado sobre el punto r' cuando las perturbaciones son vistas

lada si en la ecuación 3 se usa como factor integrante la función de *Green*

$$G_-(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, z, t - t').$$

Esta función de *Green*, más conocida como la función **iconal** de *Green*, que solo depende de la dirección radial gracias a la suposición de simetría acimutal que se presenta en la superficie solar (cuando se habla de su estructura), puede ser descrita como un producto entre una función delta y una función f que da cuenta del decremento de la amplitud de la perturbación a medida que se propaga:

$$G_+ (|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, z, t - t') = \delta[(t - t') - T(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, z)] f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, z), \quad (4)$$

donde T es el tiempo transcurrido entre la generación del pulso y la llegada del frente de onda al punto \mathbf{r}' sobre la superficie visible del Sol. Esta representación caracteriza la dinámica acústica del modelo solar en el que se construye una regresión acústica mediante el uso de las observaciones heliosísmicas. La holografía sísmica computacional ha sido desarrollada como una técnica de diagnóstico muy flexible de manera tal que no esté restringida a un modelo de atmósfera solar particular. En este sentido, la función de *Green* puede alejarse considerablemente de lo que sería el interior solar acústico real y sin embargo seguir proporcionando imágenes de muy alta calidad y útiles para diagnosticar la ubicación de la fuente sísmica.

En aras de calcular la potencia acústica de egresión Lindsey and Braun [2000] proponen hacer el cálculo de la ecuación (3) en el dominio de las frecuencias y el número de onda; ésto con el fin de eliminar las integraciones en el anillo y trabajar más bien en forma operacional:

$$\hat{H}_+(\mathbf{k}, z, \nu) = \hat{G}_+ (|\mathbf{k}|, z, \nu) \hat{\psi}(\mathbf{k}, \nu), \quad (5)$$

donde \hat{H}_+ , \hat{G}_+ y $\hat{\psi}$ son las *transformaciones de Fourier* en espacio y tiempo de H_+ , G_+ y ψ , respectivamente. En este cambio se trabaja con los modos normales de oscilación acústica cuyas proyecciones sobre la superficie solar (en la aproximación de un plano horizontal) resultan ser simplemente ondas planas viajeras. De aquí la importancia de que en esta técnica, antes de entrar a aplicar la holografía acústica sobre los datos crudos reales, sea necesario realizar una proyección del disco solar que preserve las distancias verdaderas entre dos puntos contenidos en la superficie solar. Una descripción detallada de esta técnica se encuentra en Lindsey and Braun [1997], Lindsey and Braun [2000].

Proyección Postel

Como vimos en la sección anterior, particularmente cuando nos referimos a la figura 7, se tiene un centro y diferentes señales que arriban a la superficie desde profundidades diversas. Ahora bien, esto lo observamos en un plano de imagen; sin embargo, al Sol lo podemos suponer esférico, y por lo tanto, necesitamos hacer una proyección de la descripción de las señales estudiadas en un plano de imagen, si bien provienen de una superficie (solar) curva. A este tipo de proyección se le conoce en la literatura como *proyección azimutal equidistante* o *proyección Postel* por aquello de que fue usada por *Guillaume Postel* en la contrucción de algunos mapas

geográficos en 1581 [Snyder and Parr, 1926]. Este procedimiento consiste en generar la proyección de diversos puntos ubicados sobre la superficie esférica, en un plano tangente a la esfera en el punto \mathbf{P} , como se muestra en la figura 8, de manera que con respecto a este punto \mathbf{P} se preservan tanto las distancias como los ángulos entre los puntos ubicados a lo largo de circunferencias concéntricas⁶ en \mathbf{P} .

La construcción de la proyección Postel se lleva a cabo fijando un punto sobre la superficie solar de coordenadas heliográficas θ, φ de manera que las coordenadas sobre el mapa plano de todos los otros puntos se hallan mediante

$$\begin{cases} X'_p = \theta' \cos \varphi' \\ Y'_p = \theta' \sin \varphi' \end{cases}, \quad (6)$$

en donde θ', φ' son unas coordenadas esféricas tales que deben satisfacer que P esté en uno de los polos y que se relacionen con θ, φ mediante el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos \theta' \sin \varphi' = \cos \theta \sin(\varphi - \varphi_0) \\ \sin \theta' = -\cos \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin \theta \cos \theta_0 \\ \cos \theta' \cos \varphi' = \cos \theta_0 \cos \theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \sin \theta_0 \sin \theta \end{cases}, \quad (7)$$

siendo θ_0 y φ_0 las coordenadas del punto P en las antiguas coordenadas esféricas [Pearson, 1977].

Sismicidad asociada a las fulguraciones solares

El interés constante por entender los procesos mediante los cuales la energía es transportada, almacenada y (posteriormente) liberada en las fulguraciones solares se ha convertido en uno de los problemas abiertos más interesantes que en las últimas décadas han ocupado a los astrofísicos solares.

Con el advenimiento de la era espacial en la astronomía, es mucha la información que se ha obtenido de estos eventos explosivos y ya es bastante lo que se ha aprendido acerca de los procesos que tienen lugar en la alta atmósfera solar. Sin embargo, a pesar de estos grandes avances aún son muchas las incógnitas que se tienen con respecto a los efectos que tienen las fulguraciones sobre las partes más profundas a la fotosfera. Wolff [1972] lanzó la primera propuesta reportada de que estas explosiones solares podrían impactar directamente el interior solar, pero fue solo hasta un par de décadas después cuando por primera vez se pudo tener registro verídico de este fenómeno en forma de “sun-quakes” o sismos solares [Kosovichev and Zharkova, 1998], visibles como ondas expansivas circulares que se propagan sobre la superficie solar, como se representa en la figura 9. Trabajos posteriores han mostrado una correlación alta (temporal y espacial) entre la aparición de estas ondulaciones y una emisión fuerte en rayos-X [Donea and Lindsey, 2005], luz blanca [Donea et al., 2006b, Martínez-Oliveros et al., 2007, Moradi et al., 2006b] y cambios permanentes en la topología del campo magnético local [Hudson, 2000, Moradi et al., 2006a, Schunker et al., 2005]. Al leer estos trabajos se evidencia que, debido a la heterogeneidad de las evidencias observacionales obtenidas, han surgido toda una variedad de propuestas que tratan de dar una explicación plausible a la aparición de estas señales sísmicas observadas en algunas regiones activas haciendo uso de diferentes procesos físicos. La mayoría de estas propuestas están enmarcadas en alguno(s) de los siguientes mecanismos:

⁶Este tipo de proyección es el que se usa en el globo terrestre que se ha establecido como emblema de la *Organización de las Naciones Unidas*.

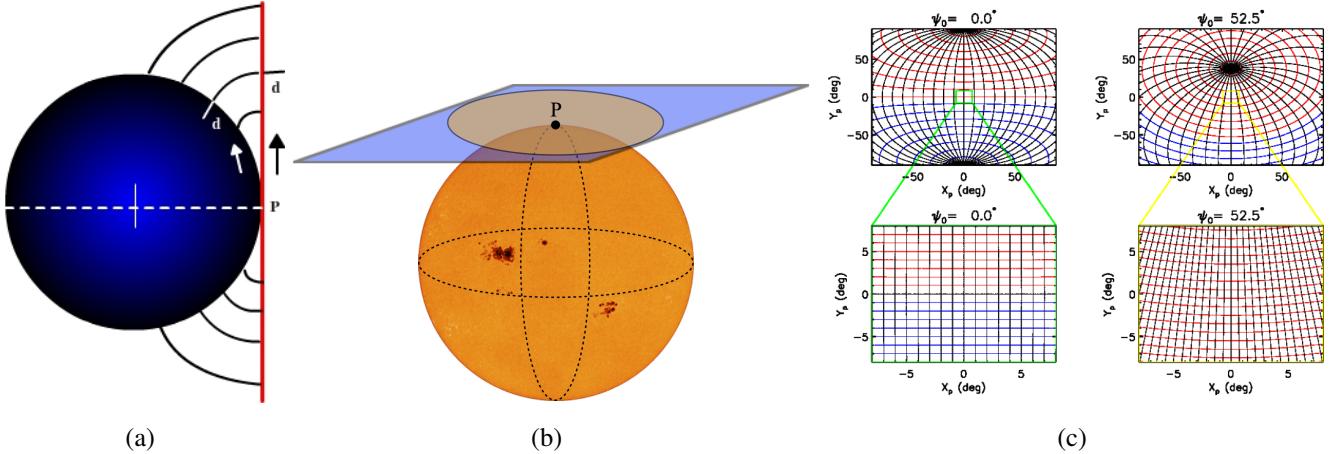


Figure 8: Conjunto de figuras que esquematizan la proyección *Postel*. (a) Vista en perspectiva de una superficie completamente esférica (azul) que se proyecta sobre un plano (rojo). En este los trazos en negro representan la proyección de cada uno de los puntos de la esfera sobre el plano y se observa claramente cómo las distancias se conservan a lo largo de una línea trazada en dirección radial con centro en el punto P. (b) La proyección *Postel* de la superficie solar centrada en un punto P ubicado en uno de los polos heliocéntricos. (c) Representación de los meridianos y paralelos heliocéntricos en una proyección azimutal equidistante a una latitud de 0° (arriba a la izquierda) y a una latitud de 52.2° (arriba a la derecha). Un acercamiento al punto centrado se muestra en las imágenes de abajo respectivamente. Nótese que las coordenadas que se manejan sobre el mapa son X_p y Y_p . Las figuras (c) son tomadas de Corbard et al. [2003].

Ondas de choque: Durante la liberación de energía magnética en una fulguración se presenta movimiento de material coronal. Algo de este material es eyectado hacia el espacio interplanetario mientras que otra fracción se mueve hacia la fotosfera. Este material entrante se termaliza en la corona pero una parte de este alcanza a llegar a la cromosfera donde el rayo de partículas pierde su energía produciendo una emisión en rayos-X duros y calentando el material que está a su alrededor que más tarde se enfriá emitiendo en rayos-X blandos y en H α . Kosovichev and Zharkova [1995, 1998] propusieron que esa interacción entre las partículas entrantes y el plasma cromosférico actúa como detonante de una onda de choque que se propaga hacia el interior solar induciendo ondas subphotosféricas. Eventualmente estas ondas alcanzan la fotosfera, después de un proceso de refracción en el interior solar gobernado por el aumento en la densidad con el aumento en la profundidad y, por lo tanto, un cambio en el valor de índice refracción n , y entonces son vistas como ondas circulares expansivas sobre un mapa de diferencias Doppler.

Backwarming radiation: En español sería algo así como “sobrecalentamiento por radiación”. El hecho de que la densidad en la cromosfera aumente con la profundidad plantea algunas interrogantes con respecto a la viabilidad de la anterior propuesta, ya que la onda de choque podría ser absorbida rápidamente a causa del cambio drástico del medio en el que se propaga y de esa manera jamás alcanzaría la fotosfera. Las observaciones hechas por el grupo de Donea, Lindsey, Cally, Moradi, Besliou, Martínez-Oliveros [Donea and Lindsey, 2005, Moradi et al., 2007] han mostrado que una gran cantidad de *sunquakes* han estado fuertemente

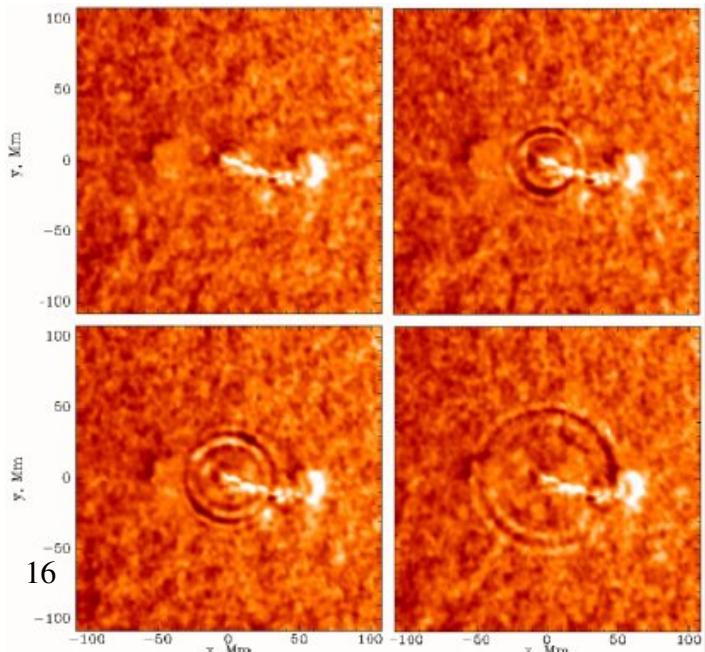
correlacionados con un aumento apreciable en la emisión de luz blanca en el sector.

El mecanismo de generación de *sunquakes* debido al “sobrecalentamiento por radiación” fue propuesto por primera vez por el grupo de Machado et al. [1989]. En este mecanismo se plantea que los electrones altamente energéticos junto con los fotones asociados a los rayos-X alcanzan la fotosfera y rápidamente calientan el material produciendo un aumento considerable en la emisión de luz blanca. Se supone que es la presión de radiación involucrada en este proceso la responsable de generar ondas que se propagan en el interior solar y que posteriormente son vistas en la fotosfera. Para que se presente este tipo de dinámica se necesita que una gran cantidad de energía actúe como detonador del sismo. Las fulguraciones fuertes, como lo son las tipo X o las tipo X10, almacenan la suficiente energía como para que en su liberación esta hipótesis sea un escenario viable en el proceso de generación de la fuente sísmica; sin embargo, hace suponer la imposibilidad de observar señales sísmicas asociadas a fulguraciones más débiles, lo cual, como sabemos, ha sido refutado por trabajos como el de Martínez-Oliveros et al. [2007].

Colisión directa de partículas: Algunas observaciones ([Donea and Lindsey, 2005, Zharkova and Zharkov, 2007]) han mostrado una fuerte correlación entre la sismicidad de regiones activas y la emisión en rayos gamma. Este tipo de emisión es producida por protones altamente energéticos, acelerados desde el punto de reconexión del evento de fulguración, al colisionar con el material fotosférico (se cree que es en la fotosfera y no en la cromosfera debido a la densidad alta necesaria para producir el frenado del haz de protones incidentes). La energía y el momentum llevados por los protones es suficiente para dar cuenta del exceso visto en luz blanca. Este mecanismo puede generar una presión de radiación y un trabajo mecánico como para ser un mecanismo responsable de producir una fuente sísmica y posteriormente dar pie a la propagación de las ondas acústicas. Los detalles de este mecanismo están ampliamente explicados en Zharkova and Zharkov [2007]. El argumento más fuerte que va en contra de esta propuesta es la visualización de actividad sísmica en fulguraciones que no tienen evidencia de un gran número de protones acelerados, es decir, con ausencia de emisión en rayos-gamma [Martínez-Oliveros et al., 2007].

McClymont jerk (variación del campo magnético): Este mecanismo es discutido ampliamente en Hudson et al. [2008]. En este se plantea que son los cambio en la topología y en la intensidad del campo magnético a lo largo de una fulguración, los responsables de la generación del sismo solar.

Las fulguraciones son eventos dinámicos que involucran cambios significativos en la configuración del campo magnético coronal. La consecuencia más inmediata es el colapso del bucle coronal hacia una configuración más estable (más horizontal). Si este proceso se lleva a cabo con la suficiente rapidez podría llegar a generar trabajo mecánico sobre la superficie solar, y por ende, podría ser un buen candidato en la consideración de la generación de la fuente de señales acústicas. Esta dinámica posible fue bautizada como el *McClymont jerk* por Hudson et al. [2008]. Lo interesante de esta propuesta es que se aleja de



hipótesis de que es la interacción de las partículas incidentes el detonante de ondas sísmicas; sin embargo, aún hoy en día es un tema de álgida discusión en los diferentes eventos que se celebran en torno a estos temas.

¿Cuál de todas estas propuestas resulta ser la más eficiente y adecuada para describir el proceso mediante el cual se deposita la energía necesaria para la generación del sismo? Es una pregunta que es muy difícil de responder y que solo las observaciones, cada vez de mayor calidad, podrán dar luz al respecto. Quizás todo se trate de una solución salomónica en la que dependiendo de las condiciones físicas que definen la prefulguración uno o varios de estos mecanismos pueden dominar el efecto de generar la fuente acústica. En el desarrollo que se presenta aquí trabajamos sobre la hipótesis de que es justamente el jet de partículas incidentes el mecanismo sobre el cual se podría asociar la generación de uno de estos *sunquakes*; pero hemos de establecer la forma en que se deben acelerar estas partículas (electrones) que en nuestro caso será siguiendo una dinámica estocástica.

Método de limpieza de observaciones hechas desde tierra

Después de que Kosovichev and Zharkova [1998] reportaran el primer “*tsunami*” solar, muchos otros científicos centraron su atención en tratar de encontrar más eventos como este asociados a fulguraciones solares muy energéticas, con el ánimo de tratar de dar una explicación física a la generación de la fuente sísmica mediante un acercamiento más bien estadístico. En esta dirección, Donea et al. [2006a] desarrollaron una prospección sobre las fulguraciones más energéticas que ocurrieron durante el máximo del ciclo solar 23 encontrando cerca de 13 eventos sísmicos. Para hacer esta inspección, ellos hicieron uso de las imágenes obtenidas por la red de telescopios en tierra GONG++ y aplicaron la técnica de *holografía heliosismológica* descrita anteriormente. Sin embargo, y como es bien conocido por todos los astrónomos observacionales, el hacer observaciones desde tierra implica tener que considerar los efectos que tiene la turbulencia atmosférica sobre las imágenes obtenidas. En el caso solar esto no es una excepción, y más teniendo en cuenta que para poder distinguir las ondas que se propagan sobre la superficie solar se necesita una resolución espacial alta en las imágenes, de al menos unos tres segundos de arco, además de un alto contraste regido por la razón señal ruido que para el caso de los *sunquakes* es del orden de ~ 10 , en imágenes filtradas por frecuencia, típicamente centradas en 5 mHz con un pasabandas de 2 mHz [Kosovichev, 2006]. Esta red de observatorios nos ha provisto de fotogramas, Dopplergramas y magnetogramas del Sol calmo de calidad muy alta, pero la limitación que tiene a la hora de analizar imágenes de regiones activas es justamente la consecuencia de la turbulencia atmosférica sobre la imagen final integrada en un minuto de tiempo (imperfecciones por “*seeing*”). En Sol calmo las variaciones debidas a la turbulencia no son percibidas apreciablemente pues no hay una señal fuerte sobre la que puedan influir de sobremanera. Sin embargo, cuando hay un gradiente alto en las intensidades registradas, como es el caso de una región activa, se genera un ruido que altera las señales sísmicas que se quieren analizar haciendo que el implementar los métodos heliosismológicos sobre las regiones activas se vuelva algo impráctico a primera vista.

Algoritmo paramétrico de corrección por turbulencia (PASCAL)

Lindsey and Donea [2008] han ideado un algoritmo que aplicado sobre las imágenes terrestres obtenidas con GONG++, es capaz de distinguir una señal sísmica sobre el ruido de la imagen producto de la turbulencia. Este método es aplicable a observaciones que han sido integradas por un periodo de tiempo largo comparado con el tiempo característico del “*seeing*” (~ 10 ms). Teniendo en cuenta que la cadencia de los instrumentos de esta red es de **un minuto**, este método resulta ser adecuado a fin de “limpiar” las imágenes crudas que salen del telescopio siempre y cuando se tenga un excelente control sobre el guiado (“*tracking*”) de las imágenes, lo cual para el caso del Sol se puede hacer muy bien con ayuda del limbo solar.

Aunque este método de limpieza ha sido aplicado a una cantidad apreciable de estudios heliosismológicos [Donea et al., 2006b, Martínez-Oliveros, 2009, Martínez-Oliveros et al., 2008a,b,c, Matthews et al., 2011, Zharkov et al., 2011], no se le ha acuñado aún un término para referirse a este método en la literatura. Se ha aprovechado este trabajo y un artículo que está en preparación para postular el nombre sugerido por *Charles Lindsey*: **PASCAL** que son las siglas en inglés de “**PArametric Smearing Correction ALgorithm**”. Este método supone que después de un minuto de integración (que es la cadencia típica de los instrumentos de GONG) las perturbaciones atmosféricas pueden ser consideradas como isotrópicas, cosa que facilita mucho el planteamiento de un tratamiento práctico sobre las imágenes y que no está lejos de la realidad pues un minuto de integración significa unas dos mil variaciones de la imagen que se registra debido al *seeing* atmosférico.

Supongamos que $I(\mathbf{r})$ representa la intensidad real del objeto sobre la imagen cruda que se obtiene del instrumento, mientras que $I'(\mathbf{r})$ representa la intensidad observada (es decir la imagen real convolucionada con el ruido atmosférico integrado en un minuto). $S(\mathbf{r})$ representará la función (isotrópica) de la perturbación atmosférica. Todas estas cantidades dependen de \mathbf{r} que es la ubicación de un punto sobre la imagen cruda. De esta manera se tiene que

$$I' = (S * I) \quad (8)$$

$$SI = (S * I). \quad (9)$$

Este operador de perturbación, S , debe contener los efectos que la atmósfera tiene sobre las imágenes en su totalidad.

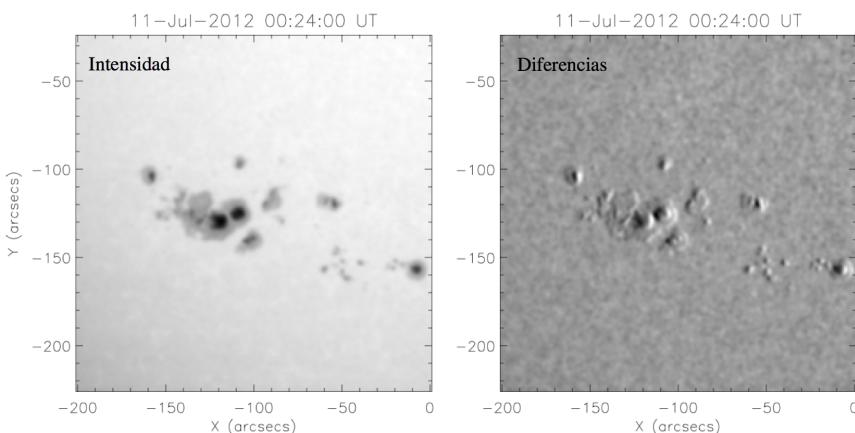


Figure 10: Región activa NOAA 11520 que fue visible desde tierra desde el 6 de Julio hasta el 17 de Julio de 2012. Esta mancha solar se caracterizó por ser tan grande que fue posible observarla con los

Estos efectos se pueden representar en dos dinámicas básicas. Una traslación estocástica de la región de interés, que aquí se representa mediante un vector desplazamiento $\vec{\alpha}$ definido sobre el plano de la imagen, y una deformación (difusión) de la imagen debido a la diferencia de los caminos ópticos de los rayos provenientes del objeto de ciencia extendido, que en nuestro caso es el disco solar, y que supondremos se caracteriza por un parámetro β . De esta manera el operador \hat{S} se puede expresar como la

suma de un término convectivo y un término difusivo que actúan sobre la señal real:

$$\hat{S}(\mathbf{r}) = \hat{1} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta \nabla^2 \quad (10)$$

Para poder aplicar el método se hacen dos suposiciones adicionales: Se supone que las perturbaciones generadas sobre la imagen producto del *seeing* atmosférico son isotrópicas y que el tamaño de estas son significativamente más pequeñas que el tamaño del objeto

de ciencia. Gracias a estas suposiciones podemos agrupar el término convectivo dentro del término difusivo y tratar la perturbación como un efecto que actúa de la forma $\hat{S} = \hat{1} + \beta' \nabla^2$, de manera que aplicado sobre la imagen *real* tenemos:

$$\hat{S} I(\mathbf{r}) = I + \beta'(\mathbf{r}) \nabla^2 I(\mathbf{r}) \quad (11)$$

$$I'(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}) + \beta'(\mathbf{r}) \nabla^2 I(\mathbf{r}) \quad (12)$$

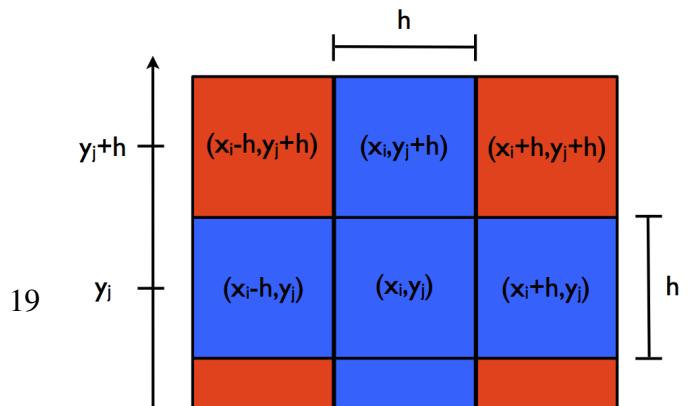
$$\Delta I(\mathbf{r}) = \beta'(\mathbf{r}) \nabla^2 I(\mathbf{r}). \quad (13)$$

En un periodo de tiempo del orden de un par de horas podemos suponer que $\Delta I(\mathbf{r}) = [I'(\mathbf{r}) - I(\mathbf{r})] \approx [I'_{(t_i+1 \text{ min})}(\mathbf{r}) - I'_{t_i}(\mathbf{r})]$, de manera que imágenes de la diferencia entre dos fotogramas consecutivos tomados por GONG++, como la que se muestra en la figura 10, representan muy bien el término difusivo $\beta' \nabla^2 I_i(\mathbf{r})$. El algoritmo que Lindsey and Donea [2008] desarrollaron lo que hace es justamente ajustar las imágenes de diferencias a un laplaciano de la imagen precedente y calcular de esta manera los coeficientes $\beta'(\mathbf{r})$ para cada píxel de la imagen de ciencia y con la cadencia del instrumento, un minuto. De esta manera la tarea se reduce a tener que resolver numéricamente una ecuación de *Poisson* en cada punto de la imagen a la cual previamente se le ha aplicado una proyección *Postel* para garantizar que se está trabajando en un espacio homogéneo e isotrópico. Para resolver la ecuación de *Laplace*, Lindsey and Donea [2008] aplicaron el método de *diferencias finitas* inicialmente con un esquema de **5 puntos** para la descomposición del *Laplaciano* que parece en la ecuación de *Poisson*.

Algoritmo numérico para el cálculo del laplaciano de una función bidimensional

Modernamente las imágenes solares se registran en arreglos bi-dimensionales finitos de píxeles en cámaras CCDs; usualmente, estas cámaras tienen escalas iguales en ambos ejes, los cuales denotamos como ejes x, y . Al trabajar sobre estos arreglos podemos expresar al laplaciano como

$$\nabla^2 I(\mathbf{r}) = \nabla^2 I(x, y) \approx f(x, y), \quad (14)$$



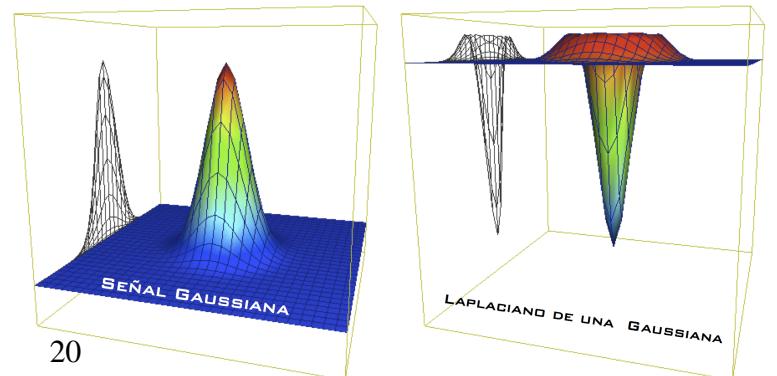
en donde se define $f(x, y) = \frac{\Delta I(x, y)}{\beta'(x, y)}$, asumiendo además que las variables cartesianas x, y son linealmente independientes. El cálculo numérico del laplaciano en un punto interior del fotograma bajo estudio tiene ocho puntos vecinos. Existen dos posibilidades sencillas del cálculo del laplaciano; uno que contempla los píxeles en el vecindario inmediato de columna y fila, a los cuales llamaremos de aquí en adelante los primeros vecinos, y que se ilustran en azul en la figura 11. El otro método considera al vecindario inmediato completo, es decir, tanto los cuadros azules como rojos de la figura 11. Al laplaciano calculado en el primero de los casos lo llamaremos el *laplaciano de 5 puntos*. Este se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \nabla^2 I(x_i, y_j) \approx & I(x_i + h, y_j) + I(x_i - h, y_j) \\ & + I(x_i, y_j + h) + I(x_i, y_j - h) \\ & - 4I(x_i, y_j) = h^2 f(x_i, y_j), \end{aligned} \quad (15)$$

en donde h es el tamaño del lado del cuadrado de un píxel que por razones de simplicidad en la implementación del método numérico se tomó como uno. Esta forma de calcular el laplaciano es haciendo uso de los primeros vecinos del píxel ubicado en (x_i, y_j) obteniendo una precisión de segundo orden en h . Si se quiere hacer este mismo cálculo pero incluyendo además a los segundos vecinos del píxel evaluado (cuadros rojos de la figura 11), entonces se procede implementando lo que se conoce como el cálculo del laplaciano con **9 puntos**, de forma que se tiene [Van de Vooren and Vliegenthart, 1967]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 I(x_i, y_j) = & f(x_i, y_j), \\ & I(x_i + 1, y_j + 1) + I(x_i + 1, y_j - 1) + I(x_i - 1, y_j + 1) + I(x_i - 1, y_j - 1) + \\ & + 4 [I(x_i + 1, y_j) + I(x_i - 1, y_j) + I(x_i, y_j + 1) + I(x_i, y_j - 1)] - 20 I(x_i, y_j) = 6f(x_i, y_j). \end{aligned} \quad (16)$$

Una vez hallados los $f(x_i, y_j)$ sobre toda la grilla, es posible determinar el valor de los β' para cada píxel mediante $\beta'(x_i, y_j, t_k) = \frac{\Delta I(x_i, y_j, t_k)}{f(x_i, y_j, t_k)}$, y de esta manera construir el operador \hat{S} definido en (11) para finalmente aplicarlo como método de limpieza a la totalidad de las imágenes. Todos los trabajos desarrollados hasta este momento en los que se desarrollan análisis heliosismológicos usando imágenes de la red GONG han implementado el método PASCAL calculando un laplaciano de 5 puntos [Donea et al., 2006b, Lindsey and Donea, 2008, Martínez-Oliveros, 2009, Martínez-Oliveros et al., 2008a,b,c, Matthews et al., 2011, Zharkov et al., 2011]. En este trabajo tomamos los códigos que contienen el método PASCAL trabajados por *Charles Lindsey* y los modificamos de tal manera que el ajuste del laplaciano se hiciera mediante el algoritmo de 9 puntos con el fin de aplicarlo



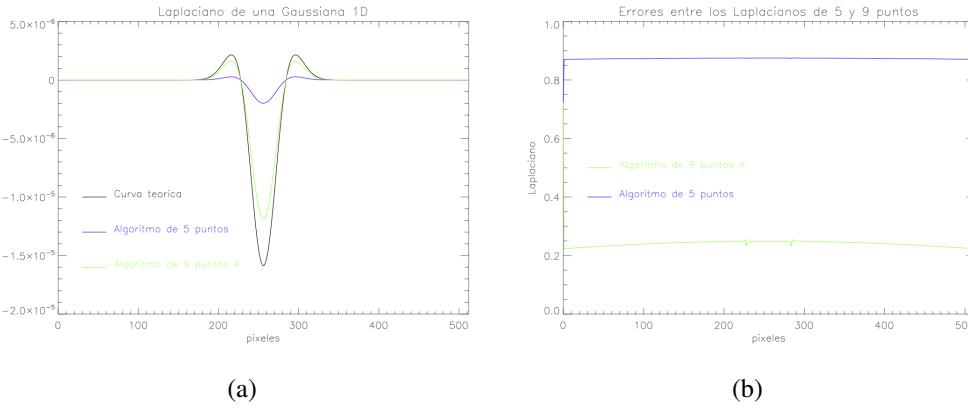


Figure 13: (a) Comparación del cálculo numérico del laplaciano de la señal gaussiana de la figura 12 usando los dos algoritmos, el de cinco (curva azul) y el de nueve (curva verde) puntos, y su comparación con su curva teórica (curva negra). (b) Errores de cada uno de los dos métodos con respecto al valor teórico.

sobre un evento sísmicamente activo, que se conociera muy bien, y poder compararlo con el método que usa 5 puntos en aras de encontrar alguna diferencia, el cual es el objetivo de este capítulo. Para poder comparar estos dos algoritmos, lo primero que se debe hacer es aplicarlos sobre una señal conocida y examinar la precisión asociada a cada uno. La primera prueba que se desarrolla es la aplicación de estos algoritmos sobre una señal *gaussiana*, cuya expresión en dos dimensiones es

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right], \quad (17)$$

y de la cual es posible conocer teóricamente su laplaciano

$$\nabla^2 G(x, y) = -\frac{1}{\pi\sigma^2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right). \quad (18)$$

En la figura 12 se presenta una visualización en 3D (arriba) tanto de la señal gaussiana como la de su laplaciano, de acuerdo con las ecuaciones (17) y (18) respectivamente, con proyecciones planas correspondientes a la variación de intensidad versus la distancia al centro de la gaussiana, y en la parte inferior de la figura se han representado las visualizaciones respectivas en un plano de imagen. Para poder hacer una primera comparación entre los dos métodos usados para calcular numéricamente el laplaciano, se hace un corte horizontal que

contiene al centro de imagen plana del laplaciano, en nuestro caso al centro de la imagen de la figura 12 en la parte baja a la derecha. De esta manera se obtuvieron los perfiles correspondientes al caso teórico como a los dos casos calculados con base en los laplacianos de cinco y de nueve puntos. En la figura 13 la línea negra da cuenta de la curva teórica calculada para el laplaciano de una señal gaussiana bidimensional, mientras que las líneas azul y verde representan el cálculo numérico desarrollado sobre la gaussiana que se muestra en la parte baja de la figura 13 haciendo uso de los métodos de cinco y nueve puntos respectivamente. Claramente, el ajuste con nueve puntos se acerca mucho mejor a la curva teórica de lo que lo hace el algoritmo con cinco puntos, como era de esperarse. En la parte (b) de la figura 13 se muestran, además, los errores porcentuales punto a punto de cada uno de los dos métodos; en dicha gráfica se puede apreciar la mejor precisión del método de nueve puntos. Ahora bien, una función gaussiana bidimensional es homogénea e isotrópica con respecto a su punto central, pero, ¿qué pasaría si ahora aplicamos estos dos mismos métodos de cálculo numérico sobre una función que no tenga este par de características? Para dar respuesta a esta pregunta, se plantea un tratamiento previo a la señal gaussiana que se dividirá en dos pasos. El primero consta en amplificar la función gaussiana a lo largo del eje x en un factor 2 y a comprimirla a lo largo del eje y en un factor $1/2$, y como segundo paso, se calcula nuevamente su laplaciano, tanto teórica como numéricamente. El resultado es algo como lo que se muestra en la figura 14. En esta figura se muestra la función gaussiana achata (a), su respectivo laplaciano teórico (b), el laplaciano numérico calculado mediante el algoritmo de cinco puntos (c), y el laplaciano numérico calculado mediante el algoritmo de nueve puntos (d). Allí se evidencia un diferencia notoria entre el laplaciano teórico y los laplacianos numéricos, hacia los extremos de la función a lo largo del eje horizontal.

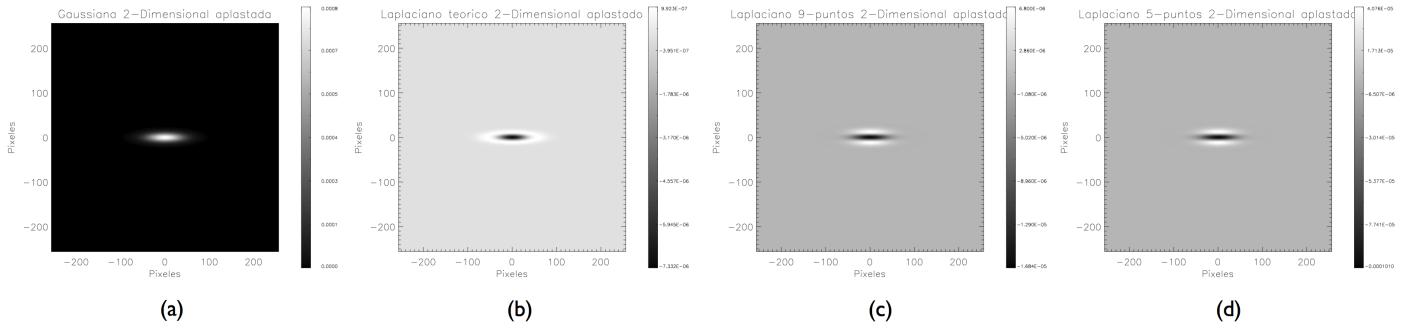


Figure 14: (a) Función gaussiana bidimensional achata a lo largo del eje vertical y alargada a lo largo del eje horizontal. (b) Laplaciano teórico de la función gaussiana de la izquierda calculada mediante la implementación adecuada de la ecuación (18). (c) Laplaciano numérico calculado mediante la implementación del algoritmo de cinco puntos. (d) Laplaciano numérico calculado mediante la implementación del algoritmo de nueve puntos.

Dicha discrepancia es debida a que los algoritmos que se están usando para el cálculo numérico del laplaciano son definidos para ser trabajados sobre señales (funciones) *homogéneas*, y claramente la función gaussiana achata de la figura 14(a) no lo es. Dado este escenario, se ve la necesidad de modificar de alguna manera los algoritmos que calculan el laplaciano de manera que se consideren en ellos las formas inhomogéneas de las señales bajo estudio. En esta dirección se propone asignar pesos diferentes a los píxeles vecinos de cada píxel sobre el que se lleva a cabo el cálculo numérico de manera que se contrarresten los efectos de la

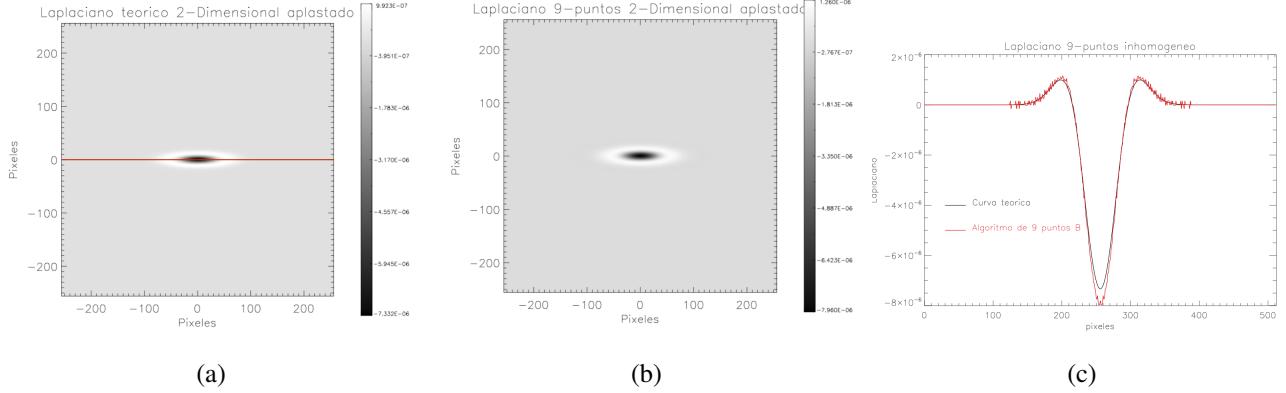


Figure 15: (a) Laplaciano teórico de la gaussiana achataada de la figura 14. La línea roja indica la región escogida para hacer los perfiles que se muestran en (c). (b) Laplaciano de nueve puntos con pesos asignados por la ecuación 20 con $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.0$ y $\gamma = 0.0$. (c) Perfiles de comprarción de los dos laplacianos. la curva negra es el perfil teórico y la roja es el perfil obtenido mediante el algoritmo de 9 puntos con pesos en sus primeros vecinos. Se error obtiene un error del 15%, en promedio, entre las dos curvas.

geometría no homogénea de la función.

Así, el nuevo algoritmo se expresaría mediante

$$\begin{aligned} \nabla^2 I(x_i, y_j) &= f(x_i, y_j), \\ f(x_i, y_j) &= \alpha[I(x_i, y_j + 1) + I(x_i, y_j - 1) - 2I(x_i, y_j)] \\ &\quad + \beta[I(x_i + 1, y_j) + I(x_i - 1, y_j) - 2I(x_i, y_j)] \\ &\quad + \frac{\gamma}{4}[I(x_i + 1, y_j + 1) - I(x_i - 1, y_j + 1) - I(x_i + 1, y_j - 1) + I(x_i - 1, y_j - 1)], \end{aligned} \tag{19}$$

en donde α, β, γ son los parámetros escalares que dan peso a los primeros y segundos vecinos, del píxel sobre el que se realiza el cálculo, a lo largo del eje horizontal, del eje vertical y de los ejes diagonales respectivamente. Para su implementación, por ejemplo, en el caso considerado en la figura 14, un buen ajuste se consigue al definir $\alpha = 0.5$, $\beta = 2.0$ y $\gamma = 0.0$. Un perfil horizontal sobre dicho ajuste con su respectiva comparación con el valor teórico de éste se muestran en la figura 15. De esta figura se evidencia una clara mejoría en el ajuste del método numérico con la curva teórica y se corrobora al hacer el cálculo de su error porcentual de un 15% en promedio.

Siguiendo con la prueba de funcionalidad del cálculo numérico del laplaciano, se plantea ahora rotar la función con respecto al origen coordenado en una cantidad de 45° y 315° como se muestra en la figura 16. Observe que la línea roja trazada en la figura 15 es la misma que aparece en la figura 16. Este método da origen a una señal que emularía a la función gaussiana vista de perfil, es decir, algo así como si esta proviniera de un lugar en la superficie solar más cerca hacia el limbo del disco solar observado desde la tierra. Esto se hace justamente en busca de evaluar la precisión de cada método sobre señales que no necesariamente se hayan

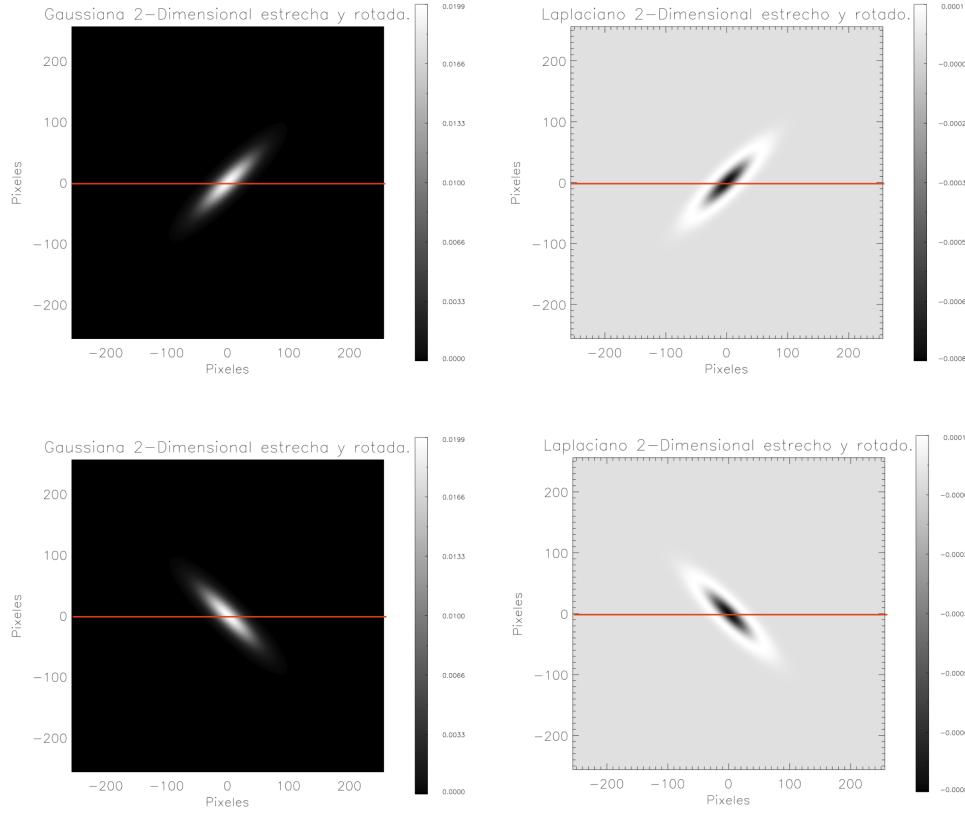


Figure 16: *Izquierda:* Señal gaussiana bidimensional que ha sido estirada y luego rotada. *Derecha:* Laplaciano teórico de cada una de las señales gaussianas a la izquierda. *Arriba:* señal gaussiana rotada 45° . *Abajo:* Señal gaussiana rotada 315° . Las líneas rojas indican el eje de corte escogido para trazar el perfil de cada una de las señales para ser comparados con los algoritmos de cálculo numérico.

presentado en el centro del disco del Sol, pues como es bien sabido una fulguración solar puede presentarse en cualquier región sobre el discosolar. Para la señal de la parte superior de la figura 16, la cual ha sido rotada un ángulo de 45° , tomamos los parámetros $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$ y $\gamma = 1.6$ en aras de contrarrestar el efecto de la proyección y de darle un mayor peso a la dirección diagonal inclinada un ángulo de 45° en el sentido antihorario, obteniendo así el laplaciano numérico bidimensional que se muestra en la parte izquierda de la figura 17. Así mismo, sobre la línea roja horizontal, de esta misma figura, se trazó el perfil de la gaussiana para verificar de manera unidimensional la calidad de su ajuste. Este perfil se muestra al lado derecho de la figura 17. El error promedio de este laplaciano numérico no homogéneo es del 5% con respecto a la curva teórica calculada. Dada la antisimetría del conjunto de términos que da cuenta de las contribuciones diagonales en el cálculo del laplaciano numérico dado por la ecuación 20, se espera que para una gaussiana modificada de la misma manera que esta última que trabajamos pero con una rotación neta de 315° en sentido antihorario los coeficientes que asignan peso a cada píxel de la vecindad inmediata estén dados por $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$ y $\gamma = -1.6$. Al desarrollar este procedimiento se encuentra algo como lo que se muestra en la figura 18 y de igual forma se asocia un error promedio del 5%.

Ahora bien, con este conjunto de pruebas que se han hecho sobre la forma en la que se debe modificar el algoritmo que calcula el laplaciano de nueve puntos sobre una señal que no es homogénea ni isotrópica, y al comprobar su correcto funcionamiento, lo que nos ataña ahora es encontrar la forma en la que estos coeficientes α , β y γ , que dan peso a los píxeles de la vecindad dependiendo de la geometría de la señal, deben ser definidos para que este procedimiento de cálculo numérico pueda ser aplicado correctamente sobre una señal física real proveniente de algún lugar sobre la superficie solar. En este orden de ideas debemos relacionar el valor de estos tres coeficientes con una proyección postel que se haga del fotograma tomado del Sol centrado en la región de interés, la región activa asociada a la fulguración que en nuestros casos pudo dar pie a la generación

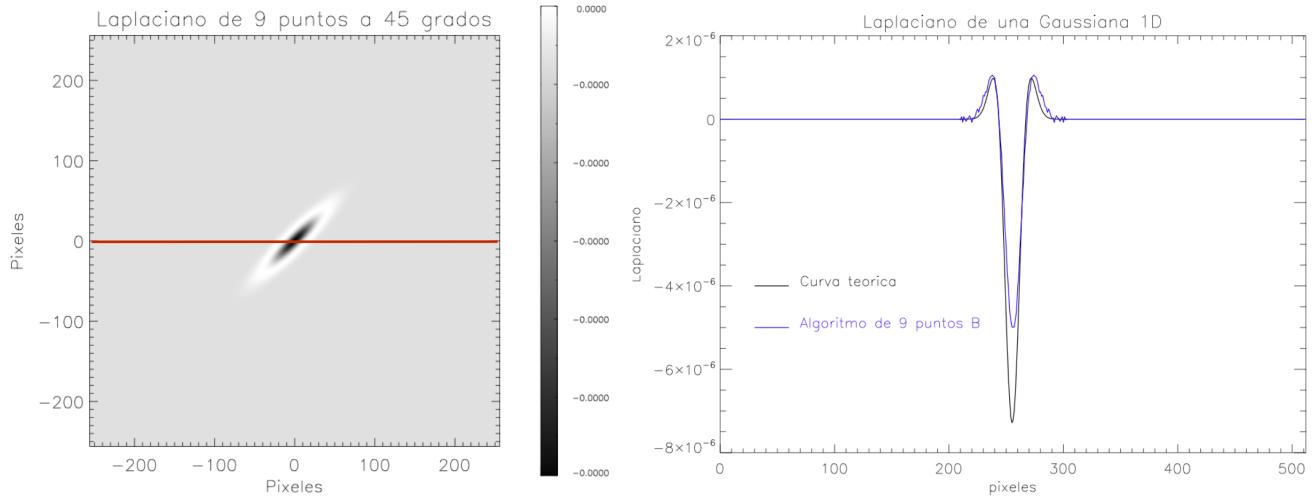


Figure 17: *Derecha:* Laplaciano dos dimensional de una gaussiana achatada y rotada 45° calculado con el algoritmo dado por la ecuación 20 con $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 1.6$. La línea roja indica el lugar por donde se trazó el perfil unidimensional que se muestra en la gráfica de la *izquierda*. El error promedio encontrado entre el ajuste numérico y la curva teórica es del 5%.

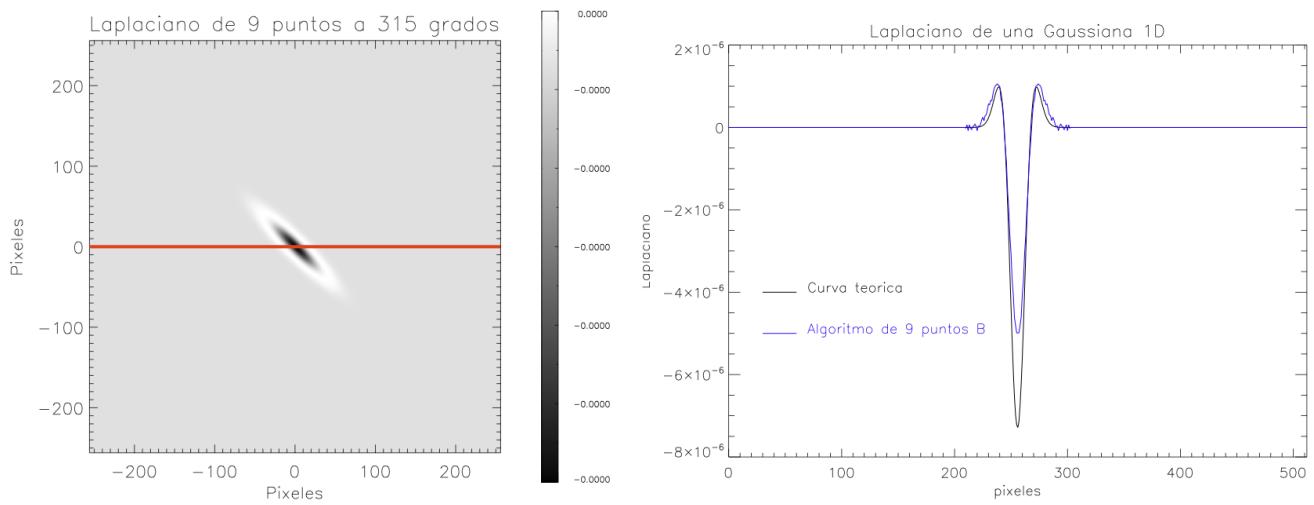


Figure 18: *Derecha:* Laplaciano dos dimensional de una gaussiana achatada y rotada 315° calculado con el algoritmo dado por la ecuación 20 con $\alpha = 1.0$, $\beta = 1.0$ y $\gamma = -1.6$. La línea roja indica el lugar por donde se trazó el perfil unidimensional que se muestra en la gráfica de la *izquierda*. El error promedio encontrado entre el ajuste numérico y la curva teórica es del 5%.

de un helio-sismo.

Proyecciones heliográfica y postel aplicadas a un fotograma solar

La red de telescopios en tierra GONG++ nos ha proveído de fotogramas de muy buena calidad y resolución desde Julio de 2001. Así, se ha convertido en una fuente importante de datos para el desarrollo de análisis basados en las técnicas propias de la heliosismología; nosotros en particular estamos interesados en heliosismología local. Para este tipo de análisis es necesario proveerse de unos arreglos de datos en tres dimensiones conocidos en la comunidad de científicos solares como *cubo de datos*. Esto es, dado el deseo de caracterizar temporalmente una región determinada que se encuentra sobre la superficie solar es necesario hacer un seguimiento de esta al transcurrir el tiempo. De esta manera este conjunto de datos espacio-temporal se puede definir en la práctica mediante el uso de un arreglo (o cubo de datos) de $N_x \times N_y \times N_t$ elementos, en donde N_x y N_y representan el número de elementos en cada una de las dimensiones espaciales, y N_t es el número de pasos temporales. Claramente, la calidad del análisis heliosismológico que se desarrolle va a depender fuertemente de la calidad de la forma en la que se construya dicho cubo de datos, y de aquí la importancia de este procedimiento.

En un marco de referencia geocéntrico el Sol no es para nada un objeto inmutable y/o en reposo. El Sol tiene un movimiento anual de traslación a lo largo de la eclíptica, un movimiento de rotación con respecto a su eje polar y unos movimientos más finos dados por la precesión y nutación de su eje polar. El conjunto completo de estos movimientos debe ser corregido por un seguimiento excelsor de la región de interés en aras de construir un cubo de datos adecuado. Para esto Lindsey and Braun [2000] han propuesto un par de transformaciones, una transformación heliográfica acompañada de una proyección *Postel*, en el marco de la definición de su método propio de *holografía acústica*.

La primera transformación que se lleva a cabo es una transformación de coordenadas heliográficas a coordenadas cartesianas heliocéntricas. Para esto es necesario conocer la longitud de *Carrington*, $L_{ij}(t_k)$, y la latitud heliográfica⁷, $B_{ij}(t_k)$, para todo elemento con coordenadas i, j en todo t_k , en donde $i \in N_x$, $j \in N_y$ y $t_k \in N_t$. Esto es posible, si en particular se conocen las coordenadas de Carrington de un determinado punto sobre el disco solar. Para este fin, cada uno de los observatorios de la red GONG++ registra en los *encabezados* de los archivos fits las coordenadas de *Carrington* instantáneas del punto *sub-tierra*, que es aquel punto que se genera en la intersección de la la superficie solar con la línea recta que une al centro de la tierra con el centro del Sol (instantáneos) cada vez que se toma un fotograma. Esto, salvo un pequeño error por paralaje, coincide con el punto ubicado en el centro del disco solar definido sobre las imágenes que se toman. De esta manera, para poder hacer una descripción completa es necesario definir un tiempo de referencia para el punto central: $M_0 = M_{00}(t_0)$ dado por $B_0 = B_{00}(t_0)$ y $L_0 = L_{00}(t_0)$. Además, se necesita definir un conjunto de imágenes ordenadas temporalmente según el momento en el que fueron tomadas y separadas por el tiempo característico dado por la cadencia de los instrumentos que se están usando para la medida (en el caso de GONG la cadencia es de un minuto). Así, $t_k = t_0 + k\Delta t$ donde Δt es la cadencia característica de los instrumentos y $k = -N_t/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_t/2$.

⁷Estas coordenadas son conocidas como las *coordenadas de Carrington*. Estas coordenadas son una variación del sistema coordenado heliográfico que rota a una velocidad angular igual a la tasa de rotación media del Sol tal y como fue definido originalmente por Carrington (1863). El periodo sideral del sistema de Carrington es de 25.38 días, lo cual implica un periodo sinódico de 27.2753 días. [Thompson, 2006]

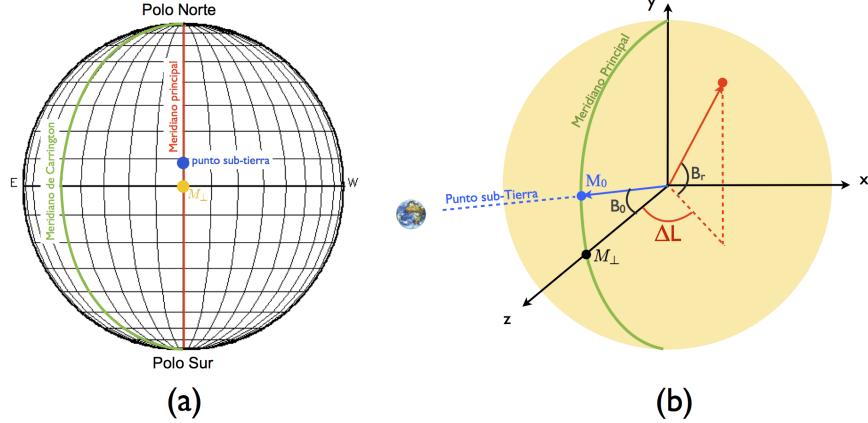


Figure 19: (a). Representación gráfica del *punto sub-tierra* (en azul), el meridiano principal (en rojo), el meridiano de Carrington (en verde) y el punto de intersección entre el meridiano principal y el círculo máximo perpendicular a él en un marco de referencia heliográfico cuya grilla se indica en negro. (b) Sistema coordenado cartesiano en tres dimensiones, con origen en el centro del solar, en donde se definen el punto *sub-tierra* (punto azul sobre la superficie), el meridiano principal (semicírculo verde), y el punto M_{\perp} en la intersección entre el meridiano principal y el círculo máximo heliocéntrico perpendicular al eje y. Un punto arbitrario sobre la superficie solar se puede ubicar mediante la asignación de valores ΔL y B_r .

Además, denotamos como R al sistema de coordenadas heliográficas de *Carrington*, sobre él M_0 es el punto *sub-tierra*, M representa al meridiano principal (en inglés *prime meridian*), el cual se define como el semicírculo máximo que une a los dos polos heliográficos y que contiene a M_0 . El punto M_{\perp} se define como la intersección entre el meridiano principal y el círculo máximo trazado sobre la heliosfera perpendicular a él (*ecuador solar*), tal como se esquematiza en la figura 19(a). Podemos introducir un sistema cartesiano de coordenadas con origen en el centro del Sol, cuyo eje y está orientado a lo largo del eje polar, y el eje z está orientado en la dirección radial hacia el punto M_{\perp} . Una transformación entre las coordenadas heliográficas esféricas, por el momento con radio unitario, y las coordenadas cartesianas definidas arriba, viene dada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos B_{xy} \sin L_{xy} \\ \sin B_{xy} \\ \cos B_{xy} \cos L_{xy} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

esto para un determinado tiempo t_k . Ahora bien, la necesidad de manipular las imágenes del Sol de forma tal que queden perfectamente alineadas una detrás de la otra a la hora de construir el cubo de datos nos enfrenta a la necesidad de corregir las imágenes por el conjunto completo de movimientos que afectan a la visual del disco solar minuto a minuto en el registro de los fotogramas, además de hacer una proyección *Postel* correcta sobre la región de interés. Supongamos que nuestra región de interés está en una posición arbitraria sobre el disco solar, como se representa mediante el punto rojo en la figura 19(b). A dicho punto le corresponden

las coordenadas heliográficas L_r (longitud de *Carrington*) y B_r (latitud de *Carrington*). Así, en el sistema coordenado R de la figura 19(b) las coordenadas heliocéntricas de dicha región van a estar dadas por

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos B_r \sin \Delta L \\ \sin B_r \\ \cos B_r \cos \Delta L \end{pmatrix}, \quad (21)$$

en donde ΔL es la diferencia entre las longitudes de *Carrington* del punto r y el punto *sub-tierra* M_0 . Ahora bien, un sistema coordenado R' con origen en el centro del Sol y cuyo eje z' se dirige a lo largo del punto *sub-tierra* se puede definir a través de las coordenadas en R mediante una rotación coordenada sencilla a lo largo del eje x , como se esquematiza en la figura 20. De esta manera, las coordenadas de nuestra región de interés representadas en el sistema coordenado R' estarán dadas por:

$$\begin{pmatrix} x'_r \\ y'_r \\ z'_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos B_0 & -\sin B_0 \\ 0 & \sin B_0 & \cos B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Como la región para analizar se puede ubicar en cualquier posición sobre la superficie solar, se sigue inmediatamente que este conjunto de ecuación es extrapolable a cualquier punto arbitrario, obteniendo de esta manera las ecuaciones expuestas en (7).

$$\cos \theta' \sin \varphi' = \cos B_r \sin \Delta L \quad (23)$$

$$\sin \theta' = -\cos B_r \sin B_0 \cos \Delta L + \sin B_r \cos B_0$$

$$\cos \theta' \cos \varphi' = \cos B_0 \cos B_r \cos \Delta L + \sin B_0 \sin B_r.$$

Con esto se logra alinear apropiadamente todos los fotogramas en la muestra temporal N_t de manera que ya es posible construir el cubo de datos sin problemas, ya que existe un movimiento relativo Sol-observador debido tanto a la rotación del Sol como al movimiento del observador mismo en su descripción helioéntrica, de modo tal que para cada instante de tiempo se asume que se conocen L_0 y B_0 de las efemérides físicas del Sol. En seguida, la tarea consiste en llevar a cabo la proyección *Postel* de este último sistema coordenado cartesiano R' al plano imagen del fotograma, y para esto hacemos uso de las expresiones mostradas en (6).

Siguiendo lo visto en el capítulo anterior, es necesario considerar la posición de la región de interés sobre el disco solar para poder asignar los pesos correctos al algoritmo de cálculo del laplaciano de nueve puntos (20) y de esta manera implementar el método de limpieza PASCAL sobre las imágenes de ciencia sin ningún inconveniente. En esta dirección, lo que se hace es definir cuatro parámetros $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ que forman parte de la matriz \mathbf{A} definida de la siguiente manera:

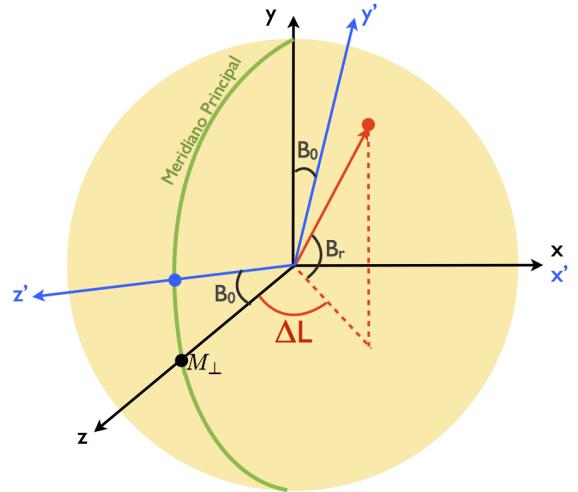


Figure 20: Definición de un sistema coordenado R' , de coordenadas x', y', z' , en azul, que está rotado un ángulo B_0 con respecto al eje x del sistema R (en negro).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\sin B_0 \sin B_r \cos \Delta L + \cos B_0 \cos B_r] & \sin B_r \sin \Delta L \\ -\sin B_0 \sin \Delta L & \cos \Delta L \end{pmatrix} \frac{1}{z'_r}, \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv a_{11}^2 + a_{12}^2 \\ \beta &\equiv a_{11}^2 + a_{12}^2 \\ \gamma &\equiv 2(a_{11}a_{21} + a_{22}a_{12}). \end{aligned} \quad (25)$$

Nótese que si la región de interés se ubica justamente en el centro del disco solar de los fotogramas, es decir, se satisface $\Delta L = 0$ y $B_r = B_0$, se cumple que $\alpha = 1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$; lo que era de esperarse pues en este caso la región de interés sería localmente homogénea e isotrópica y por lo tanto la expresión (20) se reduce al algoritmo dado por (15) con $h = 1$.

Implementación del método PASCAL sobre una muestra de fulguraciones energéticas

Como se mencionó anteriormente, en la sección de Sismicidad asociada a las fulguraciones solares, se han reportado eventos de fulguraciones solares sísmicamente activas con una correlación local fuerte de una emisión grande y repentina en luz blanca. Donea et al. [2006b] reportaron por primera vez una coincidencia fuerte entre la ubicación de la fuente sísmica, determinada a partir de los mapas de egresión construidos a través de la técnica de holografía acústica, y tres núcleos compactos y bien definidos de emisión en luz blanca para un evento que tuvo lugar el 9 de Septiembre de 2001 a las 20:40 TU. Esto último soporta la hipótesis de que el calentamiento repentino de la fotosfera es un proceso que podría estar ligado a la generación repentina de una onda mecánica transitoria que podría, a su vez, estar relacionada con la aparición de una fuente sísmica. Algunos autores han propuesto diferentes mecanismos posibles que tratan de dar una explicación plausible de los procesos físicos que podrían estar involucrados detrás del calentamiento repentino de la fotosfera. Por ejemplo, Donea and Lindsey [2005] y Zharkova [2008] argumentan que el calentamiento de la fotosfera podría ocurrir por la interacción directa de protones energéticos y/o electrones *altamente* energéticos con el ambiente del plasma local. Particularmente Zharkova [2008] le da una prelación importante a los protones, por encima de los electrones, por su poder alto de penetración en la materia. Sin embargo, algunos otros trabajos [Kosovichev, 2007] sugieren que los protones acelerados no constituyen una fuente adecuada para dar pie a una respuesta hidrodinámica en el plasma de la atmósfera solar, y por lo tanto difícilmente podrían estar relacionados con la generación de la fuente sísmica asociada a un *sunquake* y, a su vez, con el aumento en la emisión de luz blanca altamente localizada tanto espacial como temporalmente. Aunque en estos trabajos se sugiere el *back-warming* como posible mecanismo responsable de la emisión en luz blanca que aquí se menciona, otros trabajos ponen en duda cualquier clase de correlación entre estos dos fenómenos [Isobe et al., 2007, Potts et al., 2010].

De cualquier manera, y sea como sea que el aumento en la emisión de luz blanca asociada a fulguraciones solares sea producida, trabajos relativamente recientes [Donea et al., 2006b, Pedram and Matthews, 2012] han

mostrado una correlación aparente entre la emisión en luz blanca y algunos heliosismos observados durante la fase impulsiva (definida en la banda de los rayos-X suaves) de aquellas fulguraciones alta o moderadamente energéticas que tuvieron lugar a lo largo del ciclo solar 23. Esto hace que las fulguraciones a las que se les asocia una emisión fuerte en luz blanca se conviertan en buenos candidatos a la hora de buscar eventos fulgurantes sísmicamente activos, además de poder utilizarlos adecuadamente en el estudio y entendimiento de la generación y dinámica de los *sunquakes*.

Por otro lado, en el trabajo extensivo de buscar y caracterizar fulguraciones solares sísmicamente activas, todo un conjunto de trabajos que usan las técnicas de holografía acústica y de diagrama de tiempo-distancia [Alvarado-Gómez et al., 2012, Besliu-Ionescu et al., 2005, Donea et al., 2006b, Kosovichev, 2006, 2007], han encontrado un buen número de eventos en los que las señales sísmicas están altamente correlacionadas, tanto temporal como espacialmente, con la aparición de fuentes compactas de emisión en rayos-X duros. Estas observaciones han dado pie a otras tantas explicaciones que tratan de dar cuenta de los mecanismos físicos propios de la fenomenología que se esconde detrás de la generación de los heliosismos. Por ejemplo, Zharkova [2008] sugiere que la emisión en rayos-X duros de todos estos eventos están relacionados de alguna manera con la precipitación hacia capas más internas del Sol de partículas altamente energéticas y su posterior depósito de energía en estas regiones.

Dada la importancia de las fulguraciones con una emisión alta en luz blanca, así como en rayos-X duros en el estudio de los *sunquakes*, se decidió implementar los códigos de limpieza del método PASCAL sobre una muestra de fulguraciones que en lo posible tuvieran estas dos características, así como la de estar localizadas cerca del centro del disco solar en donde los Dopplergramas ofrecen una confiabilidad mayor. Además, decidimos centrar nuestra atención sobre los eventos ocurridos en lo que llevamos del ciclo solar 24, pues es el periodo temporal que en estos momentos nos ofrece el mayor número de fulguraciones sin explorar. En esta dirección, se empezó por hacer un filtrado de la lista completa de fulguraciones observadas por el instrumento espacial RHESSI. Para ello, acudimos a la lista publicada permanentemente en <http://hesperia.gsfc.nasa.gov/rhessi2/home/data-access/rhessi-data/flare-list/>, y tomamos aquellas fulguraciones que hayan registrado una emisión discernible por los detectores en energías por encima de los 50 keV y que hayan tenido lugar en el periodo comprendido entre el 1 de Enero de 2010 y el 30 de Julio de 2012⁸. De esta manera obtuvimos un total de 51 eventos, de los cuales sólo 28 tenían una ubicación cercana al centro del disco solar adecuadas para desarrollar un análisis heliosismológico. Es de señalar además que de estas últimas 28 fulguraciones 4 registraron una emisión discernible por RHESSI en la banda de los 100 keV a los 300 keV. Para escoger estas 28 fulguraciones se procedió a calcular su distancia al centro del disco solar haciendo uso de las coordenadas heliocéntricas [Thompson, 2006] de la fulguración dadas por RHESSI. Los 28 eventos que se muestran en el cuadro 1 son tales que su distancia al centro del disco solar es menor que 600 segundos de arco.

El paso siguiente fue buscar los respectivos fotogramas en intensidad de cada uno de los eventos de la tabla 1. Esto se hizo a través del servidor oficial de la red GONG++, <http://gong2.nso.edu/archive/patch.pl?menutype=s>. No todos los eventos fueron observados por los telescopios de la red, algunas veces por malas condiciones atmosféricas, así como por algún posible problema en la calibración de los datos. De aquí que solamente los **10** eventos que se señalan en el cuadro 1 son de los que se tienen datos de estos instrumentos. Así mismo, se

⁸El 30 de Julio de 2012 fue el último día en que se revisó la lista de fulguraciones de RHESSI en el marco de esta tesis. Claramente como para esta fecha aún no estamos en el máximo de actividad solar de este ciclo, se espera que en fechas posteriores se encuentren más fulguraciones con las características que buscamos.

aprovecha el cuadro 1 para señalar aquellos eventos para los cuales el *Helioseismic and Magnetic Imager* a bordo del *Solar Dynamic Observatory*, y del que hablaremos más adelante en detalle, registró datos.

Table 1: Lista de fulguraciones altamente energéticas registradas por RHESSI en rayos-X duros, con emisiones por encima de los 50 keV, durante el periodo comprendido entre el 1 de Enero de 2010 y el 30 de Julio de 2012. La primera columna numera cronológicamente los eventos, la segunda columna muestra la fecha en la que ocurrieron; las tercera, cuarta y quinta columnas muestran el comienzo, el pico y el final de la emisión en una banda entre los y los keV para cada uno de los eventos respectivamente. La sexta y la séptima columnas muestran la ubicación de la fulguración. La novena columna da el número de la región activa, y en las casillas décima y undécima señalamos si el evento fue registrado por la red GONG y/o por HMI/SDO respectivamente.

#	Fecha	Comienzo	Pico	Final	X	Y	AR	GONG	HMI/SDO
1	2010-02-08	07:31:16	07:41:26	07:53:32	034	474	1045		
2	2010-02-12	11:21:28	11:26:14	11:36:24	-169	515	1046	✓	✓
3	2010-10-16	19:08:48	19:12:18	19:34:40	394	-397	1112	✓	✓
4	2011-02-14	04:41:12	04:44:10	05:25:04	031	-223	1158	✓	✓
5	2011-02-15	01:43:44	01:55:30	02:27:32	205	-222	1158	✓	✓
6*	2011-03-07	19:40:12	20:04:54	20:07:48	624	556	1164	✓	✓
7	2011-03-09	23:10:28	23:22:18	23:38:08	191	272	—	✓	✓
8	2011-07-30	02:05:32	02:09:10	02:29:24	-526	170	1261	✓	✓
9	2011-08-03	04:29:24	04:31:58	04:43:28	-155	166	—	✓	✓
10	2011-08-04	03:42:28	03:46:58	03:47:40	537	201	—	✓	✓
11*	2011-09-06	22:08:00	22:19:46	22:25:04	284	133	1283	✓	✓
12	2011-09-08	15:33:00	15:43:50	16:02:00	610	147	1283	✓	✓
13	2011-09-26	05:05:16	05:07:58	05:14:40	-519	116	1302	✓	✓
14	2011-12-25	20:24:12	20:27:54	20:35:52	369	-334	1387	✓	✓
15	2011-12-27	04:07:32	04:18:38	04:38:36	-494	-250	1386	✓	✓
16*	2012-03-04	11:06:52	11:07:30	11:10:44	617	-666	—	✓	✓
17	2012-03-09	04:24:36	04:27:54	04:37:08	0	389	1429	✓	✓
18	2012-05-09	12:29:48	12:30:30	12:43:00	-488	242	1476	✓	✓
19	2012-05-09	14:10:04	14:10:46	14:27:32	-353	162	1476	✓	✓
20	2012-05-10	04:13:08	04:17:42	04:29:36	-364	259	1476	✓	✓
21*	2012-06-03	17:49:24	17:54:46	18:01:20	-570	275	1493	✓	✓
22	2012-07-02	19:47:04	20:05:18	20:11:56	-16	-325	1514	✓	✓
23	2012-07-04	09:49:04	09:54:26	10:14:32	289	-343	1515	✓	✓
24	2012-07-04	16:33:00	16:37:06	16:46:48	484	-184	1513	✓	✓

Aceleración estocástica de partículas en una fulguración solar

En el estudio de las fulguraciones solares se trabaja básicamente con tres mecanismos diferentes de aceleración de partículas: (1) **Aceleración directa por acción de un campo eléctrico**: [Holman, 1985, Wood and Neukirch, 2005] Se plantea que la aceleración del *jet*⁹ de partículas cargadas se lleva a cabo mediante una aplicación sencilla de una fuerza tipo Coulomb mediante un campo eléctrico DC que se genera sobre la zona de reconexión; el problema más grande que sobrelleva este modelo es la dificultad de mantenerlo a gran escala. (2) **Aceleración de Fermi a primer orden (choque)**: [Tsuneta and Naito, 1998] Este mecanismo plantea que la manera en la que se les suministra energía a las partículas es cuando son embestidas por un frente de una onda de choque producto de un hipotético *jet supermagnetósónico* proveniente de la región de reconexión. Además, este proceso deja ver escalas de tiempo del orden de los 0.3 - 0.6 s que están de acuerdo con las observaciones. Aunque esta dinámica ofrece una explicación plausible de la inyección de las partículas hacia el interior solar, tiene algunos problemas en cuanto a las consecuencias que traería sobre las partículas que saldrían expelidas hacia el espacio interplanetario. (3) **Aceleración estocástica o aceleración de Fermi a segundo orden**: La turbulencia y las ondas de plasma son los eventos más comunes que están presentes cuando se da un evento de fulguración solar [Miller, 1998, Petrosian, 1994]. En el modelo de *aceleración estocástica* el esquema básico de la dinámica propuesta es como la que se presenta en la figura 21.

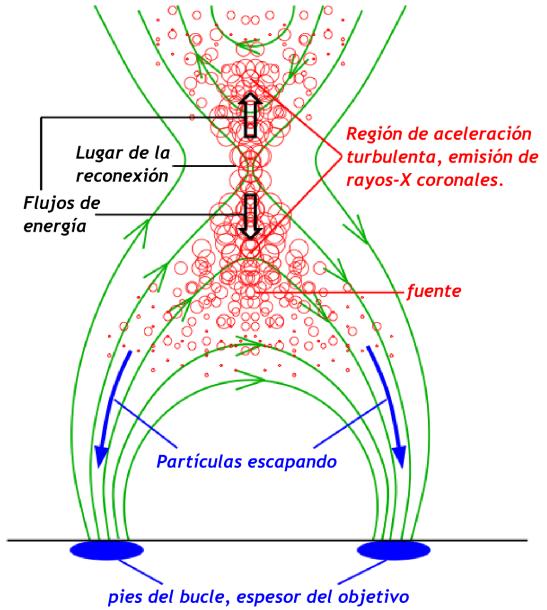


Figure 21: Esquema del modelo de aceleración estocástica propuesto para las fulguraciones solares. Las curvas en verde representan las líneas de campo magnético en una configuración posible; los círculos en rojo representan la turbulencia o las ondas del plasma que se generan durante el evento de la fulguración. Tomado y modificado de [Liu, 2008].

⁹Usamos aquí el término en inglés *jet* para referirnos a un haz de partículas tipo chorro, para estar más acorde con la nomenclatura internacional al respecto.

Como una consecuencia de la reconexión magnética bien sea mediante la turbulencia a gran escala o bien mediante las ondas de plasma que son generadas cerca del punto-X de reconexión, las partículas son aceleradas, y estas, a su vez, producen una emisión en rayos-X duros que se producen cerca de la cima del bucle de la fulguración en el llamado *thin target*, como producto de una emisión térmica por parte de las partículas aceleradas. El registro de esta emisión ha sido uno de los mayores logros de la misión *Yohkoh*. Las partículas que no son atrapadas en la cima y que logran escapar hacia la parte baja de la atmósfera solar, al interactuar con el plasma que rodea los pies del bucle, emiten también en rayos-X duros por radiación *Bremsstrahlung* y forman los conocidos *thick target* en las vecindades de los *footpoints*.

Este mecanismo ha sido profundamente estudiado por diversos autores no solamente en el marco del estudio de las fulguraciones solares sino en varias otras ramas de la astrofísica que involucran este tipo de procesos como en los agujeros negros, en los *Gamma Ray Burts* (GRB), los núcleos activos de galaxias, etc [Liu and Petrosian, 2004, Miller et al., 1996a, Park and Petrosian, 1996, Park et al., 1997].

Usualmente cuando en física se habla de un proceso estocástico se debe hacer referencia a la ecuación de *Boltzmann*. Pues bien, trabajos desarrollados por Fokker [1914] y Planck [1917] a principios del siglo pasado mostraron todo un desarrollo en cuanto a la teoría existente detrás de un proceso de aceleración estocástica de un ensamble de partículas puntuales con la posibilidad de poder introducir en este formalismo diferentes interacciones entre ellas y fuerzas externas a ellas. Gracias a esto, hoy en día esta ecuación se conoce como la ecuación de *Fokker-Planck*, la cual será el tema de la siguiente sección.

Ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de *Fokker-Planck* básicamente brinda un formalismo que permite estudiar la dinámica de un sistema de muchas partículas en el cual los efectos de las colisiones entre ellas cobran una importancia relevante en el planteamiento de su dinámica.

Hacia comienzos del siglo XX, y después de que Einstein hubiese propuesto su hipótesis del movimiento *browniano* en uno de sus famosos artículos de 1905¹⁰, se centraron muchos esfuerzos en analizar este “curioso” comportamiento de movimiento aleatorio que registraban las partículas subatómicas. En busca de esto se desarrollaron una variedad de experimentos en los que por ejemplo se enfriaba Hidrógeno líquido hasta temperaturas muy cercanas al cero absoluto con el fin de observar el movimiento de un conjunto de semillas pequeñas que se depositaban sobre su superficie. Al mismo tiempo, se trabajaba en desarrollos teóricos en aras de establecer un formalismo teórico que brindara explicación a este comportamiento; en este sentido fue A.D. Fokker quien en 1914 publicó su trabajo titulado “*Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld*” o “ Energía media de rotación de dipolos eléctricos inmersos en un campo de radiación”, en el cual por primera vez muestra un tratamiento estocástico con el objetivo de ligar este comportamiento aleatorio de naturaleza microscópica con variables observables a nivel macroscópico [Fokker, 1914]. Tres años más tarde, Planck recoge y complementa los trabajos de Fokker y publica un artículo en el que formaliza una ecuación que trabaja con la dinámica de las partículas involucradas en el espacio de fases y construye un formalismo regido por una mecánica de fluidos en dicho espacio que facilita mucho su descripción [Planck,

¹⁰En 1905 Albert Einstein publicó su artículo titulado: “*Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*” (Sobre la teoría cinética-molecular del calor requerido por el movimiento de partículas suspendidas en líquidos en reposo) en el *Annalen der Physik* en que planta las bases del atomismo moderno dando una explicación razonable del movimiento aleatorio que presentan partículas pequeñas suspendidas sobre un estanque de agua en reposo.

1917]. Es por esto que hoy día a dicha ecuación se le conoce con el nombre **ecuación de Fokker-Planck**.

Existen varias formas de introducir la ecuación de *Fokker-Planck*; una de ellas es a través del uso de un formalismo *browniano* que incluya términos colisionales para dar pie a una deducción natural y simplificada de dicha expresión. La forma más general se encuentra al eliminar toda restricción sobre los fenómenos que puedan influir el movimiento del sistema de partículas. Este desarrollo como muchas aplicaciones a diferentes sistemas físicos está muy bien explicado por Risken [1989]. Una presentación más formal que tiene en cuenta los postulados de la mecánica cuántica y la mecánica estadística se encuentra en los trabajos desarrollados por Chandrasekhar [1943].

Un primer acercamiento: la ecuación de Langevin

Empezamos considerando un sistema de muchas partículas que se mueven aleatoriamente. Centramos nuestra atención en una de ellas cuya masa m es apreciablemente mayor que la del resto de partículas y la cual se encuentra inmersa en este sistema, *i.e.* está bajo la influencia de la dinámica asociada a dicho ensamble. En general, la fuerza que siente esta partícula es proporcional a la velocidad que ésta tenga dentro del fluido:

$$\mathbf{F} = -\alpha \mathbf{v} \quad (26)$$

haciendo uso de la segunda ley de Newton podemos reescribir esto como:

$$m\dot{\mathbf{v}} + \alpha \mathbf{v} = 0 \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v} = 0 \quad (28)$$

donde $\gamma \equiv \alpha/m = 1/\tau$, siendo τ el tiempo característico de decaimiento de la fuerza. Esta ecuación tiene solución exacta cuando se conoce el valor de \mathbf{v} para un tiempo inicial t_0 :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) \exp(-t/\tau) = \mathbf{v}(t_0) \exp(-\gamma t). \quad (29)$$

Detrás de esta fuerza viscosa lo que se encuentra es que las partículas que conforman el sistema físico en estudio colisionan con la partícula de interés presentándose una transferencia de momentum que es el responsable de que la velocidad de la partícula poco a poco vaya decreciendo hasta hacerse cero. Pero nótese un aspecto importante; la ecuación (29) es una expresión determinista, lo que significa que supone que para un tiempo arbitrario t el valor de la velocidad de la partícula está completamente definida siempre y cuando se hayan establecido las condiciones iniciales apropiadamente, pero esto solo puede ser cierto si la masa m de la partícula de interés es lo suficientemente grande comparada con la del resto de partículas que conforman el ensamble de manera que las fluctuaciones térmicas de la velocidad puedan ser despreciadas.

Del teorema de equipartición de la energía, la energía de la partícula es (en una dimensión)

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}kT, \quad (30)$$

siendo k la constante y T la temperatura. Ahora bien, si la masa llega a ser pequeña entonces la ecuación (29) deja de ser válida. Esta ecuación debe ser modificada para introducir correctamente los efectos que la energía

térmica tiene sobre la dinámica de esta pequeña partícula. La modificación consiste en introducir una fuerza de tipo estocástico $\mathbf{F}_f(t)$ en donde estarían contenidos todos los efectos de la dinámica molecular asociada al medio de propagación. Así,

$$\dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v} = \boldsymbol{\Gamma}(t), \quad (31)$$

siendo $\boldsymbol{\Gamma}(t) = \mathbf{F}_f(t)/m$, en donde $\mathbf{F}_f(t)$ se conoce como la fuerza de *Langevin*. Hay varias suposiciones que se establecen sobre el $\boldsymbol{\Gamma}(t)$, la primera es que su promedio sobre todo el ensamble debe ser cero,

$$\langle \boldsymbol{\Gamma}(t) \rangle = 0, \quad (32)$$

ya que el promedio sobre las velocidades $\langle \mathbf{v}(t) \rangle$ debe satisfacer la ecuación (29). Además, si se multiplican dos fuerzas de *Langevin* correspondientes a tiempos distintos t y t' cuya diferencia es apreciablemente mayor que el tiempo característico de colisión τ_c y se hace el promedio sobre todo el ensamble, este promedio también debe ser nulo:

$$\langle \boldsymbol{\Gamma}(t) \boldsymbol{\Gamma}(t') \rangle = 0 \quad \text{para} \quad |t - t'| \geq \tau_c \quad (33)$$

que puede ser re-escrita tomando el límite cuando $\tau_c \rightarrow 0$, pues en ese caso se está localizando temporalmente en $t = t'$. De este modo, en lugar de la ecuación (??) tenemos:

$$\langle \boldsymbol{\Gamma}(t) \boldsymbol{\Gamma}(t') \rangle = q\delta(t - t'). \quad (34)$$

Como vemos es importante entender la dependencia temporal de variables aleatorias para estar en la capacidad de construir una descripción completa de este tipo de dinámicas, y es en esa dirección que se trabaja a continuación.

Dependencia temporal de variable aleatorias y deducción de la ecuación de Fokker-Planck unidimensional

Comencemos considerando un ensamble de muchas partículas en cuya dinámica interviene una cantidad que varía aleatoriamente y que es representada por la letra ξ . Supongamos además que esa cantidad ξ depende del tiempo de forma tal que pueda describirse como una función de t , $\xi(t)$, tal como se representa en la figura 22. Es imposible predecir con absoluta certeza el comportamiento que mostrará ξ con el transcurrir del tiempo. Se acude entonces a lo que se acostumbra a hacer en estos casos y es trabajar con densidades de probabilidad.

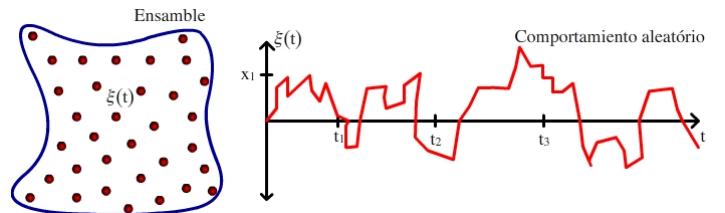


Figure 22: Esquematización de un ensamble de sistemas físicos que tiene asociado a él una cierta cantidad ξ que se comporta de manera aleatoria con el tiempo.

Definimos la densidad de probabilidad de que $\xi(t_1)$ se encuentre entre el intervalo $x_1 \leq \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1$, en donde $x_1 \in D(\xi)$, siendo $D(\xi)$ el conjunto dominio de los valores de ξ .

$$W_1(x_1, t_1) = \langle \delta(x_1 - \xi(t_1)) \rangle, \quad (35)$$

donde con los símbolos $\langle \rangle$ se expresa un promedio sobre todo el ensamble. Ahora bien, en esta misma vía se puede definir la densidad de probabilidad de que $\xi(t_1)$ se encuentre en el intervalo $x_1 \leq \xi(t_1) \leq x_1 + dx_1$ pero que también $\xi(t_2)$ esté en $x_2 \leq \xi(t_2) \leq x_2 + dx_2$, ..., y que $\xi(t_n)$ esté contenido en $x_n \leq \xi(t_n) \leq x_n + dx_n$ como

$$W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = \langle \delta(x_1 - \xi(t_1)) \dots \delta(x_n - \xi(t_n)) \rangle. \quad (36)$$

Supongamos ahora que conocemos una cierta cantidad de densidades de probabilidad jerarquizadas como sigue:

$$\begin{aligned} & W_1(x_1, t_1) \\ & W_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \\ & W_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) \\ & \dots \end{aligned} \quad (37)$$

para todo t_i que se encuentre en el intervalo $t_0 \leq t_i \leq t_0 + T$. En otras palabras, lo que esto indica es suponer que se conoce la evolución temporal completa de la variable aleatoria $\xi(t)$.

La exigencia de conocer estas densidades de probabilidad de manera explícita se hace con fin de poder definir formalmente los valores promedios de ciertas cantidades propias del sistema físico bajo una simple integral, i.e. poderlas correlacionar entre sí. Por ejemplo, siendo $t' > t$, la correlación de la variable aleatoria entre dos diferentes tiempos se puede expresar como

$$\langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \int x \dots x' W'(x, t; \dots; x', t') dx \dots dx'. \quad (38)$$

Densidad de probabilidad restringida (o condicionada): Basados en lo anterior podemos definir una densidad de probabilidad de la variable aleatoria ξ para un tiempo t_n bajo la condición de que para un $t_{n-1} < t_n$ se tenga a certeza de que la variable aleatoria tomó el valor x_{n-1} , para $t_{n-2} < t_{n-1}$, $\xi(t_{n-2}) = x_{n-2}$, y así sucesivamente hasta que para $t_1 < t_2$, $\xi(t_1) = x_1$. Formalmente,

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \langle \delta(x_n - \xi(t_n)) \rangle|_{\xi(t_{n-1})=x_{n-1}, \dots, \xi_{t_1}=x_1}. \quad (39)$$

Esta misma densidad de probabilidad restringida se puede expresar en función de los W_n como:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \frac{W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{W_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)}, \quad (40)$$

pero dado que W_{n-1} la podemos re-escribir como

$$W_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \int W_n(x_n^*, t_n^*; \dots; x_1, t_1) dx_n^*, \quad (41)$$

(40) toma la forma

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = \frac{W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)}{\int W_n(x_n^*, t_n^*; \dots; x_1, t_1) dx_n^*}; \quad (42)$$

de donde finalmente se deduce que

$$W_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = \int P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) W_n(x_n^*, t_n^*; \dots; x_1, t_1) dx_n^*. \quad (43)$$

En general; si definimos un $x' = x + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, y como $t + \tau > t$, con $\tau > 0$; podemos re-escribir (43) como

$$W(x', t + \tau) = \int P(x', t + \tau | x, t) W(x, t) dx, \quad (44)$$

siendo $P(x', t + \tau | x, t)$ la densidad de probabilidad de que ocurra la transición de x, t a $x', t + \tau$. Ahora bien, en la ecuación de *Fokker-Planck* interviene la derivada temporal de $W(x, t)$, $\partial W(X, T)/\partial t$, para lo cual es inherente conocer la probabilidad de transición $P(x', t + \tau | x, t)$ para valores de τ pequeños, y en busca de una representación de esta derivada es que se trabaja a continuación.

Para empezar establecemos la suposición de que es posible conocer todos los **momentos** estadísticos de la distribución, esto es, que se conoce

$$M_n(x, t, \tau) = \langle [\xi(t + \tau) - \xi(t)]^n \rangle|_{\xi(t)=x} = \int (x' - x)^n P(x', t + \tau | x, t) dt \quad (45)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ahora bien, podemos hacer uso de la siguiente identidad general de los *deltas de Dirac*:

$$P(x', t + \tau | x, t) = \int \delta(y - x') P(y, t + \tau | x, t) dy, \quad (46)$$

y expresar $\delta(y - x')$ como $\delta(y - x + x - x')$.

Ahora, tratemos de expandir la función *delta de Dirac* en series de Taylor. La expresión general para una expansión en series de Taylor es

$$f(x^* - x_0^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{n!} (x^* - x_0^*)^n. \quad (47)$$

Si, para nuestro caso, $x^* = (y - x)$, y, $x_0^* = (x' - x)$, así

$$\delta(y - x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - x')^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x^*} \right)^n \delta(x' - x) \quad (48)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - x')^n}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x' - x). \quad (49)$$

Introduciendo (49) en (46) se tiene

$$P(x', t + \tau|x, t) = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - x')^n}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x' - x) P(y, t + \tau|x, t) dy, \quad (50)$$

que sacando el primer término de la suma se convierte en

$$P(x', t + \tau|x, t) = \int \delta(x' - x) P(y, t + \tau|x, t) dy + \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(y - x')^n}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x' - x) P(y, t + \tau|x, t) dy, \quad (51)$$

reacomodando términos:

$$P(x', t + \tau|x, t) = \delta(x' - x) \underbrace{\int P(y, t + \tau|x, t) dy}_{\text{identidad}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x' - x) \underbrace{\int (y - x)^n P(y, t + \tau|x, t) dy}_{M_n(x, t, \tau)}, \quad (52)$$

$$P(x', t + \tau|x, t) = \delta(x - x') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x' - x) M_n(x, t, \tau), \quad (53)$$

$$= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x, t, \tau) \right] \delta(x - x'), \quad (54)$$

donde se ha tenido en cuenta la identidad $\delta(x - x') = \delta(x' - x)$.

Insertando este último resultado en (44), tenemos

$$W(x', t + \tau) = \int P(x', t + \tau|x, t) W(x, t) dx \quad (55)$$

$$= \int \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x, t, \tau) \right] \delta(x - x') W(x, t) dx \quad (56)$$

$$= W(x', t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \int \delta(x - x') M_n(x, t, \tau) W(x, t) dx. \quad (57)$$

Por otro lado, cuando se considera el límite en el que $\tau \ll 1$

$$W(x', t + \tau) - W(x', t) = \frac{\partial W(x', t)}{\partial t} + \sigma(\tau^2), \quad (58)$$

en donde $\sigma(\tau^2)$ representa términos de orden superior a τ^2 ; de esta manera, de (57) se tiene que

$$W(x', t + \tau) - W(x', t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \int \delta(x - x') M_n(x, t, \tau) W(x, t) dx \quad (59)$$

$$\frac{\partial W(x', t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \int \delta(x - x') M_n(x, t, \tau) W(x, t) dx \quad (60)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x'} \right)^n M_n(x', t, \tau) W(x', t). \quad (61)$$

Si se define $D^{(n)}(x', t) \equiv \frac{M_n(x', t, \tau)}{\tau(n!)}$, entonces (61) se generaliza como

$$\frac{\partial W(x', t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x'} \right)^n D^{(n)}(x', t) W(x', t) \quad (62)$$

que es la llamada *ecuación general de Kramer-Moyal* en una dimensión.

Cuando la serie de *Kramer-Moyal* se trunca a segundo orden obtenemos la ecuación general de *Fokker-Planck* unidimensional:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [D^{(1)}(x, t) W(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D^{(2)}(x, t) W(x, t)] \quad (63)$$

Ecuación de Fokker-Planck Multi-dimensional

Empecemos considerando un sistema de N variables aleatorias $\{\xi\} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ para lograr extender la ecuación (44) a

$$W(\{x'\}, t + \tau) = \int P(\{x'\}, t + \tau | \{x\}, t) W(\{x\}, t) d^N x, \quad (64)$$

donde el elemento de volumen es $d^N x = dx_1 dx_2 \dots dx_N$ y el símbolo integral resume las N integrales que se deben hacer. Así mismo, $\{x\}$, $\{x'\}$ arriba (ecuación 64), y en lo que sigue de esta sección, representan al conunto ordenado de las respectivas variables. La función *delta* para estas N variables es

$$\delta(\{x\}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \delta(x_N), \quad (65)$$

con lo que

$$P(\{x'\}, t + \tau | \{x\}, t) = \int \delta(\{y\} - \{x'\}) P(\{y\}, t + \tau | \{x\}, t) d^N y. \quad (66)$$

Ahora trabajemos sobre la función $\delta(\{y\} - \{x'\})$ expandiéndola en series [Aguirre, 2000],

$$\delta(\{y\} - \{x'\}) = \delta(\{x\} - \{x'\} + \{y\} - \{x\}) \quad (67)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} (y_{j1} - x_{j1})(y_{j2} - x_{j2}) \dots (y_{jv} - x_{jv}) \frac{\partial^v}{\partial x_{j1} \partial x_{j2} \dots \partial x_{jv}} \delta(\{x\} - \{x'\}) \quad (68)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} \frac{(-\partial)^v}{\partial x'_{j1} \partial x'_{j2} \dots \partial x'_{jv}} (y_{j1} - x_{j1})(y_{j2} - x_{j2}) \dots (y_{jv} - x_{jv}) \delta(\{x\} - \{x'\}), \quad (69)$$

donde se ha usado la notación de *suma* sobre los índices repetidos. Insertando (69) en (66), tenemos

$$P(\{x'\}, t + \tau | \{x\}, t) = \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \frac{(-\partial)^v}{\partial x_{j1} \partial x_{j2} \dots \partial x_{jv}} M_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x\}, t, \tau) \right] \delta(\{x'\} - \{x\}), \quad (70)$$

donde se ha usado la definición de v -ésimo momento estadístico como

$$M_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x\}, t, \tau) = \int (y_{j1} - x_{j1})(y_{j2} - x_{j2}) \dots (y_{jv} - x_{jv}) P(\{y\}, t + \tau | \{x\}, t) d^N y. \quad (71)$$

Llevando (70) a (64),

$$W(\{x'\}, t + \tau) = \int \left[1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \frac{(-\partial)^v}{\partial x_{j1} \partial x_{j2} \dots \partial x_{jv}} M_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x'\}, t, \tau) \right] \delta(\{x'\} - \{x\}) W(\{x\}, t) d^N x, \quad (72)$$

$$W(\{x'\}, t + \tau) - W(\{x'\}, t) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \frac{(-\partial)^v}{\partial x_{j1} \partial x_{j2} \dots \partial x_{jv}} \int \delta(\{x'\} - \{x\}) M_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x\}, t, \tau) W(\{x\}, t) d^N x, \quad (73)$$

$$\frac{\partial W(\{x'\}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} \frac{(-\partial)^v}{\partial x'_{j1} \partial x'_{j2} \dots \partial x'_{jv}} M_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x'\}, t, \tau) W(\{x'\}, t), \quad (74)$$

sintiendo τ el intervalo de tiempo infinitesimal transcurrido entre t y $t + \tau$.

Si definimos $D_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x\}, t) = \frac{M_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x\}, t, \tau)}{\tau (v!)}$, entonces (74) toma la forma más general

$$\frac{\partial W(\{x'\}, t)}{\partial t} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-\partial)^v}{\partial x'_{j1} \partial x'_{j2} \dots \partial x'_{jv}} D_{j_1, j_2, \dots, j_v}^{(v)}(\{x'\}, t) W(\{x'\}, t), \quad (75)$$

conocida como la *ecuación de Kramer-Moyal multidimensional*. Cuando truncamos esta serie a segundo orden obtenemos la famosa ecuación de *Fokker-Planck* en varias variables:

$$\frac{\partial W(\{x\}, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} D_{j_1}^2(\{x\}, t) W(\{x\}, t) + \frac{\partial^2}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}} D_{j_1 j_2}^2(\{x\}, t) W(\{x\}, t), \quad (76)$$

donde se usa la notación de suma sobre índices repetidos.

Ecuación de Fokker-Planck para una distribución de electrones que se inyecta en un plasma magnetizado

La aceleración de electrones a altas energías es un fenómeno que se presenta en múltiples escenarios astrofísicos como en los rayos cósmicos, en los jets de rayos gamma, en los núcleos activos de galaxias, en los eventos de supernova y en las fulguraciones solares [Longair, 1992]. Con el advenimiento de la era moderna de la tecnología y gracias a la extrema cercanía del Sol con respecto a nosotros ha sido posible obtener una gran cantidad de datos observacionales (espectros e imágenes) de alta resolución espacial y temporal. Estas observaciones posibilitan la comparación detallada de los datos de ciencia con un análisis teórico de la evolución temporal de la distribución electrónica mediante el empleo adecuado de la ecuación de *Fokker-Planck* como ecuación cinética de movimiento del proceso en estudio. Es clara entonces la importancia de establecer los parámetros físicos del medio en el cual se propagarán los electrones en la formulación teórica.

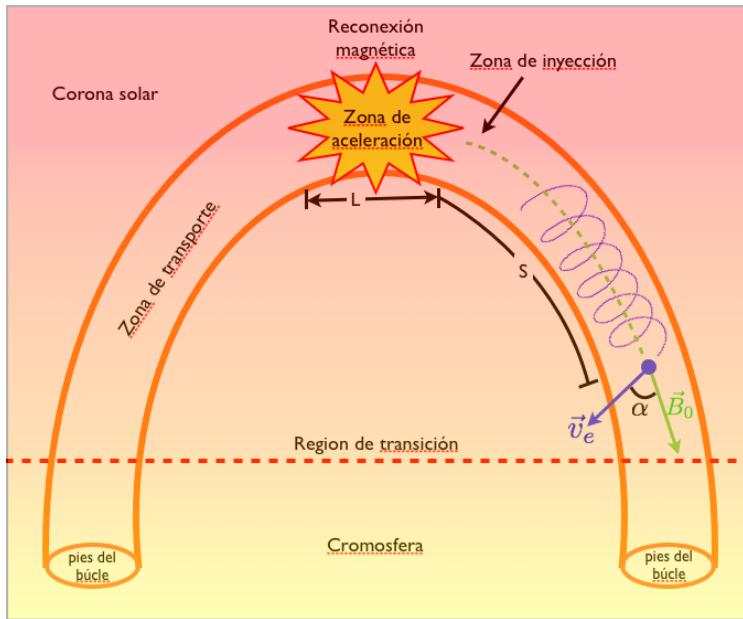


Figure 23: Esquematización del giro-movimiento de una partícula cargada cuando se transporta a lo largo de las líneas de campo magnético en el interior de un bucle de plasma coronal.

Básicamente, durante las últimas tres décadas se ha dado un avance importante en la construcción de una descripción teórica consistente que considere los procesos relevantes presentes en la interacción del paquete de electrones en su viaje a través del plasma [Bai, 1982, Hamilton et al., 1990, Leach and Petrosian, 1981, Liu et al., 2004, 2009, Lu and Petrosian, 1988, McTiernan and Petrosian, 1990, Miller et al., 1996b, Park et al., 1997, Zharkova et al., 2011].

Estos trabajos previos han mostrado que algunos de los procesos físicos que causan que la distribución electrónica evolucione con el tiempo son la dispersión *Coulombiana* y tipo *Compton*, la reflexión magnética, las interacciones tipo *onda-partícula*, la radiación sincrotrón, y los efectos directos de los campos eléctricos tipo DC, siendo los parámetros físicos propios del plasma (tales como la densidad, la magnitud y topología del campo magnético y la energía y composición de las partículas) los factores que determinan cuáles de estos procesos predominan en el fenómeno.

La mayoría de los plasmas astrofísicos se encuentran inmersos en un campo magnético producto del movimiento de las partículas cargadas que lo componen. Si en dichos plasmas la magnitud del campo magnético predomina sobre la del campo eléctrico, el movimiento de las partículas se hace principalmente a lo largo de las líneas de \vec{B} en lo que se conoce como *giro-movimiento* (ver figura 23). Este giro-movimiento se caracteriza por tres observables físicos: la energía de la partícula en movimiento E , su posición s , y el ángulo de cabeceo α ; o en inglés *pitch angle*, el cual se refiere al ángulo formado entre el vector momentum de la partícula \vec{p} en un instante dado y el vector campo magnético \vec{B} del lugar.

Si sobre uno de estos plasmas se inyecta un número grande de partículas cargadas (por ejemplo electrones) con una distribución dada W , la dinámica de estas, la evolución de sus movimientos, se podrá describir como se mostró en la sección anterior. En este caso, consideremos nuestra función de distribución W como una función que depende de la energía E , la posición de la partícula s en la región, y del coseno del ángulo de cabeceo μ . Así, $W = W(E, \mu, s, t)$, y los cálculos pertinentes se llevarán a cabo en el espacio de fases.

En este caso la ecuación de *Fokker-Planck* (76) toma la forma:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -v\mu \frac{\partial W}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial \mu}(\dot{\mu}W) - \frac{\partial}{\partial E}(\dot{E}W) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(D_{\mu\mu} \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial E} \left(D_{EE} \frac{\partial W}{\partial E} \right) + \frac{\partial}{\partial E} \left(D_{E\mu} \frac{\partial W}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(D_{E\mu} \frac{\partial W}{\partial E} \right). \quad (77)$$

Los coeficientes $v \cos \alpha$, $\dot{\mu}$ y \dot{E} son los cambios sistemáticos en posición, ángulo de cabeceo y energía, respectivamente, producto de las fuerzas externas que actúan directamente sobre las partículas en movimiento. Las cantidades $D_{j_1 j_2}$ están asociadas directamente con los diferentes procesos de dispersión y por eso hacen parte de los términos difusivos de la expresión [Hamilton et al., 1990]. Las formas explícitas de los coeficientes \dot{E} , $\dot{\mu}$ y $D_{j_1 j_2}$ para un conjunto de electrones bajo la influencia de colisiones tipo Coulomb, dispersiones Compton y de interacción onda-partícula, radiación sincrotrón, variaciones del campo magnético, y fuerzas externas son resumidas en las siguientes dos tablas [Hamilton et al., 1990]:

Table 2: Tasas de cambio de la energía y el ángulo de cabeceo. $\ln \Lambda$ es el logaritmo Coulombiano.

Proceso	\dot{E}	$\dot{\mu}$
Colisión Coulombiana	$-4\pi n c r_0^2 \ln \Lambda / \beta$	0
Emisión sincrotrón	$-\frac{2}{3} B^2 \gamma^2 \beta^2 (1 - \mu^2) / mc$	$-\frac{2}{3} r_0^2 B^2 \mu (1 - \mu^2) / mc \gamma$
Fuerzas externas	$\mu \beta \mathbf{F}_{ } / mc$	$(1 - \mu^2) \mathbf{F}_{ } / \gamma \beta mc$
Reflejo magnético	0	$-\frac{1}{2} \beta c (1 - \mu^2) (d \ln B / ds)$
Ondas de Alfvén	$(1/\gamma \beta^2)(1 - \beta^2) D_{EE}^{\text{Alfvén}}$	$(1/\gamma \beta^2)(1 + \beta^2) D_{E\mu}^{\text{Alfvén}}$
Ondas de Langmuir	$(1/\gamma \beta^2)(1 - \beta^2) D_{EE}^{\text{Langmuir}}$	0

Table 3: Coeficientes de difusión

Coeficientes	Colisión Coulombiana	Ondas de Alfvén	Ondas de Langmuir
$D_{\mu\mu}$	$\frac{4\pi n c r_0^2 \ln \Lambda}{\beta^2 \gamma^2} (1 - \mu^2)$	$D_-^{(2)} + D_+^{(2)}$	0
D_{EE}	~ 0	$\beta^4 \gamma^2 \frac{v_A^2}{v^2} (D_-^{(0)} + D_+^{(0)})$	$\frac{n c r_0^2 \epsilon_L}{\beta} k^{-3}$
$D_{E\mu}$	~ 0	$\beta^4 \gamma^2 \frac{v_A}{v} (D_-^{(1)} + D_+^{(1)})$	0

En general, para la aceleración estocástica de un conjunto de partículas cargadas asociada a un proceso de fulguración solar, Lu and Petrosian [1988] mostraron que la ecuación (77) toma la forma particular

$$\frac{\lambda_0}{v} \frac{\partial W}{\partial t} = -\lambda_0 \mu \frac{\partial W}{\partial s} + \lambda_0 \frac{d \ln B}{ds} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{(1 - \mu^2)}{2} W \right] + \frac{c^2}{v} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{W}{v} \right) + \frac{c^4}{v^4 \gamma^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial W}{\partial \mu} \right] + \frac{\lambda_0}{v} S(E, \mu, s, t), \quad (78)$$

donde $\lambda_0(s) = (10^{24} \text{ cm})/n(s) \ln \Lambda$ es una cantidad que está relacionada con el camino libre medio de un electrón que tienen una energía E a través de la relación $\lambda(E) = \lambda_0 E^2/(E + 1)$. $n(s)$ es la densidad de número de partículas del plasma en el ambiente en el cual se propaga el electrón.

Un análisis completo y deductivo de modelamientos que se han hecho considerando algunos de estos tipos de interacciones se encuentran en [Hamilton et al., 1990, Holman et al., 2001, Leach and Petrosian, 1981, Litvinenko and Somov, 1993, McTiernan, 1989, McTiernan and Petrosian, 1990, Petrosian, 1981, 1985, 1994, Somov, 2006]. Sin embargo, en el capítulo siguiente se muestra un revisión ligera de los *tres* mecanismos que se consideran en el desarrollo del presente trabajo.

Procesos relevantes involucrados en las colisiones en plasmas

Colisión Coulombiana

Tenemos que encargarnos de comprender cada una de las diferentes interacciones que se quieren considerar para el modelamiento de la interacción del jet de electrones con el plasma de la atmósfera solar. El primer proceso que vemos en las tablas (2) y (3) es la colisión entre partículas tipo Coulomb. Esto se debe a que en general una partícula que incide velozmente sobre un plasma tiene colisiones con los electrones atómicos y con los núcleos que lo componen. Los electrones del plasma, al ser ligeros, pueden adquirir una cantidad de energía apreciable por parte de los electrones incidentes sin provocar desviaciones importantes en la dirección de su movimiento; mientras que, los núcleos, de mayor masa, absorben muy poca energía; pero, en cambio, por efecto de su carga, provocan dispersiones notables a las partículas incidentes. Una pregunta que se evidencia en las múltiples explicaciones que se tratan de dar en cuanto al sistema de generación de

sismos asociados a fulguraciones solares es: Si los electrones al poseer menor masa se ven más alterados en su trayectoria y tienden a difundirse en su camino, cómo es que logran tener alcances tan profundos de la atmósfera solar para eventualmente estar asociados a la generación de la fuente sísmica? Este es uno de los mayores contra-argumentos que se dan al intentar de proponer un modelo como el nuestro, pero que algunos autores tratan de responder atribuyendo esta capacidad de penetración a la enorme cantidad de energía adquirida en el momento de la explosión y posteriormente en el proceso de aceleración [Zharkova et al., 2011].

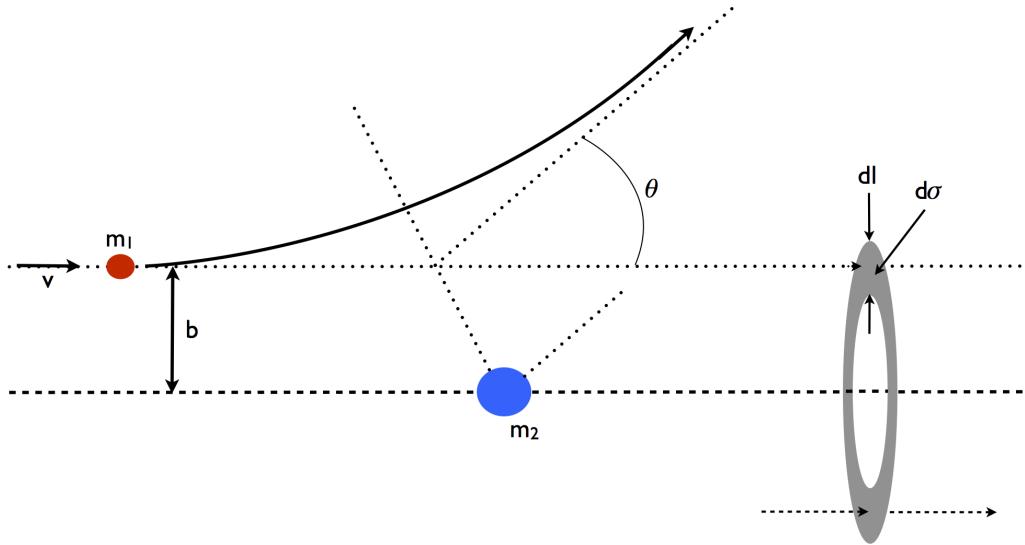


Figure 24: Esquematización de la interacción de dos partículas eléctricamente cargadas mediante un potencial *Coulombiano*. Ilustración de los conceptos de parámetro de impacto y sección eficaz.

La colisión de dos partículas relacionadas mediante un potencial *Coulombiano*, $\phi = e/r$, genera intercambios de momentum y de energía, y por tanto pérdidas cuando nos centramos en una partícula que incide sobre otra, ambas con una carga eléctrica asociada. Esta interacción se esquematiza en la figura 24.

Si consideramos un sistema de referencia cuyo origen se encuentre en el centro de masa del sistema de las dos partículas, cada una de las partículas se dispersa un ángulo θ definido por la relación

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{e_1 e_2}{\mu v^2 b}, \quad (79)$$

donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida del sistema, e_1 y e_2 son las cargas respectivas de cada una de las partículas, v es la velocidad inicial relativa de la partícula incidente y b es el *parámetro de impacto* de la interacción. Para ver una deducción formal de la expresión (79) [Landau and Lifshitz, 1969]. Ahora bien, para una partícula que se deflecta un ángulo de $\pi/2$

$$b \left(\frac{\pi}{2} \right) = b_{\perp} = \frac{e_1 e_2}{\mu v^2}, \quad (80)$$

de manera que podemos escribir (79) como

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b_{\perp}}{b}. \quad (81)$$

Se habla entonces de una colisión cercana si

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi, \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq b \leq b_{\perp}, \quad (82)$$

correspondientemente se tiene que, una colisión lejana será aquella para la cual $b > b_{\perp}$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Los dos casos pueden ser comprendidos a través de la figura 24.

Cada nueva colisión provoca un pequeño cambio en la cantidad de momentum perpendicular de las partículas dado por

$$\Delta p_{\perp} = p \sin \theta = m_1 v_1 \frac{2 \tan \theta/2}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{2m_1 v_1 (b_{\perp}/b)}{1 + (b_{\perp}/b)^2} = 2m_1 v_1 \frac{x}{1 + x^2}, \quad (83)$$

donde se ha definido $x = b_{\perp}/b$, y $0 < \sin \theta \leq 1$. La desigualdad anterior es estricta en el valor inferior, ya que como se verá más adelante al realizar la integración, considerar el caso nulo en $\sin \theta$ nos conduciría a una divergencia. Esto implica que debemos considerar un θ_{min} correspondiente a un b_{max} . Ya que la variable b toma valores aleatorios, se debe trabajar con una tasa media de cambio promediada bajo la probabilidad de interacción asociada a la *sección eficaz* σ :

$$\frac{d}{dt} p_{\perp}^2 = \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\theta_{min}} (\Delta p_{\perp})^2 n_2 v_1 d\sigma, \quad (84)$$

donde n_2 es la densidad de número de partículas de la especie 2. Reemplazando aquí la última expresión de (83) y la expresión de la sección eficaz diferencial, se tiene que

$$\frac{d}{dt} p_{\perp}^2 = 8\pi n_2 m_1^2 v_1^3 b_{\perp}^2 \int_1^{x_{min}} \frac{dx}{(1+x^2)^2 x}, \quad (85)$$

en donde x_{min} es igual a b_{\perp}/b_{max} . Evaluando la integral en (85) mediante el empleo tradicional del método de fracciones parciales, se encuentra que

$$\int_1^{x_{min}} \frac{dx}{(1+x^2)^2 x} = \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} \right]_{x=1}^{x=x_{min}} \quad (86)$$

Al evaluar esta integral en el límite inferior obtenemos un valor muy pequeño que resulta espúreo en nuestros cálculos. Cuando se trata de evaluar esta misma integral pero en un valor muy cercano a cero (como es el caso del límite superior) los términos que predominan son los que contienen logaritmos, así

$$\left[\ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2(1+x^2)} \right]_{x=x_{min}} \approx \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right]_{x_{min}} \sim \ln \frac{1}{x_{min}} = \ln \frac{b_{max}}{b_{\perp}}, \quad (87)$$

Es usual definir un parámetro adimensional Λ mediante:

$$\Lambda = b_{max}/b_{\perp}, \quad (88)$$

conocido en la literatura como el *logaritmo Coulombiano* y que en el caso general en el que se considera equilibrio termodinámico se expresa mediante [Somov, 2006]

$$\ln \Lambda = \ln \frac{3}{2e^2} \left(\frac{k_B^3 T^3}{\pi n_e} \right)^{1/2}. \quad (89)$$

Entonces finalmente (85) se puede aproximar como

$$\frac{d}{dt} p_{\perp}^2 = 8\pi n_2 m_1^2 v_1^3 b_{\perp}^2 \ln \Lambda. \quad (90)$$

Al normalizar con la energía cinética de la partícula 1, ($\frac{1}{2}m_1v_1^2$) tenemos una forma general del coeficiente de deriva involucrado en la ecuación de *Fokker-Planck* al considerar procesos de colisión Coulombiana como es el caso de las fulguraciones solares en donde hoy en día se cree ampliamente que es la radiación *Bremsstrahlung* por colisión Coulomb la principal responsable de la emisión en rayos-X asociadas a este tipo de eventos [Leach and Petrosian, 1983]. También, es ampliamente aceptado que la mayor contribución de la emisión en radio-frecuencias asociada a una fulguración es debida a la emisión *girosincrotrón* [Zharkova et al., 2011] y es por esto que es uno de los procesos con mayor importancia en el desarrollo teórico que en este trabajo se presenta y la razón de la siguiente subsección.

Radiación giro-sincrotrón

Toda partícula cargada que se acelera emite radiación electromagnética; y si además la trayectoria que describe la partícula en su movimiento es circular, entonces a la radiación le llama *radiación de sincrotrón*. La primera evidencia experimental de este tipo de radiación se dio en 1947 en el acelerador de electrones de la General Electric en el estado de Nueva York [Elder et al., 1947]. Un desarrollo teórico completo de este fenómeno fue presentado por *Joseph Larmor* en 1898 en donde presenta explicitamente una expresión que da cuenta de la potencia de radiación:

$$P = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2 \quad (91)$$

en donde e es la carga de la partícula, ϵ_0 es la permitividad eléctrica del medio en el que la partícula se propaga, c es la velocidad de la luz en el medio y a es la aceleración centrípeta (esta potencia es evaluada en todos los 4π estereoradianes de ángulo sólido) [Larmor, 1898]. En los aceleradores de partículas es natural esperar encontrar este tipo de radiación, pues las trayectorias de las partículas están confinadas al arreglo circular que en sí mismo es el acelerador. La pregunta que de inmediato se desprende en el marco de este trabajo es ¿Cómo puede esta radiación estar asociada a un evento de fulguración solar? Pues bien, hoy en día se entiende que la mayor parte de la fenomenología observada en la superficie del Sol está regida por la presencia de intensos campos magnéticos, y como ya se mencionó con anterioridad las fulguraciones solares, en sí mismas, son

eventos producto de una reconexión magnética. La fuerza de Lorentz en presencia exclusiva de un campo magnético,

$$\vec{F}_L = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad (92)$$

es una fuerza que se aplica siempre en dirección perpendicular al movimiento instanteo de la partícula. Los modelos de fulguración plantean un movimiento como el que se esquematiza en la figura 25 [Park et al., 1997, White et al., 2011, Zharkova et al., 2011].

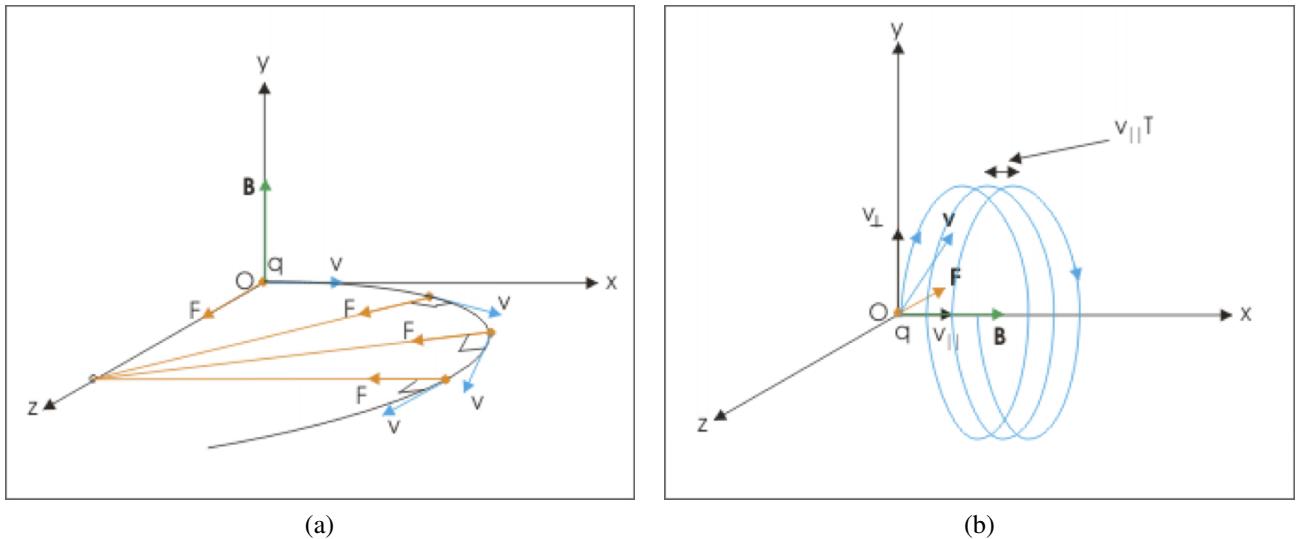


Figure 25: Esquematización de la dirección de la fuerza de Lorentz magnética que se aplica sobre una partícula cargada en movimiento. (a) Un campo magnético dirigido en la dirección de y y una partícula con carga q que inicialmente tiene una velocidad \vec{v} dirigida en dirección x . El movimiento de esta partícula es una circunferencia confinada en el plano xz . (b) Una trayectoria helicoidal se puede dar solamente en el caso en el que la fuerza neta que actúa sobre la partícula cargada tenga una componente en la dirección del campo magnético como en el plano perpendicular a él. Imágenes tomadas de Singh, S. Motion of a charged particle in magnetic field, Connexions Web site. <http://cnx.org/content/m31345/1.9/>, Marzo 24, 2012.

Para analizar en detalle la emisión electromagnética producto de este movimiento helicoidal de una partícula cargada es necesario considerar la forma en que los campos eléctricos y magnéticos se ven afectados y, por ende, la forma en la que una señal electromagnética es transmitida. Para desarrollar este análisis se necesita apelar a los conocidos potenciales retardados de *Liénard-Wiechert* en donde después de algunas consideraciones físicas y un extensivo desarrollo algebraico (ver por ejemplo [Jackson, 1975] o [Schwartz, 1987]) se llega a una expresión que da cuenta de la potencia energética radiada por unidad de ángulo sólido como:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{(1 - \beta \cos \theta')^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta')^5} \quad (93)$$

donde nuevamente e es la carga de cada partícula, a es aceleración centrípeta, c es la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el medio, β es la velocidad de la partícula (en unidades de c), θ' es el ángulo

de polar (diferente al ángulo de cabeceo descrito anteriormente) y φ es el ángulo axial. La potencia total radiada se encuentra al integrar la relación (93) en el ángulo sólido [Schwartz, 1987]:

$$P = \int_{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \frac{1}{(1-\beta^2)^2} = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \gamma^4. \quad (94)$$

Si se considera que la partícula cargada está inmersa en un campo magnético predominantemente unidireccional será la fuerza de Lorentz la asociada a la aceleración centrípeta que gobierna el movimiento circular en el helicoide

$$F = \gamma m a = \frac{evB \sin \theta}{c} \quad (95)$$

de donde se despeja a como

$$a = \frac{evB \sin \theta}{\gamma mc}, \quad (96)$$

siendo m la masa de la partícula en su sistema *própicio* de referencia. Llevando (96) en (94) tenemos:

$$P = \frac{2e^2 \gamma^4}{3c^3} \frac{e^2 \beta^2 B^2 \sin^2 \theta}{\gamma^2 m^2} = \frac{e^4}{mc^2} \frac{2}{3} \frac{B^2 \gamma^2 \beta^2 (1 - \cos^2 \theta)}{mc}, \quad (97)$$

que resulta ser la expresión que aparece en la tabla 2 que da cuenta de la perdida de energía vía radiación de sincrotron midiendo la carga en unidades de la carga del electrón y la energía medida en unidades de la energía en reposo del electrón mc^2 . Todos estos procesos involucrados en el choque de un plasma son considerados en este trabajo pues nuestra finalidad es tratar de dar una explicación razonable de la forma en la que la fuente sismica es generada en aquellos eventos acústicos observados asociados a eventos de fulguración solar y que es la materia que hoy en día conforma la rama conocida como la *Heliosismología local* que será el tema que trataremos a continuación.

Reflexión magnética

Según los modelos actuales, la distribución de líneas de campo magnético a lo largo de un bucle solar es algo como lo que se representa en la figura ??, en donde la densidad de líneas aumenta progresivamente de forma simétrica a partir de la cima del bucle y a medida que se avanza hacia las bases de él. Si se supone que la configuración de campo magnético es tal que no varía con el tiempo, entonces cualquier partícula cargada eléctricamente que se mueva en una trayectoria helicoidal desde la cima del bucle en dirección hacia alguna de sus bases sufrirá una reflexión en un punto debido justamente al aumento progresivo de la densidad de líneas de campo magnético. Para entender esto desde un punto de vista formal, debemos empezar por recordar el concepto de invarianza adiabática de algunas cantidades asociadas a un sistema físico dinámico.

El teorema de la invarianza adiabática implica que las integrales de acción no varían cuando se produce un cambio que es lo suficientemente lento comparado con los periodos de movimiento del sistema físico y además dichos cambios no están relacionados de forma alguna con los periodos. Sea q_i el conjunto de coordenadas generalizadas del sistema donde i indexa a cada una de estas variables, y p_i los momentos canónicos

conjugados generalizados de cada una de las variables respectivamente. Toda coordenada periódica define una integral de acción

$$J_i = \oint p_i dq_i. \quad (98)$$

El movimiento transversal de una partícula cargada en un campo magnético estático es un movimiento periódico, de manera que se puede definir la integral de acción siguiente

$$\vec{J} = \oint \vec{P}_\perp \cdot d\vec{l}, \quad (99)$$

donde \vec{P}_\perp es la componente del momentum magnético que es perpendicular a las líneas de campo magnético en cada punto, y $d\vec{l}$ es la diferencial de longitud a lo largo del círculo instantáneo de la partícula definido en su órbita helicoidal a lo largo de las líneas de campo magnético que es justamente el camino sobre el cual se evalúa la integral. El vector momentum \vec{P} es

$$\vec{P} = \gamma m \vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A}, \quad (100)$$

de manera que reemplazando explícitamente en la ecuación (99) tenemos

$$\vec{J} = \oint \gamma m \vec{v}_\perp \cdot d\vec{l} + \frac{e}{c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (101)$$

De la primera integral de la ecuación (101) se tiene que

$$\vec{v} \cdot d\vec{l} = (\omega_B a \hat{\theta}) \cdot (a d\theta \hat{\theta}) \quad (102)$$

$$= \omega_B a^2 d\theta, \quad (103)$$

siendo a el radio instantáneo descrito por la órbita de la partícula, ω_B la frecuencia angular (conocida también como *frecuencia de Larmor* definida por $\omega_B = \frac{eB}{\gamma mc}$) y θ el ángulo barrido sobre la circunferencia. De esta manera (101) se re-escribe como

$$\vec{J} = \oint \gamma m \omega_B a^2 d\theta + \frac{e}{c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}; \quad (104)$$

aplicamos el teorema de *Stokes* sobre este término

$$\vec{J} = \oint \gamma m \omega_B a^2 d\theta - \frac{e}{c} \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \hat{n} da, \quad (105)$$

en donde S es la superficie encerrada por la circunferencia instantánea de la trayectoria de la partícula, y el signo negativo del segundo término aparece porque el vector unitario \hat{n} se dirige en sentido contrario a las líneas de campo magnético. De esta manera,

$$\vec{J} = \oint \gamma m \omega_B a^2 d\theta - \frac{e}{c} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} da \quad (106)$$

$$= 2\pi \gamma m \omega_B a^2 + \frac{e}{c} |\vec{B}| \pi a^2. \quad (107)$$

Reemplazando explícitamente la frecuencia de Larmor en (107), tenemos

$$\vec{J} = \gamma m \omega_B \pi a^2 = \frac{e}{c} (\underline{B \pi a^2}), \quad (108)$$

en donde el último término entre paréntesis es el flujo magnético que cruza a través de la órbita instantánea de la partícula.

Si suponemos invarianza adiabática en este proceso, entonces $|\vec{J}| = cte$, y esto implica que $|\vec{B}| a^2 = cte$, o lo que es lo mismo, que $\frac{p_\perp^2}{B} = cte$ o $\frac{ye\omega_B a^2}{2c} = cte$; todas estas conocidas como cantidades que son invariantes adiabáticas. Ahora bien, el cambio de energía en el tiempo de la partícula es

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (109)$$

mientras que la fuerza de *Lorentz* viene dada por

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \times \vec{B} + m\vec{g}. \quad (110)$$

Si en sistema físico considerado se tiene una configuración de campo magnético tal que no cambia con el tiempo, entonces

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = 0, \quad (111)$$

de donde se deduce que $|\vec{v}|$ debe ser constante. En el caso particular de un bucle solar en el que densidad de líneas de campo magnético aumenta en dirección hacia las capas más profundas de la atmósfera solar, y en donde las partículas cargadas eléctricamente viajan a través de las líneas de campo describiendo órbitas helicoidales, la velocidad de dichas partículas se puede descomponer como

$$v^2 = v_{||}^2 + v_\perp^2 \quad (112)$$

De esta manera, a una distancia s_0 a lo largo del bucle, en donde la magnitud del campo magnético es B_0 , la magnitud de la velocidad de la partícula será v_0 , y se expresará como $v_0^2 = v_{||0}^2 + v_{\perp 0}^2$. Este punto también debe obedecer la invariabilidad adiabática expresada mediante $\frac{v_{\perp 0}^2}{B_0} = cte$. Si esta constante toma el mismo valor para todo el punto sobre le bucle solar, se debe cumplir que

$$\frac{v_\perp^2}{B} = \frac{v_{\perp 0}^2}{B_0}, \quad (113)$$

donde v y B son la velocidad de la partícula y la magnitud del campo magnético para un punto arbitrario sobre el bucle solar. De la ecuación (113) se tiene

$$\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{B} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{B_0} \quad (114)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{B}{B_0} \sin^2 \alpha_0,$$

siendo α el ángulo de inclinación entre el vector velocidad instantánea de una partícula cargada que viaja a lo largo del bucle y el vector campo magnético del lugar donde se encuentra dicha partícula.

En el caso particular en el que $\sin^2 \alpha = 1$, $v_{\perp}^2 = v^2$ y $v_{\parallel}^2 = 0$. Es justamente cuando se alcanza esta condición que la partícula cargada se devuelve en su trayectoria, o sea cuando el ángulo de inclinación es un múltiplo entero de $\pi/2$.

Simulación

Solución numérica de la Ecuación de Fokker-Planck dependiente del tiempo

Con lo que se ha mostrado hasta el momento se tiene ya una idea clara de la importancia que tienen los procesos de aceleración de partículas cargadas a través de un plasma magnetizado en el estudio de la astrofísica de *altas energías*¹¹. Además, se mostró que un método usado para la descripción dinámica de este tipo de procesos se puede trabajar mediante el uso y la solución de la ecuación de *Fokker-Planck* dependiente del tiempo. Este formalismo es muy general, y no se restringe únicamente al estudio de eventos asociados a fulguraciones solares; otros trabajos han desarrollado análisis similares en la investigación de discos de acreción asociados a un agujero negro, estallidos en radio, estallidos en rayos gamma, magnetósferas planetarias, atmósferas de objetos astrofísicos compactos, etc (ver por ejemplo Cohn and Kulsrud [1978] y Becker et al. [2006]). Ahora bien, dependiendo de los parámetros físicos del plasma como la densidad de número, la magnitud del campo magnético, y la energía de las partículas inyectadas, algunos procesos fenomenológicos van a ser más relevantes que otros. Con el ánimo de simplificar suficientemente el problema de manera tal que sea posible llevar a cabo la simulación, pero teniendo cuidado de no perder demasiada información física importante en la dinámica del proceso de aceleración, presentamos aquí una ecuación de *Fokker-Planck* que Hamilton et al. [1990] han propuesto con anterioridad para llevar a cabo un estudio razonable de la aceleración de partículas en un evento de fulguración solar.

La ecuación de *Fokker-Planck* es un formalismo que describe la evolución temporal de una función de densidad de probabilidad que generalmente depende de ciertas cantidades físicas reales del conjunto de partículas de interés. Para desarrollar este tipo de análisis de debe conocer con claridad las variables más adecuadas para abordar este tratamiento. Inicialmente se desearía que dicha función dependiera de alguna variable espacial. En el caso de los bucles solares la trayectoria que siguen las partículas es gobernada principalmente por la geometría del campo magnético en un movimiento que, como ya se mencionó anteriormente, se conoce como giro-movimiento. El giro-radio, definido como el radio de la circunferencia instantánea de la trayectoria de cada una de las partículas cargadas en su movimiento a lo largo de un campo magnético localmente uniforme, que en el caso no-relativista¹² es igual a

$$r_g = \frac{m_e v_\perp}{q_e B}, \quad (115)$$

en donde m_e es la masa en reposo de un electrón, B es la magnitud del campo magnético local, v_\perp es la velocidad tangencial a la órbita de giro instantánea de cada partícula y perpendicular a la dirección de \vec{B} , y q_e

¹¹ En el contexto de este trabajo cuando nos referimos a *altas energías* queremos dar cuenta de aquellas energías de un conjunto de partículas aceleradas asociadas a procesos no térmicos. Para la inyección de un haz de partículas en un bucle coronal con condiciones físicas típicas (una longitud del bucle de $\sim 1.2 \times 10^9$ cm, una magnitud de campo magnético de $\sim 10^2$ o $\sim 10^3$ gauss y una densidad de número que oscila entre $\sim 10^9$ y $\sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$) consideramos un rango que puede ir desde los $\sim 10 \text{ keV}$ hasta $\sim 1 \text{ MeV}$, dependiendo de si las partículas en cuestión son electrones o protones.

¹² En el caso de los electrones, un tratamiento no-relativista de la componente no-térmica de la energía se limita a trabajar en la banda entre los 10 keV y los 100 keV que corresponde a velocidades entre los $0.02c$ y $0.2c$ respectivamente. Con este acotamiento en las energías garantizamos una diferencia no mayor al 3% entre el análisis que aquí presentamos y un tratamiento que incluya los términos relativistas. Este cálculo del error se hace usando la expresión para la energía cinética relativista de una partícula $E_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right]$, expandiendo esta expresión usando el teorema del binomio $(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \dots$ y comparando el valor obtenido con el calculado mediante la expresión clásica para la energía cinética $E_c = \frac{1}{2}m_e v^2$.

es la carga eléctrica de cada electrón. Reemplazando en la ecuación (115) los valores típicos de cada cantidad para una fulguración encontramos

$$r_{\text{g-fulguración}} \simeq \frac{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} \frac{6 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}}{10^{-1} \text{ kg C}^{-1} \text{ s}^{-1}} \simeq 3.4 \times 10^{-3} \text{ m},$$

de forma que el radio de giro resulta ser unos 10 órdenes de magnitud menor que la longitud típica de un bucle solar y por lo tanto se puede despreciar el movimiento helicoidal de manera que espacialmente cada partícula solo dependa de su posición a lo largo del bucle, la cual denotaremos como s de aquí en adelante.

La función de distribución en el espacio de momentum puede ser especificada por dos componentes del momentum. Hamilton et al. [1990] mostraron que dos cantidades que se pueden usar para este fin son la *energía* (E) y el coseno del ángulo de inclinación (μ). De esta manera la función de distribución depende de cuatro variables $W = W(E, \mu, s, t)$, siendo t el tiempo. Esta función de distribución obedece la ecuación de *Fokker-Planck* mostrada en (78), el problema se reduce entonces a resolver dicha ecuación. Aunque existe un par de soluciones analíticas de esta ecuación bajo restricciones fuertes, en general la forma de resolverla debe ser mediante el uso de un método numérico. Existen varias técnicas disponibles para atacar el problema numéricamente. Siguiendo a Hamilton et al. [1990], nosotros usamos la técnica de *diferencias finitas* junto con la de *operador de división* (en inglés *time operator splitting*).

Método de diferencias finitas

El método consiste en solucionar una determinada ecuación diferencial parcial que evoluciona linealmente en el tiempo haciendo que esta sea igual a la suma de ciertos operadores diferentes \hat{O}_i que actúan sobre la función evolutiva y dependen de la ecuación diferencial en particular que se quiere solucionar, como se muestra:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^k \hat{O}_i[W(\mathbf{x}, t)], \quad (116)$$

en donde \mathbf{x} es el vector en el espacio de fase (aquí \mathbf{x} representa E , μ y s), W es al menos de clase C^3 y los \hat{O}_i son operadores diferenciales ($i \geq 1$) o multiplicativos ($i = 0$). De acuerdo con el método del operador de división, uno puede expresar la función $W(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ como una aplicación sucesiva de operadores diferencias sobre la función $W(\mathbf{x}, t)$ de modo tal que dicha aplicación sucesiva se aproxime al operador diferencial \hat{O}_i y hace que la función W avance en un paso de tiempo Δt .

$$W(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \Phi_k(\Phi_{k-1}[\dots \Phi_2(\Phi_1[W(\mathbf{x}, t), \Delta t], \Delta t) \dots, \Delta t], \Delta t), \quad (117)$$

De esta manera se hace la aproximación entre la ecuación diferencial real y una sucesión de ecuaciones de diferenciales finitas que dependen del orden de las derivadas en consideración, de modo tal que si:

$$\begin{aligned} \text{si } i = 1, \quad & \hat{O}_1[W(\mathbf{x}, t)] \rightarrow W(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \Phi_1(W, \Delta t), \\ \text{si } i = 2, \quad & \hat{O}_2[W(\mathbf{x}, t)] \rightarrow W(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \Phi_2[\Phi_1(W, \Delta t)], \end{aligned} \quad (118)$$

etc. Con esta descripción del método ya es posible entrar a analizar en detalle cada término en la ecuación (78). Una forma general operacional de la ecuación (78) es

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = g(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^3 f_j(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} (V_j(\mathbf{x}) W(\mathbf{x}, t)) + q(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mu} \left(h(\mu) \frac{\partial W(\mathbf{x}, t)}{\partial \mu} \right) \quad (119)$$

en donde $j = 1, 2, 3$ representa a las variables E, μ, s . Para continuar con el análisis consideraremos más adelante los términos de cada una de las variables en la ecuación (78). En este método numérico usualmente se toman las variaciones con respecto a s, E, μ , en forma independiente, como si la variación temporal de la función de distribución W con respecto al tiempo, $-\partial W/\partial t$, variase en forma independiente con respecto a las tres variables citadas anteriormente, de modo tal que consideraremos cada una de estas variaciones como una ecuación diferencial más sencilla, la cual se resuelve, y al final la suma de las tres contribuciones se considerará como la variación total de W con respecto del tiempo. Para facilitar nuestra nomenclatura cada una de las variaciones de W con respecto del tiempo, encontradas de la forma citada, las llamaremos W_s, W_E, W_μ , sin que ello denote una naturaleza vectorial de W .

Dependencia con la posición

Nótese que en este término la rapidez v es independiente de la posición a lo largo del bucle s de manera que el tratamiento se simplifica. La ecuación a considerar es

$$\frac{\partial W_s}{\partial t} = -\mu v \frac{\partial W}{\partial s}, \quad (120)$$

A este tipo de ecuación se le conoce con el nombre de *ecuación de transporte monótono*. Para este tipo de ecuaciones el mejor método que puede ser usado para solucionarla es justamente el de diferencias finitas [Hawley et al., 1984]. La función de distribución $W_s(s, t + \Delta t)$ se expresa como

$$W_s(s, t + \Delta t) = \begin{cases} W_s(s, t) - \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s} [W_s(s, t) - W_s(s - \Delta s, t)] - \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s} (1 - \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s}) [\Delta W_s(s, t) - \Delta W_s(s - \Delta s, t)], & \text{para } \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s} > 0, \\ W_s(s, t) - \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s} [W_s(s + \Delta s, t) - W_s(s, t)] - \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s} (1 - \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s}) [\Delta W_s(s + \Delta s, t) - \Delta W_s(s, t)], & \text{para } \mu v \frac{\Delta t}{\Delta s} < 0; \end{cases} \quad (121)$$

en donde Δs es el tamaño del paso en la división que se establezca a lo largo de la longitud del bucle y

$$\Delta W_s(s, t) = \begin{cases} \frac{[W_s(s, t) - W(s - \Delta s, t)][W_s(s + \Delta s, t) - W_s(s, t)]}{[W_s(s + \Delta s, t) - W_s(s - \Delta s, t)]}, & \text{para } [W_s(s, t) - W_s(s - \Delta s, t)][W_s(s + \Delta s, t) - W_s(s, t)] > 0, \\ 0, & \text{para el resto.} \end{cases} \quad (122)$$

Dependencia con la energía

Para este término la velocidad de transporte $V(\mathbf{x}, t)$ en la ecuación (77) depende explícitamente de la energía, de manera que para proponer una solución se define la función $W_E = VW_E$ y $d\mathcal{E} = V dE$; de esta manera el problema se reduce al que ya se resolvió arriba y se puede llevar a cabo usando el mismo método. En este caso se aplica el algoritmo descrito por Centrella and Wilson [1984]. Así

$$W_E(E', t + \Delta t) = W_E(E', t) - \frac{\Delta t}{\Delta E} [V_E(E' + \Delta E/2)W(E' + \Delta E/2, t) - V_E(E' - \Delta E/2)W(E' - \Delta E/2, t)]. \quad (123)$$

Físicamente, $V_E(E' + \Delta E/2)W(E' - \Delta E/2, t)$ y $V_E(E' - \Delta E/2)W(E' + \Delta E/2, t)$ son el flujo que sale y que entra respectivamente a la celda numérica centrada en el valor de energía particular E' (en el caso en el que $V_E < 0$ entonces los flujos serán negativos). El valor de $W_E(E' - \Delta E/2, t)$ está dado por

$$\begin{aligned} \text{si } V_E > 0 : W_E(E' - \Delta E/2, t) &= \begin{cases} \min[W(E' - \Delta E), \max\{\mathcal{W}(E', t), \bar{W}(E', t)\}], & W(E', t) \leq W(E' - \Delta E, t) \\ \max[W(E' - \Delta E), \min\{\mathcal{W}(E', t), \bar{W}(E', t)\}], & W(E', t) > W(E' - \Delta E, t) \end{cases}, \\ \text{si } V_E < 0 : W_E(E' - \Delta E/2, t) &= \begin{cases} \max[W(E'), \min\{\mathcal{W}(E', t), \bar{W}(E', t)\}], & W(E', t) \leq W(E' - \Delta E, t) \\ \min[W(E'), \max\{\mathcal{W}(E', t), \bar{W}(E', t)\}], & W(E', t) > W(E' - \Delta E, t) \end{cases}, \end{aligned} \quad (124)$$

$$\text{con } \bar{W}(E', t) = \frac{W(E', t) + W(E' - \Delta E)}{2}, \text{ y}$$

$$\mathcal{W}(E', t) = \begin{cases} \frac{3}{2}W(E' - \Delta E, t) - \frac{1}{2}W(E' - 2\Delta E, t), & \text{para } V_E > 0 \\ \frac{3}{2}W(E', t) - \frac{1}{2}W(E' + \Delta E, t), & \text{para } V_E < 0 \end{cases}. \quad (125)$$

Dependencia con el ángulo de inclinación (término difusivo)

El término de dispersión por colisión Coulombiana en la ecuación (78) hace que aparezca un término difusivo en la dependencia con el ángulo de inclinación de la ecuación de *Fokker-Planck* además del término convectivo, como lo podemos apreciar en la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\mu(\mathbf{x}, t) = v \frac{d \ln B}{ds} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{(1 - \mu^2)}{2} W \right) + \frac{c^4}{\lambda_0 v^3 \gamma^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial W}{\partial \mu} \right]. \quad (126)$$

Esta ecuación tiene la forma funcional:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_\mu = B(\mu) \frac{\partial W_\mu}{\partial \mu} + C(\mu) \frac{\partial^2 W_\mu}{\partial \mu^2}, \quad (127)$$

la cual puede ser solucionada numéricamente usando el método de *Crank-Nicholson* [Smith, 1985]. Explícitamente,

$$\begin{aligned} \frac{W_\mu(\mu, t + \Delta t) - W_\mu(\mu, t)}{\Delta t} &= \frac{B_\mu}{2} \left[\frac{W_\mu(\mu + \Delta \mu, t) - W_\mu(\mu - \Delta \mu, t)}{2 \Delta \mu} + \frac{W_\mu(\mu + \Delta \mu, t + \Delta t) - W_\mu(\mu - \Delta \mu, t + \Delta t)}{2 \Delta \mu} \right] \\ &\quad + \frac{C_\mu}{2 \Delta \mu} \left[\left(\frac{W_\mu(\mu + \Delta \mu, t) - W_\mu(\mu, t)}{\Delta \mu} - \frac{W_\mu(\mu, t) - W_\mu(\mu - \Delta \mu, t)}{\Delta \mu} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{W_\mu(\mu + \Delta \mu, t + \Delta t) - W_\mu(\mu, t + \Delta t)}{\Delta \mu} - \frac{W_\mu(\mu, t + \Delta t) - W_\mu(\mu - \Delta \mu, t + \Delta t)}{\Delta \mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (128)$$

Código numérico

Teniendo en cuenta los algoritmos expuestos anteriormente para la solución numérica de la ecuación de *Fokker-Planck* dependiente del tiempo, Hamilton et al. desarrollaron un conjunto de códigos en 1997 escritos en FORTRAN que solucionan la ecuación bajo las condiciones físicas típicas (según la literatura científica) de la aceleración de electrones en una fulguración solar. Años más tarde Holman et al. [2001] desarrollaron mejoras en velocidad y eficiencia de cómputo de este conjunto de programas e implementaron unos códigos escritos en lenguaje IDL (de sus siglas en inglés *Interactive Data Language*) para facilitar la visualización de los resultados. Todos estos programas han sido publicados en la internet en la página <http://hesperia.gsfc.nasa.gov/hessi/modelware.htm> (fkrplk.zip)¹³; también es posible encontrar allí la documentación necesaria para entender la forma general en que funcionan los códigos, la forma en la que pueden ser modificados para incluir otras fenomenologías aparte de las que están incluidas como lo son, emisión *Bremsstrahlung* en rayos-X y radiación girosincrotrón), y la manera en la que deben ser corridos para obtener los resultados esperados [Holman et al., 2001]. Este conjunto de programas consta de diez códigos escritos en FORTRAN 90 que contienen todos los algoritmos necesarios para resolver la ecuación de *Fokker-Planck*, además de la geometría, condiciones de frontera y condiciones iniciales de jet de partículas incidentes. Además contiene el programa en IDL que grafica los resultados fácilmente.

Recientemente y de manera simultánea al desarrollo de esta tesis *Paulo Simoes* ha traducido estos códigos a C++ y ha introducido una manera sencilla de trabajar con diferentes tipos de funciones de inyección del conjunto incidente de partículas, la función que describe la densidad del plasma ambiental, y la forma en la que el campo magnético se distribuye a lo largo del bucle solar. Además, introduce en los códigos el manejo de archivos binarios como archivos de salida para que sea más sencilla su visualización usando lenguajes como IDL. Inicialmente trabajamos con base en los códigos desarrollados por Holman et al. [2001], y luego trabajamos en una colaboración con el Dr. *Paulo Simoes* quien actualmente es investigador posdoc en la *School of Physics and Astronomy* de la Universidad de Glasgow (UK), para aprovechar las ventajas ya descritas de este nuevo conjunto de programas.

Consideraciones iniciales de la simulación

Para abordar el problema se debe establecer qué tipo de condiciones iniciales se exigen sobre las condiciones físicas y geométricas de la función de distribución en cada una de las variables que la gobiernan para el conjunto completo de partículas inyectadas. En lo que se refiere a la dependencia energética de la función de distribución, apelamos a los trabajos desarrollados por Lu and Petrosian [1988] en los que mostraron que la intensidad de flujo asociada a las fases impulsiva y de decaimiento de una fulguración solar tiene una dependencia expresada mediante

$$I(E, t) = I_{E_0}(t) \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-\gamma(t)}, \quad (129)$$

donde E_0 es una energía de referencia (que usualmente se toma como 50keV) y γ es el índice espectral para los fotones provenientes de la fulguración.

¹³Desarrollos recientes plantean otro tipo de códigos para resolver esta misma ecuación. Ver por ejemplo <http://code.google.com/p/fokker-planck-code/downloads/list>.

Fecha	Hora (TU)	δ
20 Feb 2002	11:06:00 - 11:06:40	4.89
17 Mar 2002	19:27:30 - 19:29:10	4.84
31 May 2002	00:06:40 - 00:08:00	3.79
01 Jun 2002	03:53:10 - 03:54:30	4.26

Table 4: Índice de la ley de potencias que obedece la distribución de densidad de electrones para cuatro fulguraciones diferentes que tuvieron lugar en 2002. El valor de cada índice se determinó usando un blanco ionizado uniforme bajo el protocolo usado por defecto por SPEX, el software especializado de RHESSI para estos menesteres [Kontar et al., 2002].

Por otro lado, si se asume que la función de distribución de densidad electrónica obedece también una ley de potencias, es decir $f_{\text{electrones}} \propto E^{-\delta}$, el índice de la ley de potencia δ debe estar relacionado de alguna manera con el índice espectral γ . Así, dependiendo del tipo de interacción entre los electrones acelerados y el plasma del ambiente circundante a la posición donde la emisión fotónica tiene lugar, esta relación toma una forma que depende esencialmente del mecanismo dominante de radiación. Tandberg-Hanssen and Emslie [1988] hacen una descripción de este tipo de relación entre los dos índices a través de los dos modelos que han demostrado mayor éxito hasta el momento en su contraste con los resultados observacionales, el llamado modelo de **blanco grueso** (*thick target model*) y el modelo de **blanco delgado** (*thin target model*). Según estos modelos, esta relación está dada por

$$\gamma_{\text{thin}} = \delta + 0.5 \quad \gamma_{\text{thick}} = \delta - 1.5. \quad (130)$$

La realidad es que el valor numérico de estos índices de deben encontrar de forma empírica. Muchos trabajos en torno al mejor ajuste de los espectros observacionales de diferentes fulguraciones han sido desarrollados, obteniendo rangos de validez para estos índices entre $2 \leq \delta \leq 8$ y $3 \leq \gamma \leq 9$ [Grigis and Benz, 2006]. Un ejemplo de este tipo de análisis observational lo muestran Kontar et al. [2002], quienes para cuatro eventos de fulguraciones altamente energéticas reportan valores de índice espectral de los electrones como se puede apreciar en el cuadro 4.

Teniendo en cuenta lo anterior, no estamos muy lejos de la realidad física si para el tiempo inicial imponemos que la distribución de densidad electrónica en función de la energía obedecerá una ley de potencia con índice $\delta = 4.5$. En general,

$$f_{\text{electrones}} = A_e (m_e c^2)^{-\delta} \quad (131)$$

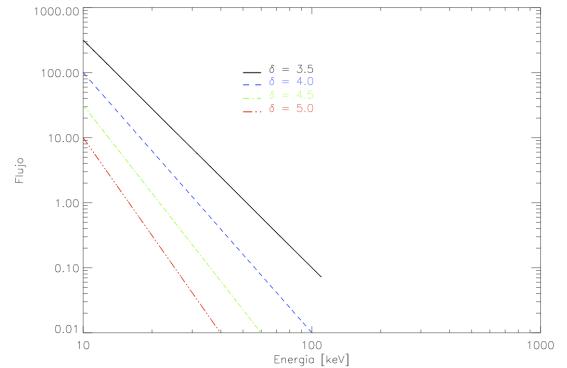


Figure 26: Ejemplo de las distribuciones tipo ley de potencias usadas para ajustar la parte de emisión no-térmica de un espectro típico de una fulguración solar con una emisión discernible en rayos-X duros. Como se ejemplifica en el cuadro 4 los índices δ usualmente toman valores entre 3.5 y 5.0. Para la distribución energética de la distribución de densidad electrónica que se introduce como *input* en nuestra simulación usamos valores para δ en el rango que se muestra aquí.

donde A_e es una constante de ajuste al espectro según el flujo que se tenga y $m_e c^2$ es la energía total de un electrón típico (la suma de la energía en reposo más su energía cinética).

Siguiendo con la discusión de cómo debe ser la distribución inicial del programa que resuelve numéricamente la ecuación de *Fokker-Planck* en función de cada una de las variables de las que depende, ahora es el turno de discutir la distribución inicial de la densidad electrónica en función del ángulo de inclinación α , o equivalentemente del coseno de este, $\mu = \cos \alpha$. Una vez el *jet* de partículas es inyectado en el bucle solar por la cima de este, la dirección en la que inciden cada una de ellas tiene un sentido preferencial que resulta ser perpendicular a las líneas de campo magnético en esa localidad, es decir $\cos \alpha = 0$. Este proceso de inyección está acompañado de varios fenómenos aleatorios, la distribución incidente se debe poder modelar como una distribución gaussiana con cierto valor de desviación estándar. Así, $f_\alpha = A_\alpha \exp\left[-\frac{\mu^2}{2d\mu^2}\right]$, siendo A_α una constante de normalización o de ajuste y $d\mu$ la desviación estándar. Algunos trabajos se han desarrollado tratando de describir la mejor función de distribución en función del ángulo de inclinación que mejor se acomode a los resultados observacionales y que pueda ser usada como parámetro de entrada en los diferentes códigos numéricos relacionados con este fenómeno. Siguiendo a Lee and Gary [2000] nosotros usamos para $t = 0$, los valores iniciales $\mu = 0$ para el coseno del ángulo de inclinación α y $d\mu = 0.26$ para su desviación estándar respectivamente.

Usamos también una distribución con dependencia gaussiana en la posición, esto es

$$f_s = A_s \exp\left[-\frac{s^2}{2ds^2}\right], \quad (132)$$

con $ds = 10^8$ cm (dos órdenes de magnitud menor que la longitud típica de un bucle solar), en donde ds es la desviación estándar respectiva. De esta manera, la distribución de densidad de probabilidad en función de la posición, el ángulo de inclinación y de la posición para el momento de la inyección (que usamos como parámetro de entrada de nuestra simulación) es algo como lo que se muestra en la figura 27.

Es importante precisar también la forma temporal en la que deben ser inyectadas las partículas en la cima

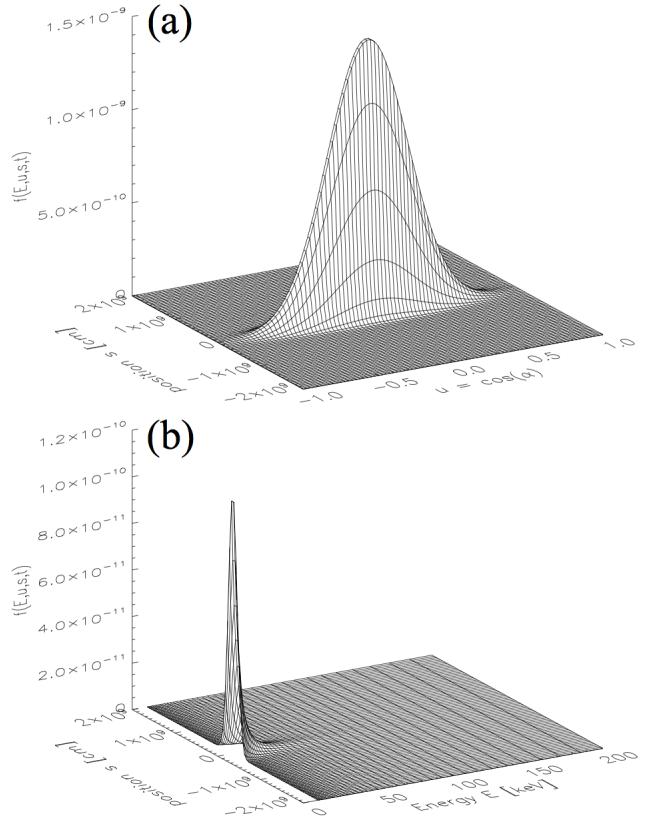


Figure 27: Función de entrada para la distribución de densidad de probabilidad electrónica. (a) Dependencia gaussiana con la posición y el ángulo de inclinación. (b) Dependencia con la posición y la energía.

del bucle. Numéricamente lo más sencillo es hacer que todo el conjunto de partículas aparezcan en la cima súbitamente para un tiempo dado (el tiempo inicial) tal y como funciona el código original desarrollado por Hamilton et al. [1990]. Sin embargo, esto no es del todo cierto durante el fenómeno físico real; en el momento de la inyección las partículas arriban al bucle con cierta distribución temporal. Siguiendo a Aschwanden [2004], este tiempo de inyección de las partículas es más importante que el tiempo en el cual se hayan acelerado las partículas, previas a su incidencia sobre la cima del bucle, para determinar la escala de tiempo de emisión en rayos-X duros, y lo cual es lo que nos caracteriza la dinámica del proceso post-reconexión.

Una vez definida la física detrás de la inyección del conjunto de electrones acelerados en la cima de bucle solar podemos centrarnos más en los detalles técnicos relacionados con los parámetros iniciales que se deben suministrar al conjunto de programas que resuelve la ecuación de *Fokker-Planck* dependiente del tiempo que es justamente el tema que abordamos a continuación.

Parámetros de entrada del conjunto de programas

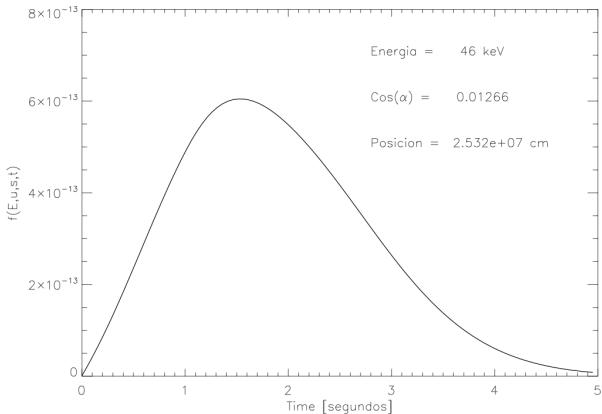


Figure 28: Evolución temporal de la distribución de densidad de probabilidad electrónica usado en la simulación con una energía de 46 keV, una ángulo de inclinación de 89.3° y una posición fija de 2.532×10^7 cm. Se ve claramente que la función de inyección de partículas obedece una forma gaussiana y que la intensidad máxima de inyección se alcanza cerca de ~ 1 segundo como propone Aschwanden [2004].

dos queremos usar a través de la variable **bmodel** que si es cero tomará el modelo parabólico, y si es uno tomará el modelo exponencial. Además se debe definir la densidad de número de partículas del plasma, esto se hace a través de **nmin** y **nmax** (son valores alrededor de 10^{10} cm $^{-3}$). El tiempo de la simulación está en segundos y es el tiempo fenomenológico del proceso que se está simulando, **tmax** (tipicamente igual a 5 segundos). Por último, debemos definir la función de distribución de las partículas que se inyectan. Dicha función debe definir la distribución de la energía, el ángulo de倾inación y la distancia a lo largo del bucle

para el conjunto de partículas inyectadas. Esto se hace mediante un par de distribuciones gaussianas en el ángulo de inclinación y en la distancia a lo largo del bucle, $f_\alpha = A_\alpha \exp\left[-\frac{p^2}{2dp^2}\right]$ y $f_s = A_s \exp\left[-\frac{x^2}{2dx^2}\right]$ respectivamente. La distribución de energía de las partículas en una ley de potencias de la forma $fe = A_e(mc^2)^{-\delta}$. Así debemos definir las variables **d0**= δ que es el índice de la ley de potencias inicial para la energía del conjunto de partículas (usualmente 4.5). **dp** es la desviación estándar para la distribución del ángulo de inclinación (por defecto escogemos 0.26). **p0** es el centro de la distribución gaussiana definida para el ángulo de inclinación (comunmente se toma $p0=0$ porque se trata del coseno del ángulo de inclinación, y esto significa $\alpha = 90^\circ$). De manera similar **xd** es la desviación estándar en la distribución gaussiana inicial propuesta para la variable espacial (debe estar alrededor de un orden de magnitud menor a la longitud total del bucle), y **x0** es el centro de la distribución espacial (por defecto se toma como cero, a menos que se quiera una mayor distribución sobre alguna de las patas del bucle). **t0** es el tiempo posterior a la reconexión donde ocurre el máximo en la distribución de partículas (comunmente se toma como 1.0 segundo). Finalmente **tau** es la desviación estándar en tiempo para la distribución inicial de las partículas (por defecto se toma igual a 2.0). Si se quiere inyectar un pulso repentino de partículas en un mismo punto, se debe tomar tau = 0. Además de esto el conjunto de programas está en la capacidad de considerar varios procesos físicos asociados con el fenómeno de la aceleración estocástica de partículas en un bucle solar. Para poder hacer cambios en los códigos de una manera más cómodo, y en busca de hacer un seguimiento de la forma en que cada uno de estos procesos afecta la dinámica del conjunto completo de partículas, se han introducido las variables **run0**, **run1**, **run2**, **run3** y **run4**. Cada una de estas puede tomar uno de dos únicos valores, 1 si se va a considerar como activo en el momento de ejecutar el programa o 0 si no se considera. **run 0** activa el transporte (movimiento a lo largo del bucle solar) de todas las partículas. **run1** activa la capacidad de las partículas de perder energía a través de los diferentes procesos que se mencionaron en el capítulo anterior. **run2** activa la reflexión magnética en el bucle, que como ya se vió depende del *ángulo de inclinación* y la magnitud del campo magnético. **run3** activa la difusión Coulombiana de las partículas aceleradas cuando interactúan con el plasma ambiental. **run4** define un tiempo finito de inyección de las partículas a acelerar dentro del bucle.

Una vez definidos todos estos parámetros, procedemos a correr el conjunto de códigos con los valores de cada variable inicial como se indicó en el párrafo anterior con el objetivo principal de hacer una primera prueba de calibración y de referencia del funcionamiento básico de la simulación.

Bibliography

- Aguirre, M. A. (2000). The expansion in series (of Taylor types) of (k-1)derivatives of Dirac's delta in m+P. *Integral and Special Functions*, pages 85–+.
- Alvarado-Gómez, J. D., Buitrago-Casas, J. C., Martínez-Oliveros, J. C., Lindsey, C., Hudson, H., and Calvo-Mozo, B. (2012). Magneto-Acoustic Energetics Study of the Seismically Active Flare of 15 February 2011. *Solar Phys.*, 280:335–345.
- Aschwanden, M. J. (2004). Pulsed particle injection in a reconnection-driven dynamic trap model in solar flares. *Astrophysical Journal*, 608:554–561.
- Bai, T. (1982). Transport of energetic electrons in a fully ionized hydrogen plasma. *ApJ*, 259:341–349.
- Becker, P. A., Le, T., and Dermer, C. D. (2006). Time-dependent Stochastic Particle Acceleration in Astrophysical Plasmas: Exact Solutions Including Momentum-dependent Escape. *ApJ*, 647:539–551.
- Benz, A. O. (2002). *Plasma Astrophysics: Kinetic Processes in Solar and Stellar Coronae*, volume 279 of *Astrophysics and Space Science Library*. Kluwer, Dordrecht, Netherlands; Boston, U.S.A., 2nd edition.
- Besliu-Ionescu, D., Donea, A.-C., Cally, P., and Lindsey, C. (2005). a Survey of X-Class Solar Flares during 2001 and 2002 IN Search for Seismic Radiation. In *The Dynamic Sun: Challenges for Theory and Observations*, volume 600 of *ESA Special Publication*.
- Born, M. and Wolf, E. (1975). *Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*.
- Braun, D. C. and Birch, A. C. (2008). Prospects for the Detection of the Deep Solar Meridional Circulation. *ApJ*, 689:L161–L165.
- Braun, D. C., Duvall, Jr., T. L., and Labonte, B. J. (1988). The absorption of high-degree p-mode oscillations in and around sunspots. *ApJ*, 335:1015–1025.
- Centrella, J. and Wilson, J. R. (1984). Planar numerical cosmology. II - The difference equations and numerical tests. *ApJS*, 54:229–249.
- Chandrasekhar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*, 15:1–89.
- Chang, H.-K., Chou, D.-Y., Labonte, B., and TON Team (1997). Ambient acoustic imaging in helioseismology. *Nature*, 389:825–827.

- Chou, D.-Y., Yang, M.-H., Zhao, H., Liang, Z.-C., and Sun, M.-T. (2009). Spatial Distributions of Absorption, Local Suppression, and Emissivity Reduction of Solar Acoustic Waves in Magnetic Regions. *ApJ*, 706:909–916.
- Christensen-Dalsgaard, J. (2002). Helioseismology. *Reviews of Modern Physics*, 74:1073–1129.
- Christensen-Dalsgaard, J., Gough, D. O., and Thompson, M. J. (1991). The depth of the solar convection zone. *ApJ*, 378:413–437.
- Cohn, H. and Kulsrud, R. M. (1978). The stellar distribution around a black hole - Numerical integration of the Fokker-Planck equation. *ApJ*, 226:1087–1108.
- Collier, R. J., Burckhardt, C. B., and Lin, L. H. (1971). *Optical holography*.
- Corbard, T., Toner, C., Hill, F., Hanna, K. D., Haber, D. A., Hindman, B. W., and Bogart, R. S. (2003). Ring-diagram analysis with GONG++. In Sawaya-Lacoste, H., editor, *GONG+ 2002. Local and Global Helioseismology: the Present and Future*, volume 517 of *ESA Special Publication*, pages 255–258.
- De Pontieu, B., Erdélyi, R., and James, S. P. (2004). Solar chromospheric spicules from the leakage of photospheric oscillations and flows. *nature*, 430:536–539.
- Donea, Besliu-Ionescu, D., Cally, P., and Lindsey, C. (2006a). New detection of acoustic signatures from solar flares. In Leibacher, J., Stein, R. F., and Uitenbroek, H., editors, *Solar MHD Theory and Observations: A High Spatial Resolution Perspective, 18-22 July, 2005*, volume 354 of *ASP Conference Series*, page 168, National Solar Observatory, Sacramento Peak, Sunspot, New Mexico, USA. Astronomical Society of the Pacific.
- Donea, A. and Newington, M. (2011). Stochastic Seismic Emission from Acoustic Glories in Solar Active Regions. *Journal of Physics Conference Series*, 271(1):012004.
- Donea, A.-C., Besliu-Ionescu, D., Cally, P. S., Lindsey, C., and Zharkova, V. V. (2006b). Seismic emission from a m9.5-class solar flare. *Solar Physics*, 239:113–135.
- Donea, A.-C. and Lindsey, C. (2005). Seismic emission from the solar flares of 2003 october 28 and 29. *Astrophysical Journal*, 630:1168–1183.
- D’Silva, S. (1996). Theoretical Foundations of Time-Distance Helioseismology. *ApJ*, 469:964.
- D’Silva, S. (2001). Equivalence between Duvall’s Law and the Time-Distance Curve. *ApJ*, 549:L135–L137.
- D’Silva, S. and Duvall, Jr., T. L. (1995). Time-distance helioseismology in the vicinity of sunspots. *ApJ*, 438:454–462.
- Duvall, T., Jefferies, S., Harvey, J., and Pomerantz, M. (1993). Time-distance helioseismology. *Nature*, 362:430–432.
- Duvall, T. L. (2010). Time-Distance Helioseismology (Invited). *AGU Fall Meeting Abstracts*, page A1.
- Duvall, Jr., T. L. (1995). Time-Distance Helioseismology: an Update. In R. K. Ulrich, E. J. Rhodes Jr., & W. Dappen, editor, *GONG 1994. Helio- and Astro-Seismology from the Earth and Space*, volume 76 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 465.

- Elder, F. R., Gurewitsch, A. M., Langmuir, R. V., and Pollock, H. C. (1947). Radiation from Electrons in a Synchrotron. *Physical Review*, 71:829–830.
- Fokker, A. D. (1914). Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld. *Annalen der Physik*, 348:810–820.
- Gizon, L. and Birch, A. C. (2004). Time-Distance Helioseismology: Noise Estimation. *ApJ*, 614:472–489.
- Goldreich, P. and Keeley, D. A. (1977). Solar seismology. II - The stochastic excitation of the solar p-modes by turbulent convection. *ApJ*, 212:243–251.
- González Hernández, I., Komm, R., Hill, F., Howe, R., Corbard, T., and Haber, D. A. (2006). Meridional Circulation Variability from Large-Aperture Ring-Diagram Analysis of Global Oscillation Network Group and Michelson Doppler Imager Data. *ApJ*, 638:576–583.
- Grigis, P. C. and Benz, A. O. (2006). Electron acceleration in solar flares: theory of spectral evolution. *A&A*, 458:641–651.
- Gubbins, D. (1990). *Seismology and Plate Tectonics*.
- Haber, D. A., Hindman, B. W., Toomre, J., Bogart, R. S., Larsen, R. M., and Hill, F. (2002). Evolving Submerged Meridional Circulation Cells within the Upper Convection Zone Revealed by Ring-Diagram Analysis. *ApJ*, 570:855–864.
- Hamilton, R. J., Lu, E. T., and Petrosian, V. (1990). Numerical solution of the time-dependent kinetic equation for electrons in magnetized plasma. *ApJ*, 354:726–734.
- Harvey, J. W., Hill, F., Hubbard, R. P., Kennedy, J. R., Leibacher, J. W., Pintar, J. A., Gilman, P. A., Noyes, R. W., Title, A. M., Toomre, J., Ulrich, R. K., Bhatnagar, A., Kennewell, J. A., Marquette, W., Patron, J., Saa, O., and Yasukawa, E. (1996). The Global Oscillation Network Group (GONG) Project. *Science*, 272:1284–1286.
- Hawley, J. F., Smarr, L. L., and Wilson, J. R. (1984). A numerical study of nonspherical black hole accretion. II - Finite differencing and code calibration. *ApJS*, 55:211–246.
- Hill, F. (1988). "rings and trumpets - three-dimensional power spectra of solar oscillations". *Astrophys. J.*, 333:996–1013.
- Holman, G. (1985). Acceleration of runaway electrons and Joule heating in solar flares. *apj*, 293:584–594.
- Holman, G., Mariska, J., McTiernan, J., Ofman, L., Petrosian, V., and Ramaty, R. (2001). Publicly Available Numerical Codes for Modeling the X-ray and Microwave Emissions from Solar and Stellar Activity. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 33 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 1444–+.
- Hudson, H., Fisher, G., and Welsch, B. (2008). Flare Energy and Magnetic Field Variations. In R. Howe, R.W.Komm, K.S.Balasubramaniam, & G.J.D.Petrie, editor, *Subsurface and Atmospheric Influences on Solar Activity*, volume 383 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 221–+.
- Hudson, H. S. (2000). Implosions in coronal transients. *Astrophysical Journal*, 531:L75–L77.

- Isobe, H., Kubo, M., Minoshima, T., Ichimoto, K., Katsukawa, Y., Tarbell, T. D., Tsuneta, S., Berger, T. E., Lites, B., Nagata, S., Shimizu, T., Shine, R. A., Suematsu, Y., and Title, A. M. (2007). Flare Ribbons Observed with G-band and FeI 6302Å, Filters of the Solar Optical Telescope on Board Hinode. *PASJ*, 59:807.
- Jackson, J. (1975). *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, U.S.A., 2nd edition.
- Kontar, E. P., Brown, J. C., and McArthur, G. K. (2002). Nonuniform Target Ionization and Fitting Thick Target Electron Injection Spectra to RHESSI Data. *Solar Phys.*, 210:419–429.
- Kosovichev, A. G. (2006). Sunquake sources and wave propagation. In Fletcher, K., editor, *Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun, 7-11 August 2006*, volume ESA SP-624, page 134, Sheffield, UK.
- Kosovichev, A. G. (2007). The Cause of Photospheric and Helioseismic Responses to Solar Flares: High-Energy Electrons or Protons? *ApJ*, 670:L65–L68.
- Kosovichev, A. G. (2011). Helioseismic Response to the X2.2 Solar Flare of 2011 February 15. *ApJ*, 734:L15.
- Kosovichev, A. G. and Duvall, T. L. (2011). Investigation of a sunspot complex by time-distance helioseismology. In *IAU Symposium*, volume 273 of *IAU Symposium*, pages 320–324.
- Kosovichev, A. G. and HMI Science Team (2007). Helioseismology program for Solar Dynamics Observatory. *Astronomische Nachrichten*, 328:339.
- Kosovichev, A. G. and Zharkova, V. V. (1995). Seismic response to solar flares: Theoretical predictions. In Hoeksema, J., Domingo, V., Fleck, B., and Battig, B., editors, *Proceedings of the 4th Soho Workshop: Helioseismology, 2-6 April 1995*, volume 376, page 341, Pacific Grove, California, USA. European Space Agency (ESA).
- Kosovichev, A. G. and Zharkova, V. V. (1998). X-ray flare sparks quake inside the sun. *Nature*, 393:317.
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. (1969). *Mechanics*.
- Larmor, J. (1898). Note on the Complete Scheme of Electrodynamic Equations of a Moving Material Medium, and on Electrostriction. *Royal Society of London Proceedings Series I*, 63:365–372.
- Leach, J. and Petrosian, V. (1981). Impulsive phase of solar flares. I - Characteristics of high energy electrons. *ApJ*, 251:781–791.
- Leach, J. and Petrosian, V. (1983). The impulsive phase of solar flares. II - Characteristics of the hard X-rays. *ApJ*, 269:715–727.
- Lee, J. and Gary, D. E. (2000). Solar Microwave Bursts and Injection Pitch-Angle Distribution of Flare Electrons. *ApJ*, 543:457–471.
- Lindsey, C. and Braun, D. C. (1997). Helioseismic Holography. *ApJ*, 485:895.
- Lindsey, C. and Braun, D. C. (2000). Basic principles of solar acoustic holography - (invited review). *Solar Physics*, 192:261–284.
- Lindsey, C. and Donea, A. (2008). Mechanics of Seismic Emission from Solar Flares. *solphys*, 251:627–639.

- Litvinenko, Y. E. and Somov, B. V. (1993). Particle acceleration in reconnecting current sheets. *Solar Physics*, 146:127–133.
- Liu, S. and Petrosian, V. (2004). Stochastic Proton and Electron Acceleration near Black Holes. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 36 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pages 1515–+.
- Liu, S., Petrosian, V., and Mason, G. M. (2004). Stochastic Acceleration of ${}^3\text{He}$ and ${}^4\text{He}$ by Parallel Propagating Plasma Waves. *ApJ*, 613:L81–L84.
- Liu, W. (2008). *Solar Flares as Natural Particle Accelerators: A High-energy View from X-ray Observations and Theoretical Models*. VDM Verlag Dr.
- Liu, W., Petrosian, V., and Mariska, J. T. (2009). Combined Modeling of Acceleration, Transport, and Hydrodynamic Response in Solar Flares. I. The Numerical Model. *ApJ*, 702:1553–1566.
- Longair, M. S. (1992). *High energy astrophysics. Vol.1: Particles, photons and their detection*.
- Lu, E. T. and Petrosian, V. (1988). Rapid temporal evolution of radiation from nonthermal electrons in solar flares. *ApJ*, 327:405–416.
- Machado, M. E., Emslie, A. G., and Avrett, E. H. (1989). Radiative backwarming in white-light flares. *Solar Physics*, 124:303–317.
- Martínez-Oliveros, J. C. (2009). *Multi-wavelength analysis in flare seismology and the role of magnetic field dynamics in the seismicity of solar active regions*. PhD thesis, Monash University. Faculty of Science. School of Mathematical Sciences.
- Martínez-Oliveros, J. C., Donea, A.-C., and Cally, P. S. (2008a). Hxr photospheric footprints. In Erdélyi, R. and no, C. A. M.-B., editors, *Waves & Oscillations in the Solar Atmosphere: Heating and Magneto-Seismology, September 2007*, volume 247 of *IAU Symposium*, pages 110–113, Isla Margarita, Venezuela. Cambridge University Press.
- Martínez-Oliveros, J. C., Donea, A.-C., Cally, P. S., and Moradi, H. (2008b). Helioseismic analysis of the solar flare-induced sunquake of 2005 january 15 - ii. a magnetoseismic study. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389:1905–1910.
- Martínez-Oliveros, J. C., Moradi, H., Besliu-Ionescu, D., Donea, A.-C., Cally, P. S., and Lindsey, C. (2007). From gigahertz to millihertz: A multiwavelength study of the acoustically active 14 august 2004 m7.4 solar flare. *Solar Physics*, 245:121–139.
- Martínez-Oliveros, J. C., Moradi, H., and Donea, A.-C. (2008c). Seismic emissions from a highly impulsive m6.7 solar flare. *Solar Physics*, 251:613–626.
- Matthews, S. A., Zharkov, S., and Zharkova, V. V. (2011). Anatomy of a Solar Flare: Measurements of the 2006 December 14 X-class Flare with GONG, Hinode, and RHESSI. *ApJ*, 739:71.
- McTiernan, J. (1989). *Numerical Simulations of X-Rays and Gamma-Rays from Solar Flares*. PhD thesis, Stanford University.

- McTiernan, J. M. and Petrosian, V. (1990). The behavior of beams of relativistic nonthermal electrons under the influence of collisions and synchrotron losses. *ApJ*, 359:524–540.
- Miller, J. A. (1998). Particle Acceleration in Impulsive Solar Flares. *Space Sci.Rev.*, 86:79–105.
- Miller, J. A., Larosa, T. N., and Moore, R. L. (1996a). Stochastic Electron Acceleration by Cascading Fast Mode Waves in Impulsive Solar Flares. *Astrophysical Journal*, 461:445–+.
- Miller, J. A., Larosa, T. N., and Moore, R. L. (1996b). Stochastic Electron Acceleration by Cascading Fast Mode Waves in Impulsive Solar Flares. *ApJ*, 461:445–+.
- Moradi, H., Donea, A., Besliu-Ionescu, D., Cally, P., Lindsey, C., and Leka, K. (2006a). Magnetohelioseismic analysis of ar10720 using helioseismic holography. In Leibacher, J., Stein, R. F., and Uitenbroek, H., editors, *Solar MHD Theory and Observations: A High Spatial Resolution Perspective, 18-22 July 2005*, volume 354 of *ASP Conference Series*, page 168, National Solar Observatory, Sacramento Peak, Sunspot, New Mexico, USA. Astronomical Society of the Pacific.
- Moradi, H., Donea, A.-C., Lindsey, C., Besliu-Ionescu, D., and Cally, P. S. (2006b). The acoustically active solar flare of 2005 january 15. In Fletcher, K., editor, *Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun, 7-11 August 2006*, volume ESA SP–624, page 66, Sheffield, UK.
- Moradi, H., Donea, A.-C., Lindsey, C., Besliu-Ionescu, D., and Cally, P. S. (2007). Helioseismic analysis of the solar flare-induced sunquake of 2005 january 15. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 374:1155–1163.
- Park, B. T. and Petrosian, V. (1996). Fokker-Planck Equations of Stochastic Acceleration: A Study of Numerical Methods. *ApJS*, 103:255–+.
- Park, B. T., Petrosian, V., and Schwartz, R. A. (1997). Stochastic Acceleration and Photon Emission in Electron-dominated Solar Flares. *Astrophysical Journal*, 489:358–+.
- Pearson, F. (1977). *Map Projection Equations*. Warfare Analysis Department.
- Pedram, E. and Matthews, S. A. (2012). A Survey of the Hard X-Ray Characteristics of Seismically Active and Quiet White-Light Flares. *Solar Phys.*, 277:317–335.
- Petrosian, V. (1981). Synchrotron emissivity from mildly relativistic particles. *ApJ*, 251:727–738.
- Petrosian, V. (1985). Directivity of bremsstrahlung radiation from relativistic beams and the gamma rays from solar flares. *Astrophys. J.*, 299:987–993.
- Petrosian, V. (1994). Acceleration of electrons in solar flares. In J.Ryan & W.T.Vestrand, editor, *High-Energy Solar Phenomena - a New Era of Spacecraft Measurements*, volume 294 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 162–170.
- Planck, M. (1917). Zur Theorie des Rotationsspektrums. *Annalen der Physik*, 358:241–256.
- Potts, H., Hudson, H., Fletcher, L., and Diver, D. (2010). The Optical Depth of White-light Flare Continuum. *ApJ*, 722:1514–1521.
- Risken, H. (1989). *The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications*.

- Salabert, D., Leibacher, J., Appourchaux, T., and Hill, F. (2009). Measurement of Low Signal-To-Noise Ratio Solar p-Modes in Spatially Resolved Helioseismic Data. *ApJ*, 696:653–667.
- Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., Hoeksema, J. T., Kosovichev, A. G., Schou, J., Rosenberg, W., Springer, L., Tarbell, T. D., Title, A., Wolfson, C. J., Zayer, I., and MDI Engineering Team (1995). The Solar Oscillations Investigation - Michelson Doppler Imager. *Solar Phys.*, 162:129–188.
- Schunker, H., Braun, D. C., Cally, P. S., and Lindsey, C. (2005). The local helioseismology of inclined magnetic fields and the showerglass effect. *Astrophysical Journal*, 621:L149–L152.
- Schwartz, M. (1987). *Principles of electrodynamics*. Dover, New York, U.S.A., 1nd edition.
- Smith, G. (1985). *numerical solution of partial differential equations: Finite difference Methods*. Oxford: Clarendon Press.
- Snyder, J. and Parr, J. (1926). *Flattening the earth : two thousand years of map projections*.
- Somov, B. V. (2006). *Plasma Astrophysics, Part I: Fundamentals and Practice*.
- Spruit, H. C. and Bogdan, T. J. (1992). The conversion of p-modes to slow modes and the absorption of acoustic waves by sunspots. *ApJ*, 391:L109–L112.
- Tandberg-Hanssen, E. and Emslie, A. G. (1988). *The physics of solar flares*.
- Thompson, M. J., Toomre, J., Anderson, E. R., Antia, H. M., Berthomieu, G., Burtonclay, D., Chitre, S. M., Christensen-Dalsgaard, J., Corbard, T., De Rosa, M., Genovese, C. R., Gough, D. O., Haber, D. A., Harvey, J. W., Hill, F., Howe, R., Korzennik, S. G., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Pijpers, F. P., Provost, J., Rhodes, Jr., E. J., Schou, J., Sekii, T., Stark, P. B., and Wilson, P. R. (1996). Differential Rotation and Dynamics of the Solar Interior. *Science*, 272:1300–1305.
- Thompson, W. T. (2006). Coordinate systems for solar image data. *A&A*, 449:791–803.
- Tsuneta, S. and Naito, T. (1998). Fermi Acceleration at the Fast Shock in a Solar Flare and the Impulsive Loop-Top Hard X-Ray Source. *APJ*, 495:L67+.
- Van de Vooren, A. I. and Vliegenthart, A. C. (1967). On the 9-point difference formula for Laplace's equation. *JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS*, 1:187–202.
- White, S. M., Benz, A. O., Christe, S., Fárník, F., Kundu, M. R., Mann, G., Ning, Z., Raulin, J.-P., Silva-Válio, A. V. R., Saint-Hilaire, P., Vilmer, N., and Warmuth, A. (2011). The Relationship Between Solar Radio and Hard X-ray Emission. *Space Sci.Rev.*, pages 88–+.
- Wolff, C. L. (1972). Free oscillations of the sun and their possible stimulation by solar flares. *Astrophysical Journal*, 176:833.
- Wood, P. and Neukirch, T. (2005). Electron Acceleration in Reconnecting Current Sheets. *Solar Physics*, 226:73–95.
- Zhao, J., Couvidat, S., Bogart, R. S., Duvall, Jr., T. L., Kosovichev, A. G., Beck, J. G., and Birch, A. C. (2011). HMI time-distance pipeline: An overview and data products. *Journal of Physics Conference Series*, 271(1):012063.

- Zharkov, S., Zharkova, V. V., and Matthews, S. A. (2011). Comparison of Seismic Signatures of Flares Obtained by SOHO/Michelson Doppler Imager and GONG Instruments. *ApJ*, 739:70.
- Zharkova, V. V. (2008). The Mechanisms of Particle Kinetics and Dynamics Leading to Seismic Emission and Sunquakes. *Solar Phys.*, 251:641–663.
- Zharkova, V. V., Arzner, K., Benz, A. O., Browning, P., Dauphin, C., Emslie, A. G., Fletcher, L., Kontar, E. P., Mann, G., Onofri, M., Petrosian, V., Turkmani, R., Vilmer, N., and Vlahos, L. (2011). Recent Advances in Understanding Particle Acceleration Processes in Solar Flares. *Space Sci.Rev.*, pages 278–+.
- Zharkova, V. V. and Zharkov, S. I. (2007). On the origin of three seismic sources in the proton-rich flare of 2003 october 28. *Astrophysical Journal*, 664:573–585.