Modelos de Ising y Schelling

Módulo 4 : Técnicas computacionales avanzadas para modelar fenómenos sociales
Concentración en Economía Aplicada y Ciencia de Datos
ITESM

5 de mayo de 2023

1. Modelo de Ising (Solé, 2011)

2. Modelo de Schelling (Stachurski, 2022)

Transiciones de Fase

- Muchos sistemas complejos se caracterízan por presentar diferentes patrones o comportamientos cualitativos, o **fases**.
- Tales fases corresponden a diferentes formas de organización interna y dos fases están usualmente separadas por un **límite**.
- Cruzar este límite implica un cambio en el comportamiento del sistema.
- Un buen modelo de un sistema complejo debe ser capaz de modelar la presencia de tales fases y sus implicaciones.

Transición de Fase

(a)

(b)

Transiciones de Fase

- Cuando un parámetro es ajustado y cruza un umbral, observamos cambios en la organización del sistema o en su dinámica.
- Esos diferentes patrones de organización las denominamos *fases*.
- El fenómeno de transición de fase es **colectivo** por naturaleza y resulta de interacciones que toman lugar entre unidades que interactúan entre sí.
- Estas unidades pueden ser proteínas, individuos, neuronas, computadoras, etc.

Transiciones de Fase

- En física, los cambios de fase a menudo están vinculados a cambios entre **orden** y **desorden** en la medida que la **temperatura** cambia.
- Tales **transiciones de fase** tipicamente implican la existencia de un cambio en la simetría interna de los componentes y están definidos en los tres tipos básicos de fase:

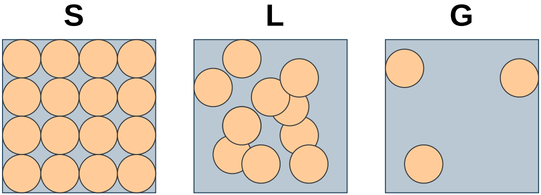


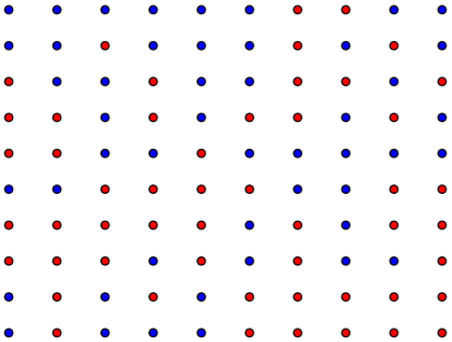
Figura: Tres fases estándar de la materia: Sólido (S), Líquido (L) y Gas (G). Al incrementar un parámetro externo (el parámetro de control), como la temperatura, podemos incrementar el grado de desorden. Tal desorden hace que las moléculas flutúen alrededor de sus posiciones de equilibrio, entre sí o simplemente fluctar libremente.

Transiciones de Fase

- Un **punto crítico** describe la presencia de una transición muy estrecha que separa dos fases bien definidas.
- Estas fases están caracterizadas por distintas propiedades macroscópicas que están vinculadas a cambios en la naturaleza de las interacciones microscópicas entre las unidades básicas.
- Una transición de fase crítica está caracterizada por algún **parámetro de orden** $\phi(\mu)$ que depende de algún **parámetro de control** externo μ (como la temperatura).
- Aunque parece muy complicado diseñar un modelo microscópico capaz de proporcionar una idea de cómo ocurren las transiciones de fase, resulta que se ha logrado una gran comprensión mediante el uso de modelos extremadamente simplificados.

Modelo de Ising

- El modelo comienza con un lattice cuadrado con $L \times L$ sitios.
- Cada sitio está ocupado por un **spin**, el cual tiene sólo dos posibles estados:
  - -1 (down)
  - 1 (up)



Modelo de Ising

- Esos estados pueden ser entendidos como magnetos microscópicos que apuntan al norte o al sur.
- La magnetización total $M(T)$ para una temperatura dada T es simplemente la suma

$$M(T) = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} S_i, \quad \text{donde } N = L^2$$

Modelo de Ising

- Los spines tienen una tendencia natural a alinearse con sus spines vecinos en la misma dirección.
- Si un spin down está rodeado por vecinos up, el spin tenderá a a adoptar el mismo estado up.
- El estado final será una lattice con spines solo up o down.
- Esto define una fase **ordenada**, donde la magnetización toma los valores de $M = 1$ o $M = -1$.

Modelo de Ising

- El sistema trata de minimizar la energía, el denominado Hamiltoniano:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} J\, S_i S_j$$

Donde $J > 0$ es una constante de acomplamiento (la fuerza de las interacciones locales) y $\sum_{\langle i,j \rangle}$ indica la suma sobre los vecinos cercanos.

Modelo de Ising

- El modelo está basado en la siguiente observación:
  - Si calentamos una pieza de acero a altas temperaturas, no se observa atracción magnética.
  - Esto es debido a que las perturbaciones térmicas desorganizan las interacciones atómicas al variar los estados de los átomos independientemente del estado de los vecinos.
- Si se modifica la temperatura a un nivel suficientemente alto, los átomos adquirirán una configuración aleatoria, y la magnetización global será zero.
- Esto define la llamada fase de desorden.

Modelo de Ising

El problema involucra un conflicto entre dos tendencias:

La primera hacia el orden, asociada al acoplamiento entre los átomos más cercanos, y la segunda hacia el desorden, debido al ruido externo.

- Se puede observar que pares de unidades con el mismo valor con el mismo valor contribuirán a **reducir** la energía, mientras que pares con valores distintos la **incrementan**.
- De manera que los cambios resultantes de las interacciones spin-spin ocurrirán en la dirección de reducir la energúa del sistema al alinear los spines en la misma dirección.
- El estado de mínima energía resulta cuando todos los spines son down o up (en ambos casos, tenemos $S_i S_j = 1$ para todos los pares).

Modelo de Ising

- Sin embargo, en la medida que consideramos las fluctuaciones térmicas, el sistema será capaz de explorar diferentes configuraciones.
- Hay 2^N posibles configuraciones de spin, de forma que cuando el lattice es moderadamente grande, esta cantidad es gigante.
- Por tal motivo, estamos interesados en aquellas aquellas configuraciones que tienen la probabilidad más alta de ocurrir.

Modelo de Ising

Se puede mostrar que la probabilidad $P(\{S_i\})$ de observar una configuración $\{S_i\}$ de spines es:

$$P(\{S_i\}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E(\{S_i\})}{kT}\right)$$

donde Z es una *función de partición* de normalización. Por su parte, $\exp -\dfrac{E(\{S_i\})}{kT}$ es el factor de Boltzmann.

Incrementar T tiene un efecto importante: el decaimiento exponencial se vuelve más lento. Para T muy altas, el factor es igual a 1 para todas las energias.

Este aplanamiento implica que todos los estados son igualmente probables de observar.

Simulación con el Algoritmo de Metropolis

- La simulación comienza con una configuración de spin completamente desordenada, donde cada spin en el lattice puede tomar el estado up o down con la misma probabilidad.
- Al fijar la temperatura T y la constante de acoplamiento J, el nuevo estado es obtenido por medio de un conjunto de reglas simples aplicadas iterativamente usando el algoritmo de Metropolis.

Simulación con el Algoritmo de Metropolis

- Elige un spin S_i de forma aleatoria.
- Calcula el cambio de energía ΔE asociado con dicho cambio $S_i \to -S_i$.
- Genera un número aleatorio $0 \leq \xi \leq 1$ con distribución uniforme.
- Si $\xi < \exp\left(\frac{-\Delta E}{kT}\right)$, cambia el estado del spin. En caso contrario, se mantiene el estado del spin.
- Repite el ciclo.

Simulación con el Algoritmo de Metropolis

La diferencia de energía ΔE pondera la verosimilitud que tome efecto la transición $S_i \to -S_i$. La probabilidad de tal transición es igual a :

$$W(S_i \to -S_i) = \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)$$

Modelo de Schelling

- Schelling (1969, 1971) diseñó su modelo para explicar el incremento y prevalencia de vecindarios segregados en ciudades de USA.
- La idea principal de Schelling fue que incluso si las personas se sienten cómodas viviendo en vecindarios mixtos, que contiene cantidades aproximadamente iguales de personas de ambos colores, tales vecindarios son inherentemente inestables una vez que se incorpora la dinámica al modelo.

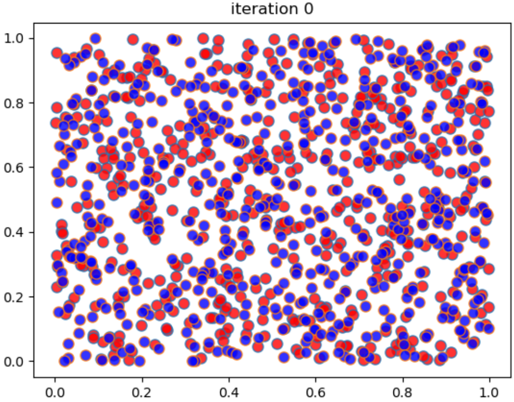
Modelo de Schelling

- Supongamos que existen dos razas imaginarias:
  - red people
  - blue people
- Se asume que la satisfacción de un hogar, con respecto a su ubicación actual, depende del color de sus vecinos.
- Specificamente, el hogar se considerará feliz en su ubicación actual siempre que al menos la mitad de sus vecinos sean del mismo color que el.
- Si menos de a mitad de sus vecinos son del mismo color, el hogar se hace infelíz y busca moverse.

Modelo de Schelling

- Schelling corrió su simulación manualmente con un tablero de ajedrez.
- En esta versión del modelo, tomamos el lattice de todas las parejas (x, y) de números de punto flotante de 64 bits en el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.
- Una configuración inicial sobre la lattice está formada por una asignación aleatoria de colores a los n hogares y una asignación aleatoria de posiciones (x, y).

Modelo de Schelling



Modelo de Schelling

- En cada turno, uno de los n hogares es seleccionado de forma aleatoria .
- Si el hogar es feliz, no hay ningún cambio de posición.
- Si el hogar es infeliz, se selecciona una nueva ubicación (x', y') de forma aleatoria.
- Si el hogar es feliz en la nueva posición (x', y'), el turno termina.
- En caso contrario, se selecciona una nueva ubicación, y el proceso se repite hasta que el hogar es feliz.

Modelo de Schelling

- Nótese la similaridad con el Modelo de Ising.
- En el Modelo de Ising las interacciones locales son mediante efectos magnéticos.
- Los spines prefieren alinearse en la misma dirección que la de sus vecinos.
- En el Modelo de Schelling, los hogares que son cercanos entre si, prefieren ser de la misma raza.

References I

Schelling, T. C. (1969). Models of segregation. *The American economic review*, 59(2):488–493.

Schelling, T. C. (1971). Dynamic models of segregation. *Journal of mathematical sociology*, 1(2):143–186.

Solé, R. (2011). *Phase transitions*, volume 3. Princeton University Press.

Stachurski, J. (2022). *Economic dynamics: theory and computation*. MIT Press, second edition.