Problema de optimización usando Algoritmos Genéticos

Módulo 4 : Técnicas computacionales avanzadas para modelar fenómenos sociales
Concentración en Economía Aplicada y Ciencia de Datos
ITESM

13 de abril de 2023

Resolución de un problema de optimización con un AG simple

Se necesita conocer:

- Conocer la función a optimizar y definir el problema a resolver (máximización o minimización). Si es posible, visualizarla.
- Número de variables de decisión.
- Precisión en decimales a utilizar para cada variable de decisión.
- Espacio de búsqueda (intervalos de cada variable de decisión).

Resolución de un problema de optimización con un AG simple

Necesitamos seleccionar los métodos de:

- Selección.
- Cruza.
- Mutación.

Además, tenemos que definir:

- Número de generaciones.
- Tamaño de la población (número de individuos).
- Probabilidad de cruza, P_c.
- Probabilidad de mutación, P_m.

Pasos de un Algoritmo Genético Simple

Algorithm 1: `ag_simple`

Input: Generaciones

Generar población inicial
Iniciar $t = 0$
Evaluar la población inicial
while $t <$ Generaciones **do**
    Selección
    Cruza
    Mutación
    Evaluación de la nueva población
    $t = t + 1$
end while

Estructuras de datos básicas

Es preciso definir estructuras de datos que alberguen los datos de:

- Cromosomas (individuos).
- Fenotipo.
- Valores de la función objetivo.
- Valores de aptitud(*fitness*)

Cromosomas

La estructura de datos que contiene a los cromosomas es una matriz de tamaño número de individuos $\times$ longitud del individuo, donde cada renglón corresponde al genotipo de un invidivuo.

$$\text{cromosoma} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & g_{1,3} & \cdots & g_{1,L_{ind}} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & g_{2,3} & \cdots & g_{2,L_{ind}} \\ g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & \cdots & g_{3,L_{ind}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_{ind},1} & g_{N_{ind},2} & g_{N_{ind},3} & \cdots & g_{N_{ind},L_{ind}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Fenotipo

Son las variables de decisión representadas en el dominio del problema, y son resultado de aplicar una decodificación de la representación del cromosoma en binario al espacio de las variables de decisión.

La estructura de datos que contiene el fenotipo de la población es una matriz de tamaño número de individuos $\times$ número de variables de decisión.

$$\text{fenotipo} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,N_{var}} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,N_{var}} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots & x_{3,N_{var}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_{ind},1} & x_{N_{ind},2} & x_{N_{ind},3} & \cdots & x_{N_{ind},N_{var}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Valores de la función objetivo

Almacena los valores del desempeño de los fenotipos en el dominio de problema. Para el caso de problemas de un sólo objetivo, los valores de la función objetivo son escalares, mientras que para los problemas multiobjetivo, son vectoriales. Recordemos: los valores de la función objetivo no son necesariamente los mismos valores de aptitud o fitness.

$$\text{objetivo} = \begin{bmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & \cdots & y_{1,N_{obj}} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} & \cdots & y_{2,N_{obj}} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} & \cdots & y_{3,N_{obj}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N_{ind},1} & y_{N_{ind},2} & y_{N_{ind},3} & \cdots & y_{N_{ind},N_{obj}} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Valores de Aptitud

Se obtienen a partir de los valores de la función objetivo, mediante una función de escalamiento o rankeo.
Los valores de aptitud son escalares no negativas.

$$\text{aptitud} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ejemplo: Función Himmelblau

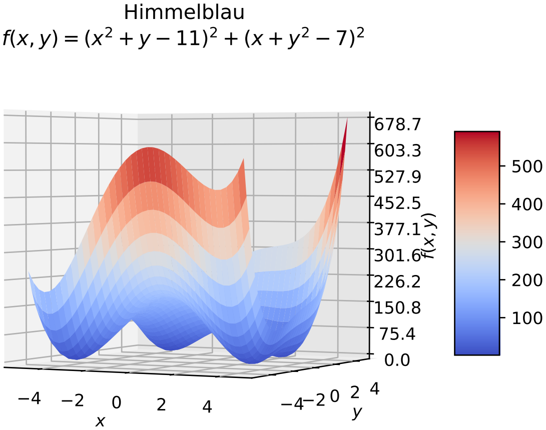
- Función: Himmelblau.

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

- Número de variables de decisión: 2
- Precisión en decimales: 6
- Espacio de búsqueda:

$$-5 \leq x, y \leq 5$$

Función Himmelblau



Configuración del Algoritmo Genético

- Representación y codificación binaria.
- Método de selección proporcional (ruleta).
- Cruza en un punto.
- Mutación en un bit.

Codificación de las variables

Para codificar las variables del problema en binario, primero necesitamos saber la cantidad de bits necesarios para su representación, esto es, la longitud del cromosoma para una variable de decisión.
Para esto, utilizamos la siguiente expresión:

$$L = [\log_2((l_{sup} - l_{inf}) \times 10^{\text{precision}})]$$

donde:

- l_{inf} es el límite inferior del espacio de búsqueda de la variable de decisión,
- l_{sup} es el límite superior del espacio de búsqueda de la variable de decisión,

Codificación de las variables

Dado que para ambas variables x,y, los límites del espacio de búsqueda son los mismo, tenemos para ambas variables es:

$$L_x = L_y = [\log_2((5-(-5))\times 10^6)] = 23.253$$

Redondeamos al entero superior para no perder valores del rango.

Las cadenas que representarán a y y x serán de longitud 24.

De forma que la longitud total de la cadena que representa al cromosoma o individuo es igual a 48 bits.

Codificación de las variables

Cadena de bits para la variable x

$L = 24$

Cadena de bits para la variable y

$L = 24$

$L = 48$

Cadena de bits que representa al cromosoma o individuo

Decodificación de las variables

Para evaluar el problema, necesitamos decodificar el cromosoma (representación binaria) a la representación de las variables de decisión en el dominio del problema.
En primer lugar, para cada individuo, necesitamos calcular el valor en las potencias en base 2, para cada subcadena de bits.

$2^{23}=8388608$	$2^{22}=4194304$	$2^{21}=2097152$	$2^{20}=1048576$	$2^{19}=524288$	$2^{18}=262144$	$2^{17}=131072$	$2^{16}=65536$	$2^{15}=32768$	$2^{14}=16384$	$2^{13}=8192$	$2^{12}=4096$	$2^{11}=2048$	$2^{10}=1024$	$2^{9}=512$	$2^{8}=256$	$2^{7}=128$	$2^{6}=64$	$2^{5}=32$	$2^{4}=16$	$2^{3}=8$	$2^{2}=4$	$2^{1}=2$	$2^{0}=1$
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1

$$2^{21}+2^{19}+2^{18}+2^{16}+2^{14}+2^{11}+2^{10}+2^{7}+2^{2}+2^{1}+2^{0}=2968711$$

$2^{23}=8388608$	$2^{22}=4194304$	$2^{21}=2097152$	$2^{20}=1048576$	$2^{19}=524288$	$2^{18}=262144$	$2^{17}=131072$	$2^{16}=65536$	$2^{15}=32768$	$2^{14}=16384$	$2^{13}=8192$	$2^{12}=4096$	$2^{11}=2048$	$2^{10}=1024$	$2^{9}=512$	$2^{8}=256$	$2^{7}=128$	$2^{6}=64$	$2^{5}=32$	$2^{4}=16$	$2^{3}=8$	$2^{2}=4$	$2^{1}=2$	$2^{0}=1$
1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

$$2^{23}+2^{22}+2^{21}+2^{17}+2^{14}+2^{10}+2^{7}+2^{0}=14828673$$

Decodificación de las variables

Posteriormente, utilizamos la siguiente expresión para mapear cada individuo a su valor real:

$$x_i = l_{inf} + \text{decimal}(11001\dots11_2)\frac{l_{sup} - l_{inf}}{2^{L_{ind}} - 1}$$

Para las variables x y y, tenemos:

- $l_{inf} = -5$
- $l_{sup} = 5$
- $L_{ind} = 24$
- $\text{decimal}(11001\dots11_2)_x = 2968711$
- $\text{decimal}(11001\dots11_2)_y = 14828673$

Sustituyendo en la expresión para x:

$$x = -5 + 2968711 \times \left(\frac{5-(-5)}{2^{24}-1}\right) = -3.23051$$

Para y:

$$y = -5 + 14828673 \times \left(\frac{5-(-5)}{2^{24}-1}\right) = 3.838578$$

Evaluación de la función

Con los valores decodificados, evaluamos los valores en la función objetivo:

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$
$$f(x, y) = (-3.23051^2 + 3.838578 - 11)^2 + (-3.23051 + 3.838578^2 - 7)^2$$
$$f(x, y) = 329.963676$$

References I