Exploring the Physical Manifestation of Humanity's Subconscious Desires

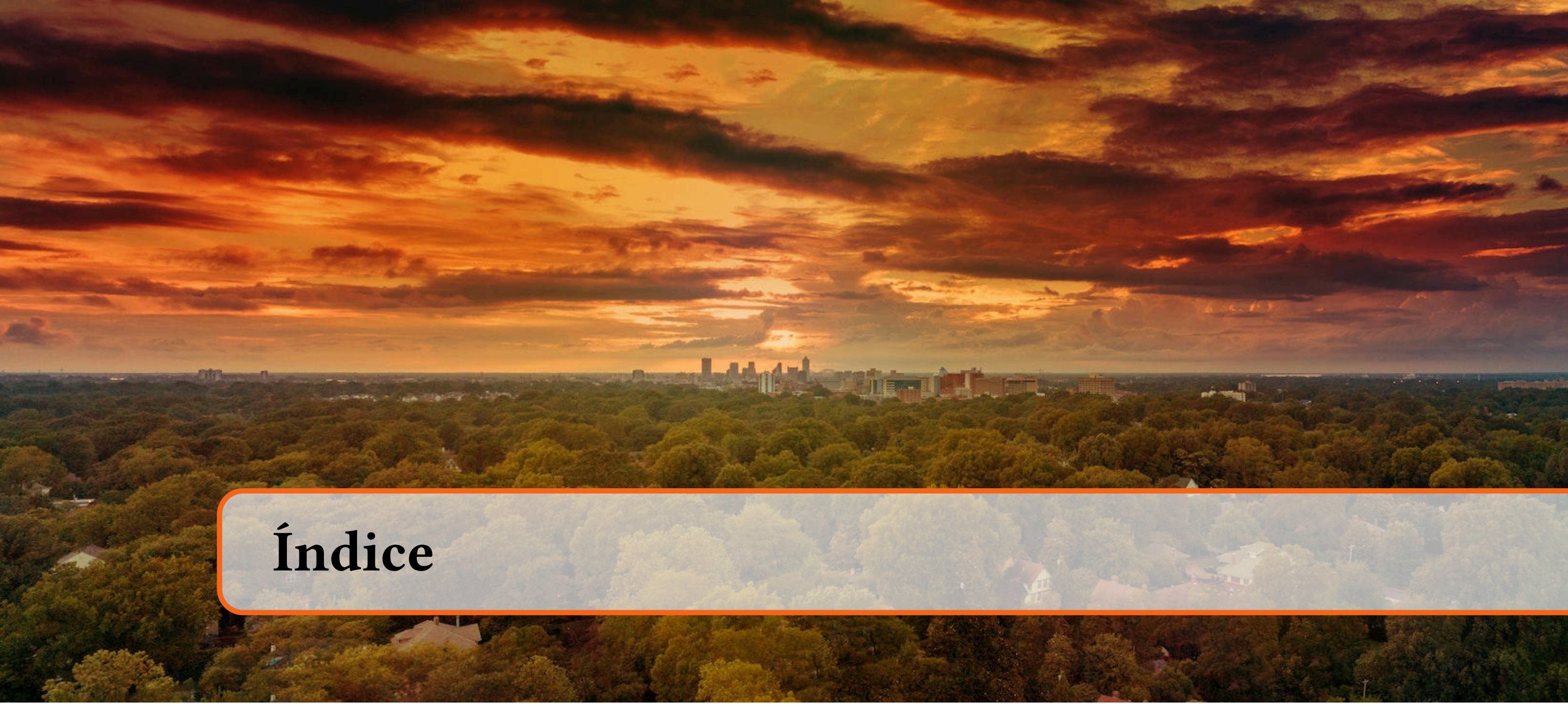
A Practical Guide

Goro Akechi

PUBLISHED BY PUBLISHER

TEMPLATE-WEBSITE

First printing, July 2023



Índice

List of Figures

List of Tables

Modelo de Generaciones Traslapadas Dinámico y Estocástico

1. Modelo

1.1 Introducción

Se desarró un Modelo de Generaciones Traslapadas de Agentes Heterogéneos Dinámico y Estocástico (DSOLG) para estimar cambios en la política fiscal.

Al contrario de los modelos de horizonte infinito de agente representativo, este enfoque permite incorporar (Nishiyama & Smetters, 2014) :

- Propiedades del ciclo de vida que son importantes para determinar las elecciones de ahorro y oferta de trabajo.
- Heterogeneidad intra-generacional en los hogares, que es necesaria para analizar el impacto de cambios de política en la distribución de ingreso y la riqueza.
- Heterogeneidad inter -generacional en los hogares para analizar el timing de los impuestos y sus efectos sobre la distribución intergeneracional.

Una generación de modelos OLG son los que incorporan incertidumbre en forma de shocks idiosincráticos a nivel de los hogares (ingresos laborales, riesgo de longevidad, etc) y determinismo en las variables agregadas (Nishiyama & Smetters, 2014)

Los shocks idiosincráticos afectan de forma diferenciada a los agentes, de manera que responden de forma heterogénea dentro de un cohorte (Fehr & Kindermann, 2018)[1]

Estos modelos son utilizados para calcular efectos de transición de cambios de política de un estado estacionario al siguiente.

Con la dinámica de la transición se utiliza también para analizar los impactos en el bienestar de reformas de la política fiscal que pueden beneficiar a futuras generaciones a costa de las generaciones de la transición.

[1] Al contrario del enfoque de agente representativo donde implícitamente se define que los individuos pueden cubrirse contra cualquier forma shock idiosincrático

El modelo aquí presentado pertenece a esta generación de modelos OLG. Es un modelo de equilibrio general dinámico y estocástico que incorpora riesgos idiosincráticos en la productividad laboral.

Las cantidades agregadas de la economía crecen en una trayectoria de crecimiento balanceado dada por la tasa de crecimiento de la población n_p.

1.2 Demografía

En cada periodo t, la economía está poblada por J generaciones traslapadas indizadas por $j = 1, ..., J$.

El modelo integra el llamado **margen intensivo de la informalidad**, específicamente a los trabajadores que se emplean en unidades económicas formales pero que no cuentan con una relación patronal ni beneficios laborales definidos en la Ley, ni seguridad social[2]. El modelo incorpora trabajadores **informales** que laboran en unicades económicas formales y trabajadores **formales**[3]. Cuando los individuos entran al mercado laboral, son asignados como trabajor informal o formal de acuerdo a una distribución de probabilidad ω_s[4] . La variable indicadora $m_s \in [0, 1]$ denota el estado laboral del trabajador, donde $m_s = 0$ corresponde a trabajadoras formales y $m_s = 1$ a trabajadoras informales. Las probabilidades de transición entre ambos estados es fija y no depende de la edad:

$$\pi_{j,m,m^+} = \Pr\big(m_{j+1} = m^+ \mid m_j = m\big) \quad \text{con} \quad m, m^+ \in \{0, 1\}, \tag{1.1}$$

Se asume que la supervivencia de un periodo al siguiente es estocástica y que ψ_j es la probabilidad que un agente sobreviva de la edad $j-1$ a la edad j, condicional a que vive en la edad $j-1$[5].

La probabilidad incondicional de sobrevivir a la edad j está dada por $\Pi_{i=1}^{j}\psi_i$ con $\psi_1 = 1$. Dado que el número de miembros de cada cohorte declina con respecto a la edad, el tamaño del cohorte correspondiente a la edad j en el periodo t es

$$N_{j,s,t} = \psi_{j,t} N_{j-1,s,t-1} \quad \text{con} \quad N_{1,s,t} = \big(1 + n_{p,t}\big) N_{1,s,t-1} \tag{1.2}$$

En consecuencia, los pesos de los cohortes (las razones relativas de población) se definen como $m_{1,s,t} = 1$ y $m_{j,s,t} = \frac{\psi_{j,t}}{1+n_{p,t}} m_{j-1,s,t-1}$.

[2]El **margen intensivo de la informalidad** es aún mas grande, pues contempla a las trabajadoras que se emplean en el **sector informal**. El INEGI define al sector informal como las actividades económicas que operan con recursos del hogar, sin constituirse formalmente como empresas, donde no se logra distinguir entre la unidad económica y el hogar. Es decir, hay dos formas de conceptualizar la informalidad : de acuerdo al sector económico donde se emplea la trabajadora y por la condición laboral

[3]El modelo podría considerar a los trabajadores informales que se emplean en el sector informal al considerar unidades económicas que enfrentan una función de producción que usa unicamente el factor trabajo

[4]Esta distribución es calculada empiricamente mediante la matriz de hussmans del INEGI

[5]Se asume que los trabajadores formales e informales tienen la misma tasa de supervivencia

Se asume que la población crece a una tasa constante $n_{p,t} = n_p$ y es la misma para ambos grupos de la población.

La trayectoria de crecimiento balanceado, es decir donde todas las variables agregadas crecen a una misma tasa, se fija a la tasa de crecimiento del cohorte más joven. Se normalizan dichas variables agregadas al tiempo t por el tamaño del cohorte más joven que está viviendo en ese periodo.

Todos los agentes se retiran a la edad j_r. Los agentes que laboraron en el sector formal comienzan a recibir una pensión la cual es financiada por el impuesto a nómina. Durante la edad laboral de los trabajadores formales acumulan **earning points** ep_j que definen sus pagos de pensión cuando se retiran.

Por simplicidad, omitiremos el índice s en la medida de lo posible.

1.3 Decisiones de los hogares

1.3.1 Preferencias de los hogares

Los individuos tienen preferencias sobre consumo $c_{j,t}$ y ocio $l_{j,t}$, además que pagan impuestos sobre el consumo, ingreso así como también un impuesto sobre nómina al sistema de pensiones. Se asume que la asignación de tiempo es igual a 1.

Con $l_{j,t}$ denotando la cantidad de trabajo en horas ofrecido a mercado en el periodo t, tenemos $\mathrm{l}_{j,t} + l_{j,t} = 1$. La función de utilidad de los hogares se define como

$$E\left[\sum_{j=1}^{J} \beta^{j-1}\left(\Pi_{i=2}^{j}\psi_{i,s}m_{i-1,s}\right)u\left(c_{j,s}, 1-l_{j,s}\right)\right] \tag{1.3}$$

donde β denota el factor de descuento de tiempo. Como puede verse, en la utilidad marginal esperada del consumo futuro es también condicional al actual estado laboral m.

La función de utilidad de los hogares está dada por

$$u(c_{j,t}, 1-l_{j,t}) = \frac{\left[(c_{j,t})^{\nu}(1-l_{j,t})^{(1-\nu)}\right]^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}}{1-\frac{1}{\gamma}} \tag{1.4}$$

La utilidad de consumo y ocio toma la forma de una función Cobb-Douglas con un parámetro ν de preferencia entre ocio y consumo. La elasticidad de sustitución intertemporal es constante e igual a γ, donde $\frac{1}{\gamma}$ es la aversión al riesgo del hogar.

1.3.2 Riesgo de supervivencia y herencias

Dado que no hay mercados de rentas vitalicias (annuity markets), el retorno a activos individuales corresponde a la tasa de interés neta.

En un marco donde no hay riesgo de longevidad los agentes conocen con certeza en qué momento su vida terminará. En consecuencia, son capaces de planear perfectamente en qué punto del tiempo quieren consumir todos sus ahorros.

Aquí existe incertidumbre de supervivencia, así que los agentes pueden morir antes que la máxima duración de vida J y, como consecuencia, dejar una herencia. Se define $b_{j,t}$ como la herencia que un agente en la edad j recive en el periodo t.

La cantidad de herencia para cada cohorte puede ser calculado mediante la expresión:

$$b_{j,t} = \Gamma_{j,t} BQ_t \tag{1.5}$$

donde BQ_t define la herencia agregada en el periodo t, o simplemente la fracción del total de activos que pueden ser atribuidos a quienes fallecieron al final del período anterior (incluidos los intereses).

$$BQ_t = r_t^n \sum_{j=2}^{J} a_{j,t} \frac{m_{j,t}}{\psi_{j,t}} (1 - \psi_{j,t}) \tag{1.6}$$

donde r_t^n es la tasa de interés neta en t y $a_{j,s,t}$ son los activos del cohorte j, del grupo s, en t.

1.3.3 Riesgo en la productividad laboral

Los individuos difieren respecto a su productividad laboral $h_{j,t}$, la cual depende de un perfil (determinístico) de ingresos por edad $e_{j,s}$ que depende del tipo de trabajo, un efecto de productividad fijo θ que es definido al comienzo del ciclo de vida y que, de igual forma, depende del tipo de trabajo (formal e informal) al que son asignados[6]. Además, se agrega un shock idiosincrático mediante un componente autoregresivo $\eta_{j,t}$ que evoluciona en el tiempo y que tiene una estructura autoregresiva de orden 1, de manera que

$$\eta_j = \rho \eta_{j-1} + \epsilon_j \quad \text{con} \quad \epsilon_j \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad \text{y} \quad \eta_1 = 0 \tag{1.7}$$

Dada esta estructura, la productividad laboral del hogar es

$$h_j = \begin{cases} e_j \exp[\eta_j] & \text{si } j < j_r \\ 0 & \text{si } j \geq j_r \end{cases} \tag{1.8}$$

1.3.4 Problema de Decisión de los Consumidores

El estado de los individuos se carateriza por el vector de estado[7]

$$z_j = (J, a, ep, s, \eta) \tag{1.9}$$

[6]Representa un shock permanente

[7]Se asume que los shocks de productividad son independientes entre individuos e identicamente distribuidos entre individuos de un tipo de trabajo en específico.

Los hogares maximizan la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria intertemporal

$$a_{j+1,s,t} = \begin{cases} (1+r_t^n)a_{j,s,t-1} + w_t^n h_{j,s,t} l_{j,s,t} + b_{j,s,t} + pen_{j,s,t} - p_t c_{j,s,t} & \text{si } s=0 \\ (1+r_t^n)a_{j,s,t-1} + w_t h_{j,s,t} l_{j,s,t} + b_{j,s,t} - p_t c_{j,s,t} \text{ si } s=1 \end{cases} \tag{1.10}$$

donde:

- $a_{j,t}$ son los ahorros-activos del agente en el periodo t ,
- $w_t^n = w_t\left(1-\tau_t^w - \tau_{j,t}^{impl}\right)$ es la tasa de salario neto, la cual es igual al salario de mercado w_t menos los impuestos por ingreso laboral $\tau_{j,t}^{impl}$ y el impuesto de nómina para financiar el sistema de pensión τ_t^p
- $r_t^n = r_t(1-\tau_t^r)$ es la tasa de interés neta, que es igual a la tasa de interés de mercado r_t descontando el impuesto por ingresos de capital τ_t^r,
- $p_t = 1+\tau_t^c$ es el precio al consumidor el cual se normaliza a uno y se agregan los impuestos al consumo τ_t^c.

Se agrega una restricción adicional de no negatividad de los ahorros $a_{j+1,s} \geq 0$

1.4 Problema de programación dinámica

El problema de optimización de los agentes es el siguiente:

$$\begin{aligned} V_t(j,a,ep,s,\eta) &= \max_{c,l,a^+,ep^+} u(c,1-l) + \beta\psi_{j+1}(m_s)E[V(j+1,a^+,ep^+,s^+,\eta^+) \mid \eta, m_s] \\ \text{s.t. } a^+ &= \begin{cases} (1+r_t^n)a_{j,s,t-1} + w_t^n h_{j,s,t} l_{j,s,t} + b_{j,s,t} + pen_{j,s,t} - p_t c_{j,s,t} & \text{si } s=0 \\ (1+r_t^n)a_{j,s,t-1} + w_t h_{j,s,t} l_{j,s,t} + b_{j,s,t} - p_t c_{j,s,t} \text{ si } s=1 \end{cases}, \\ \eta^+ &= \rho\eta + \epsilon^+ \quad \text{con} \quad \epsilon^+ \sim N(0,\sigma_\epsilon^2) \\ \pi_{j,m,m^+} &= \Pr\left(m_{j+1,s} = m_s^+ \mid m_{j,s} = m_s\right) \quad \text{con} \quad m_s, m_s^+ \in \{0,1\}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde $z = (j,a,ep,s,\eta)$ es el vector de variables de estado individuales. Nótese que se colocó un índice de tiempo en la función de valor y en los precios. Esto es necesario para calcular la dinámica de la transición entre dos estados estacionarios. La condición terminal de la función de valor es

$$V_t(z) = 0 \quad \text{para} \quad z = (J+1,a,ep,s,\eta) \tag{1.12}$$

que significa que se asume que los agentes no valoran lo que sucede después de la muerte.

Formulamos la solución de problema de los hogares al reconocer que podemos escribir las funciones de horas laborales y de consumo como funciones de a^+:

$$\begin{aligned} l = l(a^+) &= \min\left\{\max\left[\nu + \frac{1-\nu}{(w_t^n*(1-m)+w_t*m)h}(a^+ - (1+r_t^n)a - \text{pen }*(1-m)),0\right],1\right\} \\ c = c(a^+) &= \frac{1}{p_t}[(1+r_t^n)a + (w_t^n*(1-m)+w_t*m)hl(a^+) + \text{pen }*(1-m) - a^+] \end{aligned} \tag{1.13}$$

Con la definición de la **implicit tax rate** (Ver siguiente sección), las condiciones de primer orden de los hogares se definen como

$$\begin{aligned} \frac{v}{p_t} \cdot \frac{\left[c^{\nu}(1-l)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c} &= \beta E[V_{a^+}(z^+) \mid \eta] \\ \frac{1-\nu}{v} \cdot p_t c = w_t h(1-l)\left\{1-\tau_t^w-\tau_{j,t}^{impl}\right\} \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde a^+es desconocido. Nótese que $\tau_{j,t}^{impl} = \tau_t^p$ para $\lambda = 1$, lo que se reduce al modelo original.

1.4.1 Ingresos y egresos de los hogares por el sistema de pensiones

A la edad obligatoria de retiro j_r, la productividad laboral cae a cero y los hogares reciben una pensión $pen_{j,t}$, la cual está en función del historial salarial del individuo. Con el objetivo de hacer un seguimiento y contabilizar los salarios pasados así como las contribuciones a pensiones, se agrega un estado **earning points**, ep, el cual captura los ingresos brutos individuales relativos al ingreso promedio de la economía completa para cada año de contribución[8] (Fehr et al., 2013)

$$ep_{j+1} = \left[ep_j \times (j-1) + \left(\lambda + (1-\lambda)\frac{whl_j}{\bar{y}}\right)\right]/j \tag{1.15}$$

donde el parámetro λ indica el nivel de **progresividad** del sistema de pensiones (Fehr & Kindermann, 2018). Cuando $\lambda = 1$ la pensión es independiente de las contribuciones previas y es igual a la fracción de la tasa de reemplazo κ del sistema de pensiones del ingreso laboral promedio en el periodo t, esto es:

$$\text{pen}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < j_r \\ \kappa_t \frac{w_t}{j_r-1} \sum_{j=1}^{j_r-1} e_j, \text{si } j \geq j_r \end{cases} \tag{1.16}$$

Cuando $\lambda = 0$, la pensión depende enteramente del historial salarial. Durante la fase de retiro de la trabajadora $j \geq j_r$, los puntos salariales quedan constantes y la pensión se calcula como

$$\text{pen}_j = \kappa_t \times ep_{j_r} \times \bar{y} \tag{1.17}$$

Los earning points evolucionan de acuerdo a la ecuación:

$$ep^+ = \begin{cases} \frac{j-1}{j} \cdot ep + \frac{1}{j} \cdot \left[\lambda + (1-\lambda) \cdot \frac{w_t hl}{y_t}\right] \text{ si } j < j_r, \\ ep \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{1.18}$$

Esta ecuación integre dos partes:
- La fase de acumulación, $j < j_r$
- La fase de rendimientos, $j \geq j_r$

La restricción presupuestaria de los hogares cambia a :

$$a^+ + p_t c = (1+r_t^n)a + w_t^n hl + \mathbb{1}_{j \geq j_r} \kappa_t \bar{y}_t ep \tag{1.19}$$

[8]Este mecanismo de seguimiento de ingresos es tomado de (Fehr et al., 2013), el cual es como funciona el sistema de pensiones alemán.

El beneficio de la pensión se obtiene hasta que se alcanza la edad de retiro j_r y es igual al producto de la tasa de reemplazo actual κ_t, el ingreso promedio $\overline{y}$ así como también los puntos de ingreso acumulado por la trabajadora ep.

El Lagrangeano del problema de optimización del hogar se escribe :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{\left[c^v(1-l)^{1-v}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}} + \beta E[V(z^+) \mid \eta] + \\ & +\mu_1\Big[(1+r_t^n)a + w_t^n hl + \mathbb{1}_{j\geq j_r}\kappa_t\bar{y}_t ep - a^+ - p_t c\Big] \\ & +\mu_2\mathbb{1}_{j<j_r}\left[\frac{j-1}{j}\cdot ep + \frac{1}{j}\cdot\left[\lambda + (1-\lambda)\cdot\frac{w_t hl}{\bar{y}_t}\right] - ep^+\right] \\ & +\mu_2\mathbb{1}_{j\geq j_r}[ep - ep^+]\end{aligned} \tag{1.20}$$

con las siguientes condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}&\frac{\nu}{p_t}\cdot\frac{\left[c^\nu(1-l)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c} = \beta E[V_{a^+}(z^+) \mid \eta] \\ &\frac{1-\nu}{\nu}\cdot p_t c = w_t h(1-l)\left\{1-\tau_t^w-\tau_t^p+\frac{1-\lambda}{j\cdot\bar{y}}\cdot\frac{\beta E\big[V_{ep^+}(z^+)\mid\eta\big]}{\frac{\nu}{p_t}\cdot\frac{\left[c^\nu(1-l)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c}}\right\}\end{aligned} \tag{1.21}$$

Cuando $\lambda = 1$, la parte de la ecuación

$$\frac{1-\lambda}{j\cdot\bar{y}}\cdot\frac{\beta E\big[V_{ep^+}(z^+)\mid\eta\big]}{\frac{\nu}{p_t}\cdot\frac{\left[c^\nu(1-l)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c}} \tag{1.22}$$

Se hace cero, y nos enfrentamos al caso base de una pensión flat, independiente de las contribuciones previas.

Del teorema del envolvente se obtiene:

$$\begin{aligned}V_{a^+}(z^+) &= (1+r_{t+1}^n)\cdot\frac{v}{p_{t+1}}\cdot\frac{\left[(c^+)^\nu(1-l^+)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c^+} \\ V_{ep^+}(z^+) &= \mathbb{1}_{j+1\geq j_r}\cdot\kappa_{t+1}\bar{y}_{t+1}\cdot\frac{\nu}{p_{t+1}}\cdot\frac{\left[(c^+)^\nu(1-l^+)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c^+} \\ &\quad+\left[\mathbb{1}_{j+1<j_r}\cdot\frac{j}{j+1}+\mathbb{1}_{j+1\geq j_r}\right]\cdot\beta E\big[V_{ep^{++}}(z^{++})\mid\eta\big].\end{aligned} \tag{1.23}$$

Iterando la condición de primer orden hacia adelante, obtenemos:

$$\beta^{i-j}E\left[\frac{v}{p_{t+i-j}}\cdot\frac{\left[(c_i)^v(1-l_i)^{1-v}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c_i}\mid\eta_j\right] = \frac{\frac{v}{p_t}\cdot\frac{\left[(c_j)^v(1-l_j)^{1-v}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c_j}}{\prod_{k=j+1}^{i}(1+r_{t+k-j})}(I) \tag{1.24}$$

para $i < j$.

Para la edad $j+1 = j_r$, la segunda ecuación del envolvente se reduce a

$$V_{ep}\left(z_{j_r}\right) = \kappa_{t+1}\bar{y}_{t+1} \cdot \frac{v}{p_{t+1}} \cdot \frac{\left[\left(c_{j_r}\right)^{\nu}\left(1-l_{j_r}\right)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c_{j_r}} + \beta E\left[V_{ep}\left(z_{j_r+1}\right) \mid \eta_j\right] (II) \tag{1.25}$$

con $s = t+1+i-j_r$. Para cualquier $j+1 < j_r$, tenemos

$$\begin{aligned} V_{ep}\left(z_{j+1}\right) &= \frac{j}{j+1} \cdot \beta E\left[V_{ep}\left(z_{j+2}\right) \mid \eta_j\right] \\ &= \frac{j}{j+1} \cdot \beta E\left[\frac{j+1}{j+2} \cdot \beta E\left[V_{ep}\left(z_{j+3}\right) \mid \eta_j\right] \mid \eta_j\right] \\ &= \frac{j}{j+2} \cdot \beta^2 E\left[V_{ep}\left(z_{j+3}\right) \mid \eta_j\right] = \ldots \\ &= \frac{j}{j_r-1} \cdot \beta^{j_r-(j+1)} E\left[V_{ep}\left(z_{j_r}\right) \mid \eta_j\right] \end{aligned} \tag{1.26}$$

Sustituyendo $(\mathbb{I})$ tenemos

$$\beta E\left[V_{ep^+}(z^+) \mid \eta_j\right] = \frac{j}{j_r-1} \sum_{i=j_r}^{J} \kappa_s \bar{y}_s \cdot \beta^{i-j} E\left[\frac{v}{p_s} \cdot \frac{\left[(c_i)^{v}(1-l_i)^{1-v}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c_i} \mid \eta_j\right] \tag{1.27}$$

con $s = t+i-j$. Sustituyendo ahora la ecuación (I), tenemos:

$$\frac{1-\lambda}{j \cdot \bar{y}_t} \cdot \frac{\beta E\left[V_{ep^+}(z^+) \mid \eta\right]}{\frac{\nu}{p_t} \cdot \frac{\left[c^{\nu}(1-l)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{c}} = \frac{1-\lambda}{(j_r-1)\cdot \bar{y}_t} \cdot \sum_{i=j_r}^{J} \frac{\kappa_s \bar{y}_s}{\prod_{k=j+1}^{i}\left(1+r_{t+k-j}\right)} \tag{1.28}$$

con $s = t+i-j$.

En consecuencia, definimos la **tasa de impuesto implícita** del sistema de pensiones como

$$\tau_{j,t}^{impl} = \tau_t^p - \frac{1-\lambda}{(j_r-1)\cdot \bar{y}_t} \cdot \sum_{i=j_r}^{J} \frac{\kappa_s \bar{y}_s}{\prod_{k=j+1}^{i}\left(1+r_{t+k-j}\right)} \tag{1.29}$$

Esta tasa de impuesto implícita toma en cuenta que, si $\lambda < 1$, los pagos a pensiones se incrementan al incrementarse los ingresos laborales y, como consecuencia, las contribuiciones a pensiones también se incrementan. Por lo tanto, las contribuciones τ_t^p son distintas para cada hogar.

1.5 Tecnología

Las empresas contratan capital K_t y trabajo L_t en un mercado de factores perfectamente competitivo para producir un único bien Y_t de acuerdo a una tecnología de producción dada por una función de producción Cobb-Douglas

$$Y_t = \Omega K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{1.30}$$

donde Ω es el nivel de tecnología que es constante en el tiempo. El capital se deprecia a una tasa δ, de manera que el stock de capital evoluciona de acuerdo a la siguiente expresión

$$(1+n_p)K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{1.31}$$

Bajo el supuesto de competencia perfecta, las funciones inversas a la demanda de capital y trabajo de la empresa están dadas por

$$\begin{aligned} r_t &= \alpha\Omega\left[\frac{L_t}{K_t}\right]^{(1-\alpha)} - \delta \\ w_t &= (1-\alpha)\Omega\left[\frac{K_t}{L_t}\right]^{\alpha} \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.6 Gobierno

El gobierno administra dos sistemas : un sistema de impuestos y un sistema de pensiones, ambos operando en equilibrio presupuestario.

El gobierno recolecta impuestos sobre el el gasto en consumo, ingreso laboral e ingreso de capital con el objetivo de financiar su gasto público G_t y pagos relacionados al stock de deuda B_t. En el equilibrio inicial, el gasto público es igual a una razón constante del GDP, esto es, $G = g_y Y$. En periodos posteriores, el nivel de bienes públicos se mantiene constante (per cápita), lo que significa que $G_t = G$. Lo mismo aplica para la deuda pública, donde la razón inicial es denominada b_y. En cualquier punto en el tiempo el presupuesto del sistema de impuestos es balanceado si se cumple la igualdad

$$\tau_t^c C_t + \tau_t^w w_t L_t^s + \tau_t^r r_t A_t + (1+n_p)B_{t+1} = G_t + (1+r_t)B_t \tag{1.33}$$

Además de los ingresos por impuestos, el gobierno financia su gasto al contratar nueva deuda $(1+n_p)B_{t+1}$. Sin embargo, debe repagar la actual deuda incluyendo intereses sobre los pagos de manera que tenemos que agregar $(1+r_t)B_t$ al consumo de gobierno en el lado del gasto. De manera que, en un equilibrio de estado estacionario, el gasto $(r-n_p)B$ refleja el costo necesitado para mantener el nivel de deuda constante. Nótese que no se ha hecho ninguna restricción a priori acerca de que tasa de impuesto tiene que ajustarse con el objetivo de balancear el presupuesto en el tiempo.

El sistema de pensiones opera en un esquema pay-as-you-go, lo que significa que recolecta contribuciones de las generaciones en edad de trabajar y directamente las distribuye a los retirados actuales. La ecuación de balance del presupuesto del sistema de pensiones está dada por

$$\tau_t^p w_t L_t^{\text{supply},s=0} = \text{pen}_t N^R \quad \text{con} \quad N^R = \sum_{j=j_r}^{J} m_{j,s=0}\psi_j \tag{1.34}$$

donde N^R denota la cantidad de retirados formales.

Se asume que la tasa de reemplazo κ está dada de forma exógena mientras que la tasa de contribución τ_t^p se ajusta con el objetivo de balancear el presupuesto.

El beneficio de la pensión se calcula por la suma de earnings points acumulados durante el periodo laboral y el *monto actual de pensión*, APA[9] que refleja el valor monetario de cada earning point, multiplicado por la tasa de reemplazo κ

$$p_j = \kappa \times \mathrm{ep}_{j_r} \times \mathrm{APA} \tag{1.35}$$

Con el tiempo, APA crece con los ingresos laborales brutos.

1.7 Mercados

Hay tres mercados en la economía : mercado de capital, mercado de trabajo y el mercado de bienes. Con respecto a los mercados de factores, el precio del capital r_t y del trabajo w_t se ajustan para limpiar el mercado, esto es:

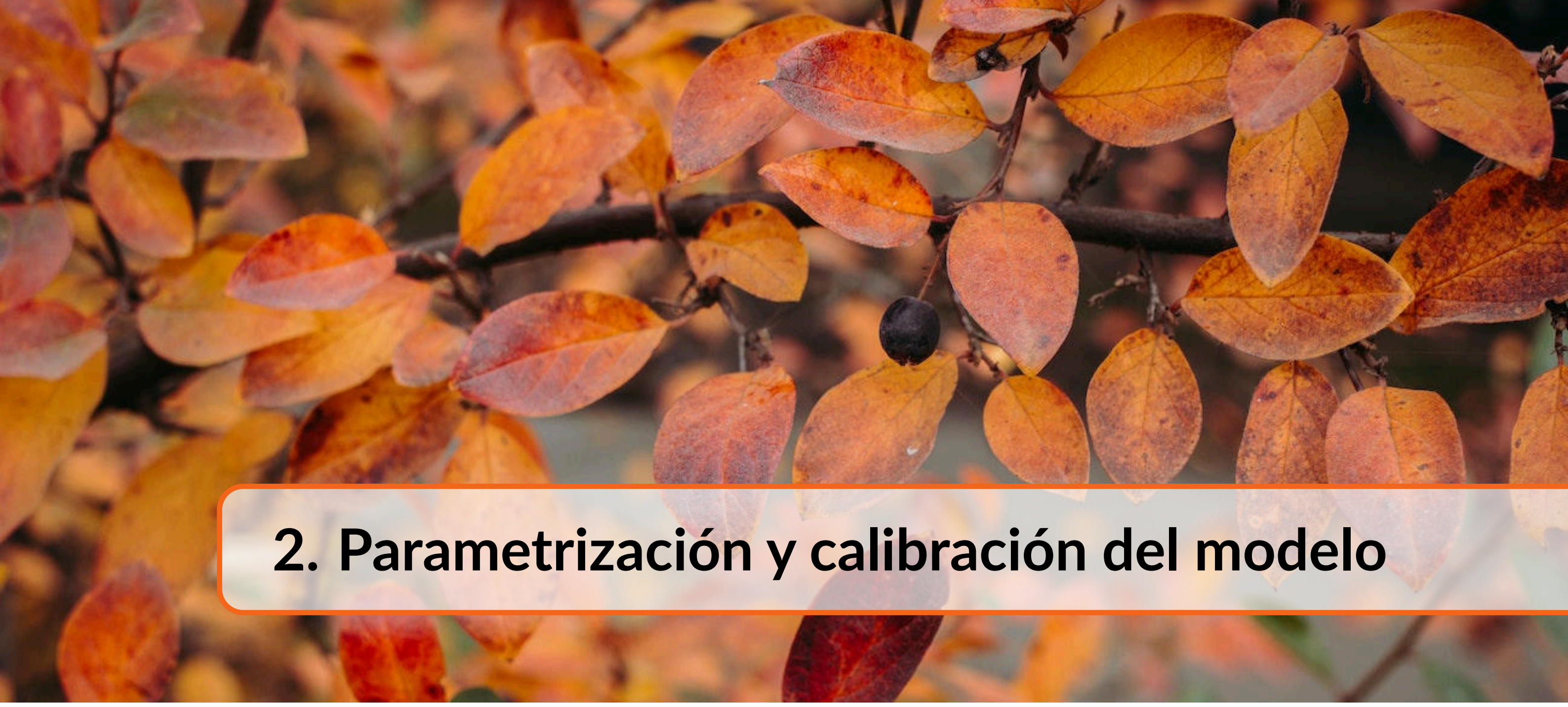
$$K_t + B_t = A \quad \text{y} \quad L_t = L_t^s \tag{1.36}$$

Nótese que hay dos sectores que demandan ahorro de los hogares. El sector de empresas emplea ahorro como capital en el proceso de producción, mientras que el gobierno lo usa como deuda pública con el objetivo de financiar su gasto. El gobierno y las empresas compiten en competencia perfecta en el mercado de capital.

Con respecto al mercado de bienes, todos los productos producidos deben ser utilizados ya sea como consumo por parte del sector privado o por el gobierno, o en forma de inversión en el futuro stock de capital. Así, el equilibrio en el mercado de bienes está dado por

$$Y_t = C_t + G_t + I_t \tag{1.37}$$

[9]Actual Pension Amount.



2. Parametrización y calibración del modelo

El modelo contempla dos tipos de parámetros: aquellos que pueden ser directamente observados en los datos y aquellos que puedes ser estimados de forma indirecta. En el primer grupo de parámetros tenemos variables como las probabilidades de supervivencia y las razones de capital. En el segundo grupo de variables se encuentran aquellas que son estimadas mediante algún procedimiento de calibración. El procedimiento de calibración usualmente consiste en ajustar el valor de los parámetros hasta que una o varias salidas del modelo sean lo suficientemente cercanas a su valor registrado en el mundo real.

2.1 Parámetros exógenos

Cada periodo del modelo corresponde a 5 años en la vida real. Se supone que los hogares inician su vida económica a la edad de 20 años $(j = 1)$ y enfrentan una esperanza de vida de 100 años, de manera que el ciclo de vida en el modelo cubre $JJ = 16$ periodos. Se define la edad obligatoria de retiro a los 65 años de edad, lo que significa en el modelo que la edad de retiro corresponde a $JR = 10$, de manera que los hogares gastan los últimos 7 periodos como retirados del mercado de trabajo y reciben una pensión.

Dado que estamos considerando que un periodo corresponde a 5 años, algunas tasas anuales deben ser convertidas. Pensando el caso de la tasa de crecimiento de la población, suponiendo una tasa de crecimiento anual de 1 por ciento, la conversión a una tasa compuesta a 5 años sería igual a $n_p = 1.01^5 - 1 \sim 0.05$.

La razón de capital así como la razón de ingreso laboral en el producto es obtenida de PWT 10.01, Penn World Table. El perfil de productividad dada la edad se calculó con la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE), para el segundo trimestre de 2021.

[10]https://data.worldbank.org/indicator/NE.CON.GOVT.ZS

El gasto público total como fracción del GDP es obtenido del Banco Mundial y corresponde al gasto en consumo final del gobierno[10], mientras que la razón deuda pública-GDP fue obtenido de banco de datos de CEPAL.

Para la calibración del modelo consideramos 2021 como el año base, de manera que todos los parámetros exógenos corresponden a este año.

2.2 Parámetros calibrados

Los parámetros a calibrar correspondientes a la producción fueron el nivel de tecnología Ω y la tasa de depreciación δ. A sugerencia de los autores, se normaliza la tasa de salarios igual a uno, $w = 1$. El parámetro Ω fue calibrado numéricamente hasta obtener los valores más cercanos de la tasa de salarios a la unidad. Por su parte, la tasa de depreciación no fue necesario calibrar pues en PWT 10.01, Penn World Table se presenta la tasa para los tres países.

El parámetro ν representa el trade off de las preferencias individuales con respecto al consumo y al ocio. Entre más grande el valor de ν, es más atractivo para los hogares consumir bienes y servicios que son pagados en el mercado que consumir tiempo de ocio. El parámetro ν, por tanto, tiene una influencia importante en la cantidad de horas que un hogar trabaja en el mercado. Se ajusta ν a un objetivo de una razón promedio de tiempo de trabajo en el total de tiempo asignado que representa aproximadamente 33 por ciento. Este valor se calcúla para cada país al asumir una asignación máxima de tiempo de trabajo semanal de 110 horas, asi como también 50 semanas laborales por semana. Entonces se relaciona este promedio anual de horas trabajadas por trabajador, el cual está disponible en la PWT 10.01, Penn World Table para los países de estudio.

Los siguientes parámetros a calibrar corresponden al proceso de formación y varianza del logaritmo de los ingresos salariales a lo largo del ciclo de vida de los hogares. Estudios empíricos señalan que alrededor de los 25 años la varianza de los ingresos es de 0.3 y que tiende a incrementarse casi linealmente a un valor de 0.9 hasta la edad de 60 años. En modelo presentado aquí, la varianza del logaritmo de las ganancias laborales se determina por dos componentes : mediante procesos exógenos que afectan la productividad laboral de una forma idiosincrática θ y η_j, como también por las decisiones individuales acerca de cuántas horas de trabajo se oferta en el mercado. Contamos con información acerca de la estructura del proceso de productividad laboral y cómo este podría influir en la varianza del logaritmo de las ganancias laborales. El logaritmo de las ganancias laborales de un individuo se define como

2.3 Sistema de impuestos y del sistema de pensiones

Resta parametrizar el esquema del sistema de impuestos y del sistema de pensiones. El gobierno tiene 4 esquemas tributarios a definir con el objetivo de balancear su presupuesto:

1. Definir exógenamente el valor de τ_t^w y τ_t^r, calcular el valor de τ_t^c.
2. Definir exógenamente el valor de τ_t^c, calcular el valor de τ_t^w y τ_t^r
3. Definir exógenamente el valor de τ_t^c y τ_t^r, calcular el valor de τ_t^w.

4. Definir exógenamente el valor de τ_t^c y τ_t^w, calcular el valor de τ_t^r.

Para las ejecuciones del modelo se definió el esquema 4 , es decir, de forma exógena asignamos un valor de la tasa de impuesto al consumo y al ingreso laboral, y el modelo calcula la tasa de impuesto del capital. Se utilizaron los cálculos de las tasas efectivas de los impuestos al consumo y al ingreso realizados por el CIEP.

Con respecto al sistema de pensiones, tenemos que definir la tasa de reemplazo κ. El valor observado de la tasa de reemplazo para los tres países fue obtenido de OECD-Founded Pension Indicators-Contributions.

El valor del factor de descuento intertemporal β fue el mismo que el usado por los autores.

Para el equilibrio inicial, consideramos que el sistema de pensiones es regresivo, es decir el factor de progresividad $\lambda = 1$.

Las tasas de probabilidad de muerte fueron estimadas con las pirámides poblacionales por cohorte de edad del Censo de Población y Vivienda de 2020.

2.4 Resumen de parámetros exógenos (E), calibrados (C) y objetivos (T)

La siguiente tabla presenta los parámetros del modelo. Se clasifican de acuerdo a parámetros que son obtenidos directamente de los datos (parámetro exógenos) y aquellos que son calibrados. Se describe de forma breve el proceso de calibración. Para más detalle, véase la sección de Parametrización y calibración del modelo.

Se muestra también las salidas del modelo que son definidas como targets de calibración. Para el caso de estos targets así como de los parámetros exógenos, se señala la fuente de consulta de datos que se utilizó en el presente análisis.

Parámetro	Descripción	E	C	T	Descripción
TT	Número de periodos de transición. Cada periodo equivale a 5 años en la vida real.	X			Definido por criterio numérico
JJ	Número de años que vive un hogar. Los hogares empiezan su vida económica a los 20 años ($j = 1$). Viven hasta los 100 años ($JJ = 16$).	X			Definido por Fehr y Kindermann (2018).
JR	Edad obligatoria de retiro. Los hogares se retiran a los 65 años ($j_r = 10$)	X			Definido por Fehr y Kindermann (2018).
γ	Coeficiente de aversión relativa al riesgo (recíproco de		X		El parámetro fue calibrado hasta obtener las salidas

Parámetro	Descripción	E	C	T	Descripción
	la elasticidad de sustitución intertemporal)				más cercanas a los valores observados de las razones del Consumo e Inversión con respecto al PIB.
nu	Parámetro de la intensidad de preferencia de ocio.	X			Se consultó PWT 10.01, Penn World Table
$b\eta$	Factor de descuento de tiempo.		X		Calibrado por Fehr y Kindermann (2018).
σ_θ^2	Varianza del efecto fíjo θ sobre la productividad.		X		Calibrado por Fehr y Kindermann (2018).
σ_ε^2	Varianza del componente autoregresivo η.	X			Calibrado por Fehr y Kindermann (2018).
α	Elasticidad del capital en la función de producción. Corresponde a la razón capital en el producto.	X			Se consultó PWT 10.01, Penn World Table
δ	Tasa de depreciación de capital.	X			Se consultó PWT 10.01, Penn World Table
Ω	Nivel de tecnología.				Calibrado numéricamente para ajustar la tasa de salarios a $w_t = 1$.
n_p	Tasa de crecimiento poblacional.	X			Se consultó OECD, Fertility rates
gy	Gasto público como porcentage del PIB.	X			Se consultó PWT 10.01, Penn World Table
by	Endeudamiento público como porcentage del PIB.	X			Banco de datos de CEPAL
κ	Tasa de reemplazo de sistema de pensiones.	X			Se consultó OECD-Founded Pension Indicators-Contributions
ψ_j	Tasas de supervivencia por cohorte de edad.	X			Definido por Fehr y Kindermann (2018).
e_j	Perfil de eficiencia de ingresos laborales por cohorte de edad.	X			Definido por (2018).
τ_t^c	Tasa de impuesto al consumo.	X			Se consultó OECD Tax Database
τ_t^w	Tasa de impuesto al ingreso laboral.	X	X		Se consultó OECD Tax Database
τ_t^r	Tasa de impuesto al ingreso de capital.		X		Se consultó OECD Tax Database

Parámetro	Descripción	E	C	T	Descripción
τ_t^p	Tasa de contribución sobre nómina al sistema de pensiones.		X		Se consultó OECD-Founded Pension Indicators-Contributions
$\tau_{j,t}^{impl}$	Tasa de impuestos implícita de la contribución sobre nómina al sistema de pensiones.		X		Se consultó OECD-Founded Pension Indicators-Contributions
PEN/GDP	Pago a pensiones como porcentaje del PIB.		X		Se consultó OECD-Pensions at Glance-Public expenditure on pensions
C/GDP.	Consumo privado como porcentaje del PIB.		X		Se consultó PWT 10.01, Penn World Table
I/GDP	Inversión como porcentaje del PIB.		X		Se consultó PWT 10.01, Penn World Table

2.5 Parámetros del modelo

La siguiente tabla resume los valores de los parámetros del modelo:

Descripción	Parámetro	México
Función de Utilidad		
Coeficiente de aversión relativa al riesgo (recíproco de la elasticidad de sustitución intertemporal)	γ	0.18
Parámetro de la intensidad de preferencia de ocio.	ν	0.389
Factor de descuento de tiempo.	β	0.998
Función de Producción		
Elasticidad del capital en la función de producción. Corresponde a la razón capital-producto.	α	0.622
Tasa de depreciación de capital.	δ	3.8 %
Nivel de tecnología.	Ω	1.89
Riesgo en productividad laboral		
Componente autoregresivo del shock en productividad.	ρ	0.98
Varianza del componente autoregresivo η	σ_ε^2	0.05
Gobierno		
Gasto público como porcentage del PIB.	gy	18.2 %
Endeudamiento público como porcentaje del PIB.	by	44.2 %
Tasa de impuesto al consumo.	τ_t^c	16.0 %
Tasa de impuesto al ingreso de capital.	τ_t^r	0.0 %
Sistema de Pensiones		

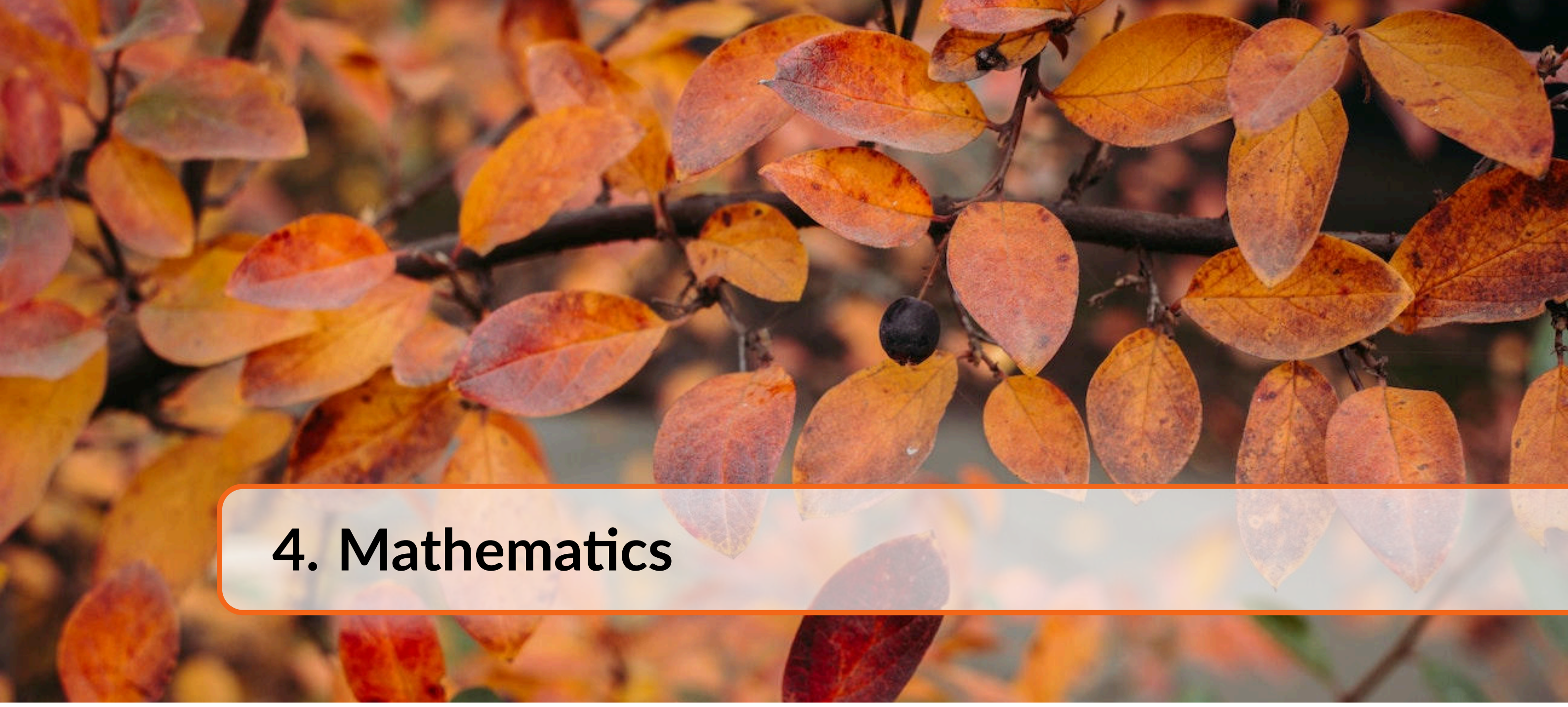
Descripción	**Parámetro**	**México**
Tasa de reemplazo de sistema de pensiones.	κ	0.643
Demografía		
Tasa de crecimiento poblacional	n_p	2.1 %

2.6 Equlibrio Inicial

	Modelo	Observado
Mercado de Bienes (% PIB)		
• Consumo Privado		64.23
• Gasto Público		18.2
• Inversión		21.08
Tasas de impuestos (en %)		
• Consumo		64.23
• Ingreso		18.2
• Ingreso medio		18.2
• Ingreso máximo		18.2
• Ingreso mínimo		18.2
• Capital		18.2
Ingresos por impuestos (% PIB)		
• Consumo		64.23
• Ingreso		18.2
• Capital		21.08
Sistema de pensiones		
• Tasa de reemplazo		64.23
• Pagos a pensiones (% PIB)		18.2
Demografía		
• Tasa de crecimiento poblacional		64.23

II Resultados de la Simulación

3. Resultados



4. Mathematics

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = {} & \frac{\left[c^{\nu}(1-l)^{1-\nu}\right]^{1-\frac{1}{\gamma}}}{1-\frac{1}{\gamma}} + \beta E[V(z^{+}) \mid \eta] + \\
& + \mu_1 \left[(1+r_t^n)a + w_t^n hl + \mathbb{1}_{j \geq j_r} \kappa_t \bar{y}_t ep - a^{+} - p_t c\right] \\
& + \mu_2 \mathbb{1}_{j<j_r} \left[\frac{j-1}{j} \cdot ep + \frac{1}{j} \cdot \left[\lambda + (1-\lambda) \cdot \frac{w_t hl}{\bar{y}_t}\right] - ep^{+}\right] \\
& + \mu_2 \mathbb{1}_{j \geq j_r} [ep - ep^{+}]
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

4.1 Theorems

4.1.1 Several equations

This is a theorem consisting of several equations.

Teorema 4.1 — Name of the theorem. In $E = \mathbb{R}^n$ all norms are equivalent. It has the properties:

$$
|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{4.2}
$$

$$
\left\|\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_i\| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{4.3}
$$

4.1.2 Single Line

This is a theorem consisting of just one line.

Teorema 4.2 A set $\mathscr{D}(G)$ in dense in $L^2(G)$, $|\cdot|_0$.

4.2 Definitions

A definition can be mathematical or it could define a concept.

Definición 4.1 — Definition name. Given a vector space E, a norm on E is an application, denoted $\|\cdot\|$, E in $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ such that:

$$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{4.4}$$

$$\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\| \tag{4.5}$$

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\| \tag{4.6}$$

4.3 Notations

Notación 4.1 Given an open subset G of $\boldsymbol{R}^n$, the set of functions φ are:
1. Bounded support G;
2. Infinitely differentiable;

a vector space is denoted by $\mathscr{D}(G)$.

4.4 Remarks

This is an example of a remark.

R The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.5 Corollaries

Corolario 4.1 — Corollary name. The concepts presented here are now in conventional employment in mathematics. Vector spaces are taken over the field $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, however, established properties are easily extended to $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

4.6 Propositions

4.6.1 Several equations

Proposición 4.1 — Proposition name. It has the properties:

$$\big|\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|\big| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \tag{4.7}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{x}_i\| \quad \text{where } n \text{ is a finite integer} \tag{4.8}$$

4.6.2 Single Line

Proposición 4.2 Let $f, g \in L^2(G)$; if $\forall \varphi \in \mathscr{D}(G)$, $(f, \varphi)_0 = (g, \varphi)_0$ then $f = g$.

4.7 Examples

4.7.1 Equation Example

Ejemplo 4.1 Let $G = (x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 3)$ and denoted by: $x^0 = (1, 1)$; consider the function:

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{si } |x - x^0| \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } |x - x^0| > 1/2 \end{cases} \tag{4.9}$$

The function f has bounded support, we can take $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x^0| \leq 1/2 + \varepsilon\}$ for all $\varepsilon \in]0; 5/2 - \sqrt{2}[$.

4.7.2 Text Example

Ejemplo 4.2 — Example name. Aliquam arcu turpis, ultrices sed luctus ac, vehicula id metus. Morbi eu feugiat velit, et tempus augue. Proin ac mattis tortor. Donec tincidunt, ante rhoncus luctus semper, arcu lorem lobortis justo, nec convallis ante quam quis lectus. Aenean tincidunt sodales massa, et hendrerit tellus mattis ac. Sed non pretium nibh. Donec cursus maximus luctus. Vivamus lobortis eros et massa porta porttitor.

4.8 Exercises

Ejercicio 4.1 This is a good place to ask a question to test learning progress or further cement ideas into students' minds.

4.9 Problems

Problema 4.1 What is the average airspeed velocity of an unladen swallow?

4.10 Vocabulary

Define a word to improve a students' vocabulary.

- **Vocabulario 4.1 — Word.** Definition of word.

5. Presenting Information and Results with a Long Chapter Title

5.1 Table

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullamcorper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Tabla 5.1: Table caption.

Referencing Tabla 5.1 in-text using its label.

5.2 Figure

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Praesent porttitor arcu luctus, imperdiet urna iaculis, mattis eros. Pellentesque iaculis odio vel nisl ullamcorper, nec faucibus ipsum molestie. Sed dictum nisl non aliquet porttitor. Etiam vulputate arcu dignissim, finibus sem et, viverra nisl. Aenean luctus congue massa, ut laoreet metus ornare in. Nunc fermentum nisi imperdiet lectus tincidunt vestibulum at ac elit. Nulla mattis nisl eu malesuada suscipit.

Treatments	Response 1	Response 2
Treatment 1	0.0003262	0.562
Treatment 2	0.0015681	0.910
Treatment 3	0.0009271	0.296

Tabla 5.2: Floating table.

Figura 5.1: Figure caption.

Referencing Figura 5.1 in-text using its label and referencing Figura 5.2 in-text using its label.

Figura 5.2: ting figure.

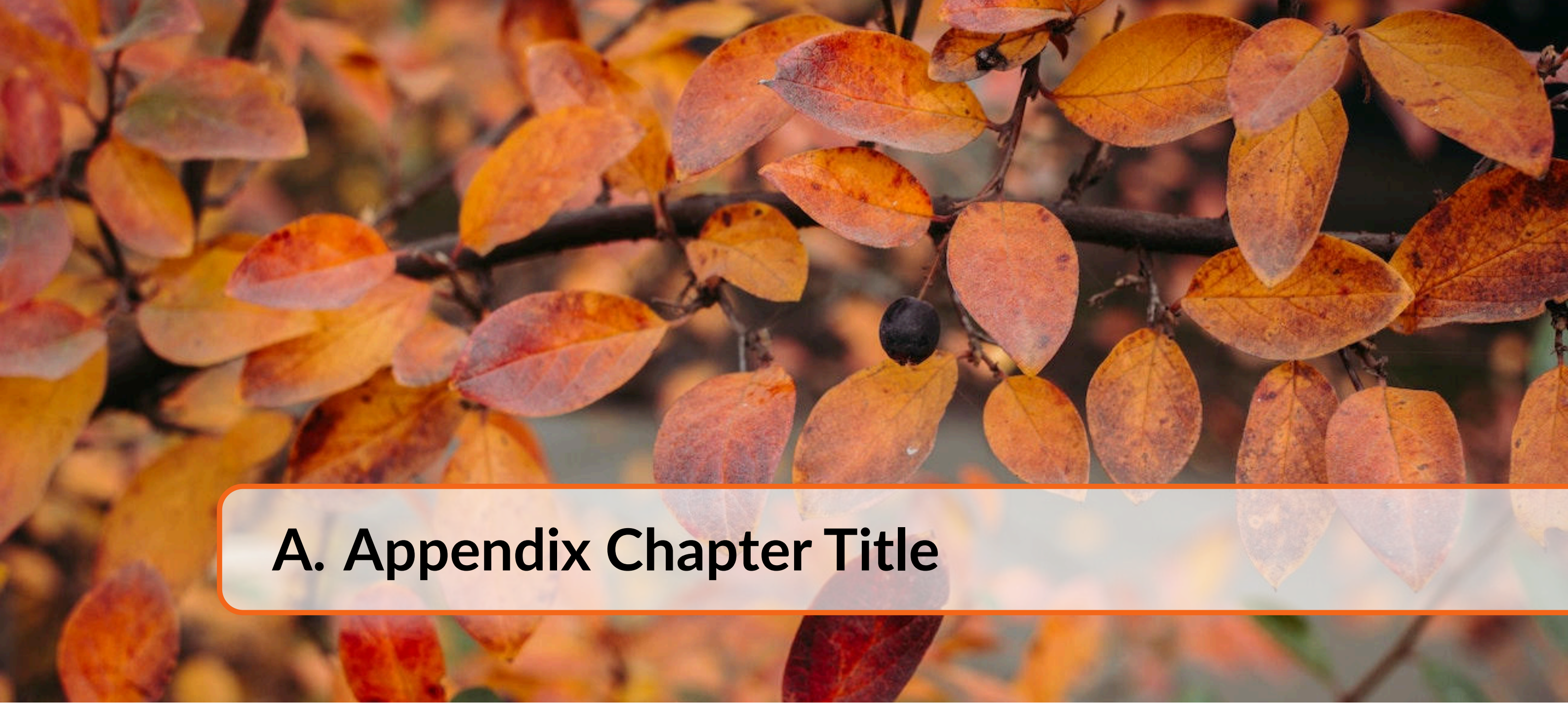
Bibliografía

Fehr, H., & Kindermann, F. (2018). *Introduction to computational economics using Fortran*. Oxford University Press.

Fehr, H., Kallweit, M., & Kindermann, F. (2013). Should pensions be progressive?. *European Economic Review*, *63*, 94-116.

Nishiyama, S., & Smetters, K. (2014). Analyzing fiscal policies in a heterogeneous-agent overlapping-generations economy. En *Handbook of Computational Economics: Vol. 3. Handbook of Computational Economics* (pp. 117-160). Elsevier.

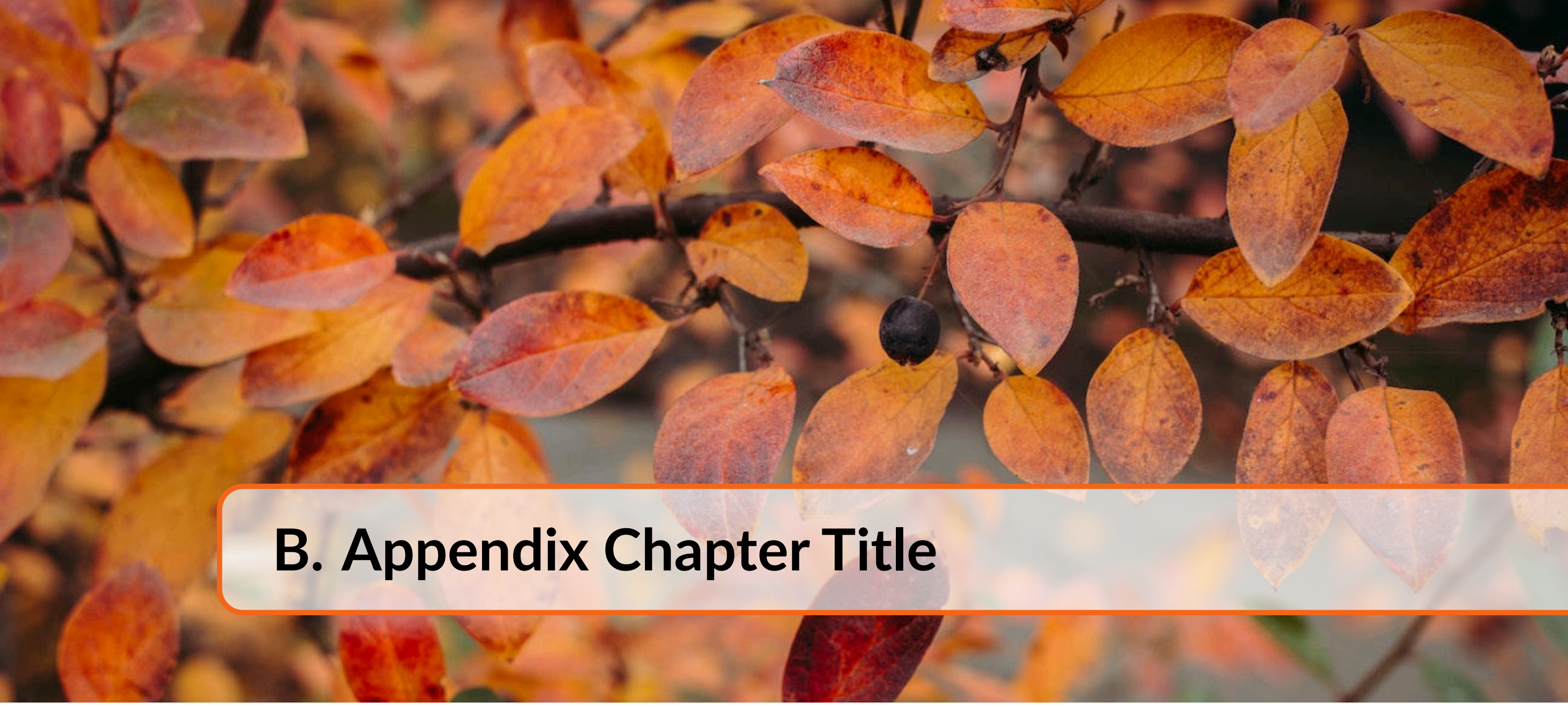
Index



A. Appendix Chapter Title

A.1 Appendix Section Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.



B. Appendix Chapter Title

B.1 Appendix Section Title

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut.