Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

REŠAVANJE PROBLEMA MAKSIMALNOG RANCA

Seminarski rad u okviru kursa
Računarska inteligencija

Mentor:
prof. dr Aleksandar Kartelj

Studenti:
Miloš Krsmanović,
263/2015

Danilo Vučković
87/2015

Februar 2019. godine

Sadržaj

Apstrakt

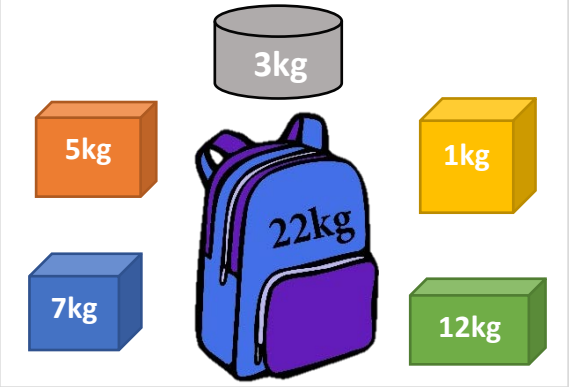
Na samom početku, kao uvod, biće dat koncept problema jednodimenzionalnog maksimalnog ranca. Ovaj problem poslužiće kao dobra osnova za upoznavanje sa relativno kompleksnijim, ali višestruko važnijim, dvodimezionalnim problemom ranca gde će se pored veličine, posmatrati i vrednost koju predmet ima. Za oba pomenuta problema biće navedeni algoritmi koji ih rešavaju, kao i njihova implementacija u programskom jeziku C i Python. Problem će biti rešen naivnom metodom, kao i unapređenim pristupom koji koristi dinamičko programiranje. Takođe, biće predstavljen i genetski algoritam koji rešava navedeni problem kao i vreme koje je bilo potrebno ovim pristupima da dođu do rešenja.

Poseban akcenat će biti stavljen na unapređivanju algoritma koji se koristi prilikom rešavanja ovog problema. U radu će biti reči i o tome kako je ovaj problem našao svoju primenu u mnogim sferama industrije i proizvodnje, ali i u svakodnevnom životu.

Opis osnovnog problema maskimalnog ranca

Početni problem kojim ćemo se baviti je problem gde je predmet opisan samo svojom veličinom.

Ovaj problem ima svoju primenu u mnogim sferama svakodnevnog života. Umesto ranca – problem se može posmatrati i kao popunjavanje teretnjaka, magacina ili silicijumskog čipa na što bolji način, odnosno sa što manjim gubicima prostora. Mogu to biti i druge situacije iz svakodnevnog života što će biti opisano u narednom odeljku.



Slika 1 Grafički predstavljen problem

Ukratko, pored predmeta i njihovih težina dat je i kapacitet ranca koji ne sme biti pređen. Potrebno je napuniti ranac stvarima ali tako da prostor bude maksimalno iskorišćen, odnosno da bude što manje praznog prostora. Iako deluje jednostavno, ovaj problem je veoma složen za veće skupove predmeta gde postoji veliki broj mogućnosti, a on tek predstavlja uvod u višedimenzionalni problem ranca.

Motivacija za rešavanje problema maksimalnog ranca

Potreba za algoritmom koji rešava ovaj problem postoji u mnogim aspektima svakodnevnog života. Veoma slikovit primer može biti sledeći: za reklamu određenog proizvoda izdvojeno je 5 miliona dinara. Potrebno je izabrati najbolji način oglašavanja gde su bitne stavke - cena takvog vida oglašavanja i broj ljudi do kojih reklama stiže.

Opcije koje postoje su sledeće:

- *Sportsko takmičenje:* 3 miliona dinara za oko 80 miliona ljudi
- *Radio kampanja:* 800.000 dinara za oko 20 miliona slušalaca
- *TV reklama:* 500.000 dinara za oko 22 miliona gledalaca
- *Oglas u najprodavanijim novinama:* 2 miliona dinara za približno 75 miliona ljudi
- *Internet kampanja:* košta 600.000 dinara i očekuje se da je vidi 10 miliona ljudi

Koji je najpogodniji, odnosno optimalni način oglašavanja koji treba izabrati?

U ovakvim, ali i mnogim drugim situacijama, problem ranca se može u potpunosti primeniti i dati optimalno rešenje. [1]

Formalni opis problema

Dat je prirodan broj **K** koji predstavlja kapacitet ranca i **n** predmeta različitih veličina, tako da i-ti predmet ima veličinu k_i, $1 \leq i \leq n$. Potrebno je pronaći podskup predmeta čija je suma veličina jednaka tačno **K** ili ustanoviti da takav podskup ne postoji. Podrazumeva se da se veličine predmeta daju naknadno tj. da one nisu deo inicijalnog problema. Dakle, **P(i, K)** označava problem sa prvih **i** predmeta i rancem veličine **K**.

Induktivna hipoteza: Umemo da resimo **P(n–1, k)** za sve k, $0 \leq k \leq K$.

Bazni slucaj **P(1,k)** se lako rešava: za k = 0 uvek postoji rešenje (trivijalno, nula sabiraka), a u protivnom rešenje postoji akko je k1 = k.

Problem **P(n, k)** svodi se na dva problema **P(n–1, k)** i **P(n–1, k–k_n)** (drugi problem otpada ako je k–k_n< 0). Oba ova problema se mogu rešiti indukcijom. Prepreka na koju se nailazi je veoma mala efikasnost algoritma. Dakle, problem veličine n sveden je na dva problema velicine n – 1. Svaki od dobijenih problema svodi se na po dva naredna problema, što dovodi do *eksponencijalnog algoritma*.

Srećom, u većini slučajeva moguće je poboljšati efikasnost prilikom rešavanja ovakvih problema. Može se uočiti da ukupan broj različitih problema nije preveliki jer prvi parametar može imati najviše **n**, a drugi najviše **K** različith vrednosti. Dakle, ukupan broj različith problema je najviše **nK**. [2]

Poboljšanje algoritma za rešavanje jednodimenzionog problema ranca

Kako je ukupan broj različitih problema **nK**, očigledno je da su neki od njih dva puta rešavani. U tom slučaju, koristan je metod koji pamtiti sva nađena rešenja da bi se izbeglo ponovno traženje rešenja istog problema.

Metod koji se koristi za rešavanje ovog problema je dinamičko programiranje. Suština dinamičkog programiranja je formiranje velikih tabela (u opštem slučaju višedimenzionalnih) sa svim rezultatima. Tabele se konstruišu iterativno, a svaki element se izračunava na osnovu već izračunatih elemenata.

Za smeštanje svih izračunatih rezultata koristi se posebna matrica dimenzije **n** x **K**. Element **(i, k)** matirce sadrži informacije o rešenju problema **P(i, k)**. Svođenje po induktivnoj hipotezi ekvivalentno je izračunavanju jedne vrste na osnovu prethodne vrste matrice. Ako je potrebno odrediti i podskup sa zadatim zbirom, onda uz svaki element matrice treba sačuvati i informaciju o tome da li je odgovarajući element skupa uključen u zbir u tom koraku. Prateći ove informacije unazad od elementa **(n, K)**, može se rekonstruisati podskup sa zbirom **K**. [3]

Ispod je dat pseudokod[1] koji implementira ovaj način rešavanja.

Ulaz: S (vektor dužine n sa veličinama predmeta) i K (zapremina ranca).
Izlaz: P (matrica, tako da je P[i,k].Postoji = *true* akko postoji rešenje problema ranca sa prvih i predmeta, za veličinu ranca k; P[i,k].Pripada = true akko i-ti predmet pripada tom rešenju).

```
begin
        P[0, 0].Postoji := true;
        for k := 1 to K do
                P[0,k].Postoji := false;
                {elementi P[i, 0] za i ≥ 1 biće izračunati na osnovu P[0, 0]}
        for i := 1 to n do
                for k := 0 to K do {izračunavanje elementa P[i, k]}
                        P[i, k].Postoji := false; {polazna vrednost}
                        if P[i − 1, k].Postoji then
                                P[i, k].Postoji := true;
                                P[i,k].Pripada := false
                        else if k − S[i] ≥ 0 then
                                if P[i − 1, k − S[i]].Postoji then
                                        P[i, k].Postoji := true;
                                        P[i,k].Pripada := true;
end
```

[1] Pseudokod za rešavanje jednodimenzionalnog problema ranca u celosti je preuzet iz knjige "Algoritmi" čiji je autor redovni profesor na Matematičkom fakultetu, dr Miodrag Živković. [2]

Dvodimenzionalni problem maksimalnog ranca

Pored navedenog jednodimenzionalnog, problem koji zahteva veću pažnju i koji je višestruko bitniji je dvodimenzionalni problem ranca kada je predmet opisan svojom veličinom i vrednošću. Cilj je pronaći podskup predmeta tako da njihova veličina ne prelazi zadatu granicu (kapacitet ranca) a da je pritom suma vrednosti predmeta iz tog podskupa maksimalna. [4]

Ovaj problem je prvo rešen naivnom metodom koja daje ispravan rezultat, ali po cenu velike složenosti, a zatim metodom dinamičkog programiranja pomoću kojeg je složenost umanjena.

Naivni metod kojim se rešava problem maksimalnog ranca dat je vidu C koda.

```
//Funkcija vraca maksimalnu vrednost koja moze biti smestena u ranac kapaciteta K

int ranac(int K, int tezine[], int vrednosti[], int n) {

  // Bazni slucaj
  if (n == 0 || K == 0)
      return 0;

  // Ako je tezina n-tog predmeta veca od kapaciteta ranca K  tada  predmet
  // nece biti ubacen u ranac.

  if (tezine[n-1] > K)
     return ranac(K, tezine, vrednosti, n-1);

  //Vraca maksimum naredna dva slucaja:
  //1. uzima se n-ti predmet
  //2. ne uzima se n-ti predmet

  else return max( vrednosti[n-1] + ranac(K-tezine[n-1], tezine, vrednosti, n-1),
                   ranac(K, tezine, vrednosti, n-1) );

}
```

Iako je rešenje intuitivno jasno i prati formalni opis problema, ovakav algoritam ima veoma veliku složenost. Vremenska složenost navedenog naivnog metoda je eksponencijalna, odnosno **$O(2^n)$**.

Napredniji metod koji rešava problem maksimalnog ranca ima svojstva dinamičkog programiranja. Kao i kod drugih problema koji se rešavaju dinamičkim programiranjem, umesto ponovnog izračunavanja potproblema koriste se matrice u kojima se pamte svi dotadašnji rezultati. [5]

```
//Funkcija vraca maksimalnu vrednost koja moze biti smestena u ranac kapaciteta K
int ranac(int kapacitet, int tezine[], int vrednosti[], int n){

  int R[n+1][kapacitet+1];

  // Popunjavanje tabele odozdo nagore
  for (int i = 0; i <= n; i++){
    for (int w = 0; w <= kapacitet; w++){
      if (i==0 || w==0)
        R[i][w] = 0;
      else if (tezine[i-1] <= w)
          R[i][w] = max(vrednosti[i-1] + R[i-1][w-tezine[i-1]],  R[i-1][w]);
      else
          R[i][w] = R[i-1][w];
    }
  }
  return R[n][kapacitet];
}
```

Složenost ovakvog pristupa je **O(nK)** gde je n broj predmeta, a K kapacitet ranca. U nastavku se lako može uočiti koliko vremensko poboljšanje donosi ovaj pristup pri većim dimenzijama problema.

Poređenje rada navedenih pristupa

Navedene metode su pokrenute na dva različita hardverska sistema, dok je korišćeni operativni sistem bio isti - GNU/Linux Ubuntu. Prilikom kompilacije, korišćen je integrisani kompilator - GCC.

Rezultati koji su navedeni u prvoj tabeli dobijeni su na sistemu sa sledećem komponentama: Dvojezgarni Intelov Celeron procesor koji radi na frekvenciji od 2.10 GHz uz 2GB radne memorije.

Težine	Vrednosti	Kapa-citet	Rezultat	Naivna metoda	Dinam. program.
9, 11, 10, 12	45, 67, 69, 75	20	114	**0.000002 s**	**0.000004 s**
2, 3, 4, 5	3, 4, 5, 6	5	7	**0.000002 s**	**0.000002 s**

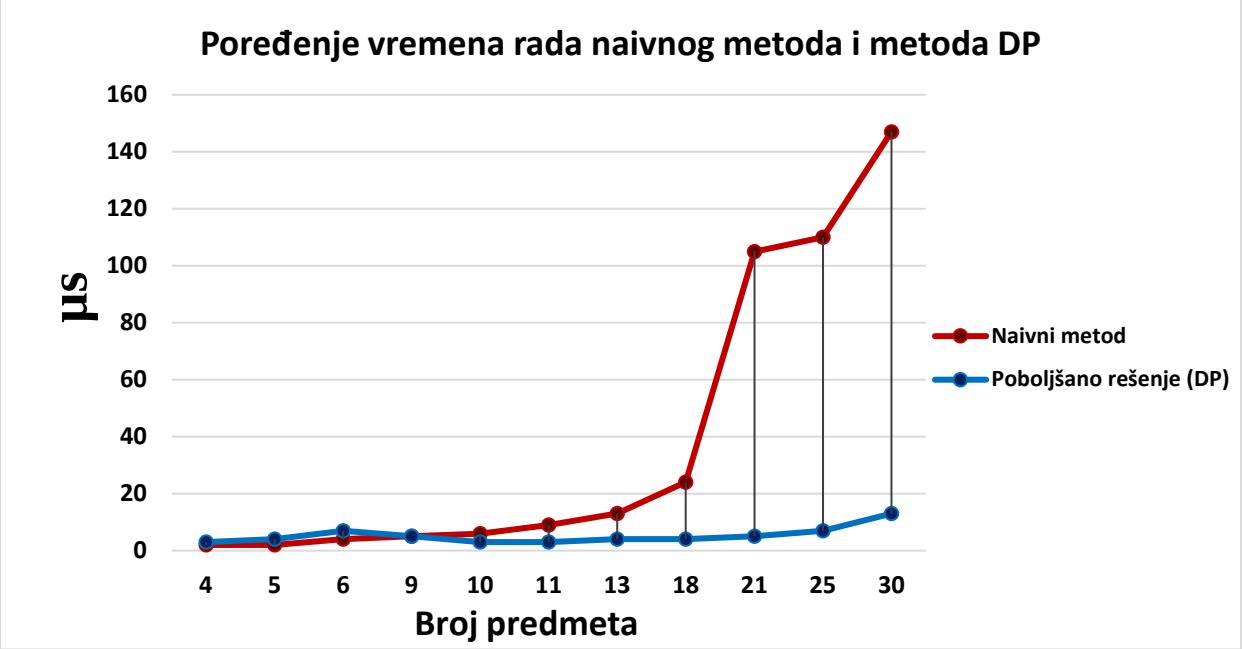
1, 5, 3, 4	15, 10, 9, 5	8	29	**0.000004 s**	**0.000002 s**
10, 20, 30, 10, 10, 10	600, 100, 120, 90, 90, 90	50	880	**0.000004 s**	**0.000007 s**
23, 26, 20, 18, 32, 27, 29, 26, 30, 27	505, 352, 458, 220, 354, 414, 498, 545, 473, 543	67	1270	**0.000005 s**	**0.000013 s**
3, 5, 3, 4, 1, 1, 2, 3	1500, 1000, 900, 500, 1000, 1000, 1200, 1300	8	4800	**0.000006 s**	**0.000003 s**
3, 5, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 1, 1, 1	1500, 1000, 900, 500, 1000, 1000, 1200, 1300, 1100, 1500, 1550, 300, 400, 330	8	5100	**0.000024 s**	**0.000004 s**
3, 5, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3	1500, 1000, 900, 500, 1000, 1000, 1200, 1300, 1100, 1500, 1550, 300, 400, 330, 350, 670, 360, 1000	8	5370	**0.000105 s**	**0.000005 s**

Komponente drugog sistema na kome su testirani navedeni kodovi su sledeće: Intel Core i5 procesor sa 2 fizička i 4 logička jezgra sa radom na 3.30 GHz i 8GB radne memorije.

Težine	Vrednosti	Kapa-citet	Rezultat	Naivna metoda	Dinam. program.
9, 11, 10, 12	45, 67, 69, 75	20	114	**0.000006 s**	**0.000009 s**
2, 3, 4, 5	3, 4, 5, 6	5	7	**0.000004 s**	**0.000007 s**
1, 5, 3, 4	15, 10, 9, 5	8	29	**0.000005 s**	**0.000008 s**
10, 20, 30, 10, 10, 10	600, 100, 120, 90, 90, 90	50	880	**0.000008 s**	**0.000017 s**
23, 26, 20, 18, 32, 27, 29, 26, 30, 27	505, 352, 458, 220, 354, 414, 498, 545, 473, 543	67	1270	**0.000014 s**	**0.000019 s**
3, 5, 3, 4, 1, 1, 2, 3	1500, 1000, 900, 500, 1000, 1000, 1200, 1300	8	4800	**0.0000013 s**	**0.000008 s**
3, 5, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 1, 1 ,1	1500, 1000, 900, 500, 1000, 1000, 1200, 1300, 1100, 1500, 1550, 300, 400, 330	8	5100	**0.000048 s**	**0.000011 s**
3, 5, 3, 4, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 3	1500, 1000, 900, 500, 1000, 1000, 1200, 1300, 1100, 1500, 1550, 300, 400, 330, 350, 670, 360, 1000	8	5370	**0.000182 s**	**0.000013 s**

Upoređivanjem izmerenih vremenâ uočena je očekivana tendencija da metod koji koristi dinamičko programiranje zahteva manje vremena za izvršavanje kada je dimenzija problema veća. Naivni pristup je imao isto pa čak i kraće vreme izvršavanja za manje dimenzije, ali čim je dimenzija problema počela da raste, došlo je i do naglog porasta količine vremena potrebnog da se naivni metod izvrši, što se može jasno videti sa grafika ispod.

Dodatno, iz navedenih rezultata može se uočiti zanimljivost da su programi radili brže, odnosno da se ciljna funckija izvršavala kraće, na sistemu koji ima sporiji radni takt, manje keš i radne memorije.



Grafik 1: Poređednje vremena rada oba navedena metoda

Genetski algoritam

Genetski algoritam je najefikasniji pristup zasnovan na prirodnoj selekciji. Iako genetski algoritam može ili ne mora dati ispravan rezultat, u većini slučajeva proizvodi bolju generaciju u poređenju sa roditeljskom generacijom. Kao što su roditelji najprilagođeniji u generaciji i njihovi delovi opstaju u novim generacijama, tako i lošiji nosioci gena umiru u narednim generacijama. Ovaj postupak se ponavlja dok nije zadovoljen neki korisnički definisan završni kriterijum poznat kao *funkcija cilja*.

Tokom svake generacije deo postojeće populacije je izabran da pripremi novu generaciju. Individualna rešenja su izabrana pomoću procesa baziranog na zdravlju (odnosno fitnesu), gde rešenja koja su više *fit* (merena fitnes funkcijom) imaju veće šanse da budu izabrana. Fitnes funkcija je definisana u genetskoj reprezentaciji i meri kvalitet predstavljenog rešenja.

U problemu maksimalnog ranca, potrebno je pronaći najveću ukupnu vrednost predmeta koja se može staviti u ranac fiksnog kapaciteta. Reprezentacija rešenja može biti niz bitova, gde će svaki bit predstavljati drugi predmet, i vrednost bita (0 ili 1) - da li je predmet u rancu ili ne. Ovakva reprezentacija ne mora nužno biti dobra, jer veličina predmeta može biti veća od kapaciteta ranca. Fitnes rešenje je zbir vrednosti svih objekata u rancu ukoliko je reprezentacija validna, ili 0 u suprotnom.

Korišćeni genetski algoritam koji rešava problem ranca, prati naredni pseudokod:

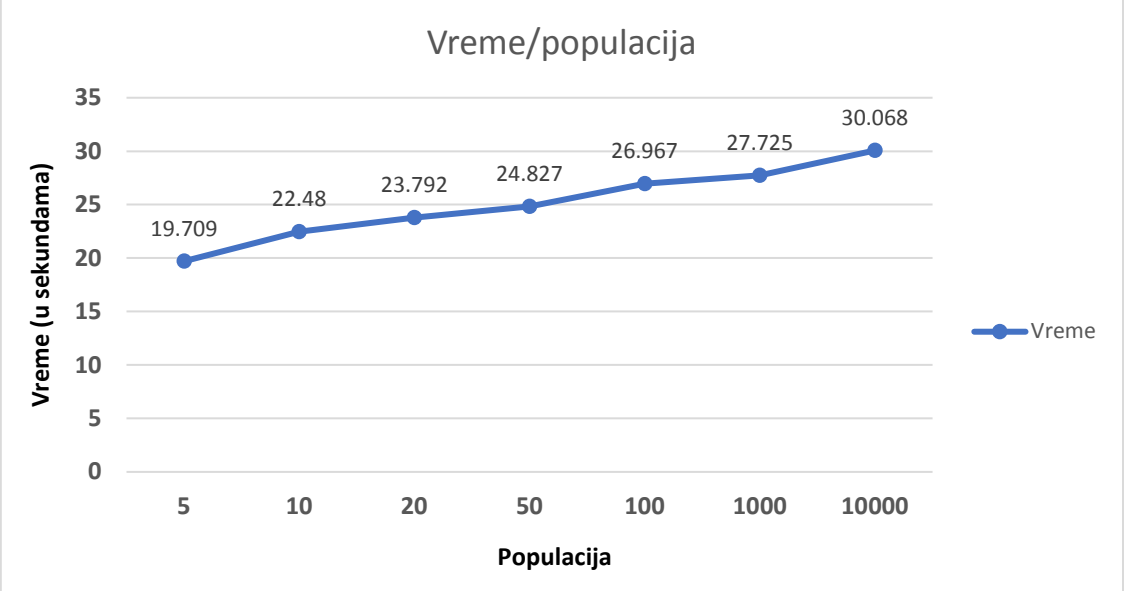
```
Inicijalizuj populaciju;
Evaluiraj populaciju;
while Nije zadovoljen uslov za zavrsetak {
        Odaberi roditelje za ukrstanje;
        Izvrsi ukrstanje i mutaciju;
        Evauliraj populaciju;
}
end
```

Analiza rada genetskog algoritma i dobijenih rezultata

U ovom delu biće testiran i isproban genetski algoritam, implementiran u programskom jeziku Python, koji rešava problem ranca. Testiranje je vršeno puštanjem algotirma u rad sa različitim veličinama ulaza što je ovde broj predmeta, i različitim parametrima samog algoritma (mutacija, populacija). Vreme koje je bilo potrebno pri svakom puštanju algoritma u rad izmereno je funckijom biblioteke *time*, a rezultati su predstavljeni graficima zavisnosti vremena od različitih parametara.

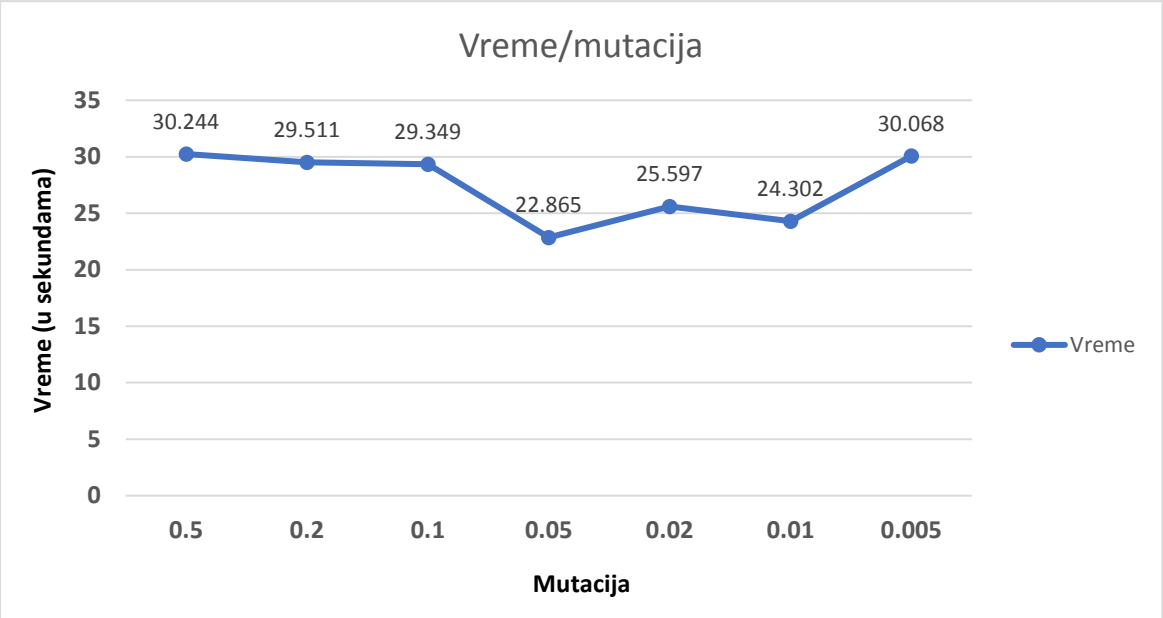
U prvoj fazi testiranja menjana je vrednost parametra populacije, dok su ostali parametri imali sledeće vrednosti:

- Treshold: 0.5
- Mutacija: 0.1
- Broj predmeta: 10



U drugoj fazi menjana je vrednost parametra mutacije, dok su ostali parametri imali naredne vrednosti:

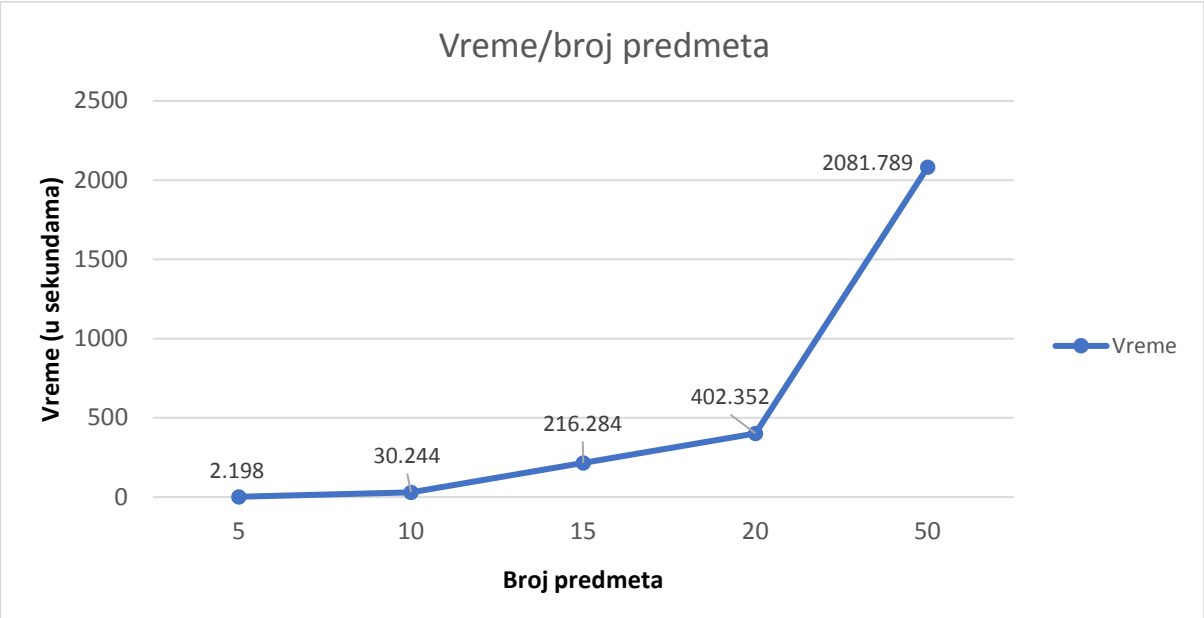
- Treshold: 0.5
- Populacija: 10
- Broj predmeta: 10



Treća faza je, očekivano, dala zanimljive rezultate u pogledu utroška vremena prilikom povećanja broja predmeta koji se mogu naći u rancu.

Parametri koji su bili konstantni:

- Treshold: 0.5
- Mutacija: 0.5
- Populacija: 10



Bitno je pomenuti da je genetski algoritam uvek dolazio do rešenja koje ispunjava ranac u potpunosti, u čemu se poklapa sa naivnim pristupom i pristupom pomoću DP.

Složenost genetskog algoritma

Kako je broj hromozoma u svakoj generaciji i broj broj generacija statičan, složenost algoritma može zavisiti samo od broj predmeta koji se mogu naći u rancu.
Neka je **N** broj predmeta, **S** veličina populacije i **G** broj mogucih generacija.

Funkcija koja inicijalizuje niz hromozoma ima složenost O(N). Fitnes i funkcija ukrštanja takođe imaju složenost O(N). Navedene funkcije se pokreću najviše G puta, a kako je G konstanta - to neće uticati na konačnu složenost algoritma.
Dakle, složenost ovog pristupa je O(N). [6]

Zaključak

Problem maksimalnog ranca koji je u ovom radu predstavljen jeste jedan od poznatijih problema u računarstvu koji ima višestruku primenu u svakodnevnom životu. Upravo zbog toga, ovom problemu se pristupa na mnogo različitih načina. Ipak, mogu se izdvojiti dva pristupa: naivni i dinamičko programiranje. Prvi je jednostavniji za razumevanje i do njega se lako dolazi, daje ispravne rezultate ali uz veću potrebu za vremenom. Drugi, optimizovani pristup je očekivano bolji. Već prilikom malo većih dimenzija problema (20 i više) mnogo je brži.

Oba opisana algoritma se zasnivaju na nekoj vrsti metoda pretraživanja što u najgorem slučaju može imati eksponencijalno vreme. Bolji rezultat nam je svakako dao pristup genetskim algoritmom. Genetski algoritam redukuje složenost algoritma do linearne, što omogućava pronalaženje približno optimalnog rešenja za NP-kompletan problem.

Korišćena literatura

[1] M. B. I. K. Kleinberg, "A Knapsack Secretary Problem with Applications," *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques,* pp. 16-28, 2007.

[2] p. d. M. Živković, Algoritmi, Beograd: Matematički fakultet, 2000.

[3] ArnaudFréville, "The multidimensional 0–1 knapsack problem: An overview," *European Journal of Operational Research,* vol. 155, no. 1, pp. 1-21, May 2004.

[4] P. C. Beasley, "A Genetic Algorithm for the Multidimensional Knapsack Problem," *Journal of Heuristics,* vol. 4, no. 1, pp. 63-86, June 1998.

[5] D. P. P. T. Silvano Martello, "Dynamic Programming and Strong Bounds for the 0-1 Knapsack Problem," *Management Science,* vol. 45, no. 3, pp. 297-454, 1 March 1999.

[6] D. S. Maya Hristakeva, "Solving the 0-1 Knapsack Problem with Genetic Algorithms," 2013.

[7] V. Kann, "School of Electrical Engineering and Computer Science," 20 3 2000. [Online]. Available: https://www.nada.kth.se/~viggo/wwwcompendium/node211.html#7374. [Accessed 17 Januar 2019].