Студент: Милосердова Любовь Михайловна
Группа: 371 (SE)
Дата: 20 мая 2022 г.

Динамическое транзитивное замыкание

Задача 1. *Придумайте алгоритм для декрементального транзитивного замыкания, работающий за $O(n^2(m+n))$ суммарно на все апдейты.*

Доказательство. Будем хранить список смежности графа и удалять ребра из него. Также будем хранить граф, в котором напревления ребер заменены на противоположные.

Запустим обход в глубину из вершины j по "перевернутому" графу, тем самым найдем вершины, из которых j уже не достижима (в исходном графе), но была достижима на предыдущем шаге. Из всех таких вершин нужно запустить обход в глубину по исходному графу для того, чтобы проверить существует ли путь, соединяющий вершины u и v и при этом не содержащий вершину j. Если такого пути не нашлось, значит, между u и v пути нет (и уже никогда не будет).

Псевдокод алгоритма:

Algorithm 1 Декрементальное обновление матрицы достижимости

1: **function** DELETE(i, j)
2:   **if** $G[i,j]=1$ **then**
3:     $G[i].remove(j)$ ▷ G — список смежности графа
4:     $G\_reversed[j].remove(i)$ ▷ $G\_reversed$ — список смежности графа, в котором направление ребер изменено на проотивоположное
5:     $dfs(G\_reversed, j)$ ▷ сохраняет в массив $used\_reversed$ вершины, из которых достижима i
6:     **for** $u : used\_reversed[u]=0 \wedge M[j,u]=1$ **do**
7:       $dfs(G,u)$ ▷ сохраняет в массив $used$ достижимые из u вершины
8:       **for** $v : used[v]=0$ **do**
9:         $M[u,v] \leftarrow 0$

Оценим сложность данного алгоритма. Сложность алгоритма обхода графа в глубину — $O(m+n)$. Строчка 5 будет вызвана столько раз, сколько будет удалений ребер, то есть $O(m(m+n))$. На строчке 6 мы выбираем такие вершины u, из которых уже не будет достижима j. Так как ребра только удаляются, то после того, как $M[j,u]$ станет равно 0, оно уже никогда не станет 1. Всего таких пар (j,u) —- $O(n^2)$. Таким образом, суммарно строчки 6–9 затратят $O(n^2(m+n+n)$ времени. Итого, суммарная сложность алгоритма $O(m(m+n)+n^2(m+2n)) \leq O(n^2(m+n)+n^2(m+n)) = O(n^2(m+n))$ □