Miłosz Grześkowiak *18 Marca 2025*
Rok 1 Informatyka Stosowana i Systemy Pomiarowe Prowadząca:
17 Marca 2025 *dr Sylwia Owczarek*

Ćwiczenie nr. 7

Temat: Badanie drgań wahadła skrętnego (torsyjnego)

#	1. Długość pręta [cm]	2. Średnica pręta [mm]	3. Długość 20 okresów [s]
1	31.0	3.44	12.91
2	31.0	3.44	13.38
3	31.1	3.42	13.06
4	31.0	3.43	12.94
5	31.1	3.43	13.00
Średnia	30.84	3.432	13.058

Dokładność wartości z pomiaru 1
$\Delta_1 = 0.1$cm

Dokładność wartości z pomiaru 2
$\Delta_2 = 0.01$mm

Dokładność wartości z pomiaru 3
$\Delta_3 = 0.01$s

#	1. Masa kulki 1 [g]	2. Średnica kulki 1 [mm]	3. Masa kulki 2 [g]	4. Średnica kulki 2 [mm]
1	31.9	20.32	63.3	25.05
2	31.9	20.31	63.3	25.17
3	31.9	20.34	63.3	25.16
4	31.9	20.34	63.3	25.17
5	31.9	20.34	63.3	25.16
Średnia	31.90	20.330	63.30	25.142

Dokładność wartości z pomiaru 1,3
$\Delta_{13} = 0.1$g

Dokładność wartości z pomiaru 2,4
$\Delta_{24} = 0.01$mm

#	Długość 20 okresów [s] dla r = 10.18mm			Długość 20 okresów [s] dla r = 12.57mm		
	Pom. 1	Pom. 2	Średnia	Pom. 1	Pom. 2	Średnia
d = r + 1cm	14.00	14.09	14.04	14.93	14.85	14.89
d = r + 2cm	14.84	14.93	14.88	16.53	16.38	16.45
d = r + 3cm	16.07	15.93	16.00	18.34	18.50	18.42
d = r + 4cm	17.38	17.28	17.33	20.53	20.53	20.53
d = r + 5cm	18.93	18.75	18.84	23.25	22.84	23.05
d = r + 6cm	20.65	20.35	20.50	25.44	25.41	25.43
d = r + 7cm	22.38	22.22	22.30	28.18	28.22	28.20
d = r + 8cm	23.68	23.72	23.70	31.19	31.13	31.16
d = r + 9cm	25.66	25.50	25.58	33.69	33.69	33.69
d = r + 10cm	27.78	27.79	27.79	36.78	36.47	36.63

Dokładność wartości z pomiarów
$\Delta = 0.01s$

ZAGADNIENIA TEORETYCZNE

Wahadło skrętne (torsyjne) to układ fizyczny, który służy do badania drgań harmonicznych bryły sztywnej zawieszonej na elastycznym pręcie lub drucie. Głównym celem eksperymentu jest wyznaczenie okresu drgań wahadła torsyjnego oraz określenie momentu kierującego D, który charakteryzuje właściwości sprężyste pręta. Aby zrozumieć zasady działania wahadła torsyjnego, należy odwołać się do kilku kluczowych zagadnień z mechaniki klasycznej.

1. Ruch bryły sztywnej wokół środka masy

Bryła sztywna to ciało, którego punkty materialne pozostają w stałych odległościach względem siebie. Ruch obrotowy bryły sztywnej wokół środka masy opisuje się za pomocą równania ruchu obrotowego:

$$\tau = I\alpha$$

gdzie:

- τ – moment siły działający na bryłę,
- I – moment bezwładności bryły względem osi obrotu,
- α – przyspieszenie kątowe.

W przypadku wahadła torsyjnego, moment siły jest proporcjonalny do kąta skręcenia pręta, co prowadzi do ruchu harmonicznego.

2. Moment bezwładności

Moment bezwładności I jest miarą bezwładności bryły w ruchu obrotowym. Zależy on od rozkładu masy względem osi obrotu i jest określony wzorem:

$$I = \int r^2 \, dm$$

gdzie r to odległość elementu masy dm od osi obrotu. Dla prostych brył geometrycznych momenty bezwładności są znane i można je znaleźć w tablicach fizycznych.

3. Twierdzenie Steinera

Twierdzenie Steinera (twierdzenie o osiach równoległych) pozwala obliczyć moment bezwładności bryły względem dowolnej osi, jeśli znany jest moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy. Twierdzenie to ma postać:

$$I = I_{cm} + md^2$$

gdzie:

- I_{cm} – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,
- m – masa bryły,
- d – odległość między osiami.

4. Budowa i zasada działania wahadła torsyjnego

Wahadło torsyjne składa się z bryły sztywnej (np. dysku lub pręta) zawieszonej na elastycznym pręcie lub drucie. Gdy bryła zostanie skręcona o pewien kąt θ, pręt działa na nią momentem siły sprężystej, który dąży do przywrócenia równowagi. Moment ten jest proporcjonalny do kąta skręcenia:

$$\tau = -D\theta$$

gdzie D to moment kierujący, który zależy od właściwości sprężystych pręta.

5. Okres drgań harmonicznych wahadła torsyjnego

Ruch wahadła torsyjnego jest ruchem harmonicznym, a jego okres T zależy od momentu bezwładności I oraz momentu kierującego D. Okres drgań można wyrazić wzorem:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$$

gdzie:

- T – okres drgań,
- I – moment bezwładności bryły względem osi obrotu,
- D – moment kierujący.

6. Wzór na okres drgań wahadła skrętnego i moment kierujący D

Moment kierujący D jest związany z właściwościami sprężystymi pręta i można go wyznaczyć na podstawie okresu drgań T oraz momentu bezwładności I:

$$D = \frac{4\pi^2 I}{T^2}$$

Wartość D zależy od materiału pręta, jego długości oraz średnicy. Dla pręta o długości L i module sztywności G, moment kierujący można również wyrazić jako:

$$D = \frac{GJ}{L}$$

gdzie J to moment bezwładności przekroju pręta względem osi skręcania.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Eksperyment polegał na sprawdzeniu jak obciążenie metalowego pręta, wpłynie na jego okres drgań. W tym celu skorzystano z metalowego pręta zawieszonego na drucie, dwóch zestawów kulek, o masie 31.9g i 63.3g, stopera oraz elektromagnesu. Następnie sprawdzano jak odległość kulek na pręcie wpłynie na jego okres wahań. Pomiary wykonano kilkukrotnie, dla kilku odległości d od środka pręta, oraz dla dwóch różnych zestawów kulek.

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

Posiadając wartości długości, średnicy i długości 20 okresów pręta, masę i średnice kulek oraz długość 20 okresów dla różnych odległości kulek, możemy oszacować wartości takie jak:

- Masa pręta
- Moment bezwładności pręta
- Wartość momentu kierującego

Masa pręta

Masę pręta możemy obliczyć za pomocą wzoru:

$$m_p = \rho * V = \rho * \frac{\pi}{4} * l * \phi^2$$

Gdzie:

- m_p - Masa pręta
- ρ - Gęstość materiału pręta (stal - $7.9\frac{g}{cm^3}$
- l - Długość pręta
- ϕ - Średnica pręta

A więc:

$$m_p = 7.9\frac{g}{cm^3} * \frac{\pi}{4} * 30.84cm * (0.343cm)^2 \approx 22.538g$$

Moment bezwładności pręta

Moment bezwładności możemy obliczyć za pomocą wzoru:

$$I_p = \frac{1}{12} * m_p * l^2$$

Gdzie:

- I_p - Moment bezwładności pręta
- m_p - Masa pręta
- l - Długość pręta

Więc:

$$I_p = \frac{1}{12} * 22.538g * (30.84cm)^2 \approx 1786.335g * cm^2$$

Wartość momentu kierującego

Wartość momentu kierującego możemy obliczyć za pomocą wzoru:

$$D = \frac{\pi^3 * l^3 * \phi^2 * \rho}{12 * T_p^2}$$

Gdzie:

- D - Wartość momentu kierującego
- l - Długość pręta
- ϕ - Średnica pręta
- ρ - Gęstość materiału pręta
- T_p - Okres drgań pręta bez kul

Więc:

$$D = \frac{\pi^3 * (30.84cm)^3 * (0.3432cm)^2 * 7.9\frac{g}{cm^3}}{12 * (0.6539s)^2} \approx 164.934 * 10^3 N * m$$

Wykresy oraz regresja

Możemy określić jak będzie wyglądał wykres długości 20 okresów w zależności od odległości środka ciężkości. Pomogą nam w tym wzory na współczynniki prostej $y = Ax + B$. Wzory na te współczynniki wyglądają następująco:

$$A = \frac{8 * \pi^2 * m_k}{D}$$

$$B = \frac{\pi}{3 * D} * m_p * l^2 + \frac{16 * \pi^2}{5 * D} * m_k * R_k^2$$

Gdzie:

- m_k - Masa kulki
- D - Wartość momentu kierującego
- m_p - Masa pręta
- l - Długość pręta
- R_k - Promień kulki

Podstawiając odpowiednie wartości do wzoru wychodzi nam:

Dla kulki 1:

$$A = \frac{8 * \pi^2 * 31.90g}{164.934 * 10^3 N * m} \approx 0.015$$

$$B = \frac{\pi}{3 * 164.934 * 10^3 N * m} * 22.538g * (30.84cm)^2 + \frac{16 * \pi^2}{5 * 164.934 * 10^3 N * m} * 31.90g * (1.018cm)^2 \approx 0.142$$

Dla kulki 2:

$$A = \frac{8 * \pi^2 * 63.30g}{164.934 * 10^3 N * m} \approx 0.030$$

$$B = \frac{\pi}{3 * 164.934 * 10^3 N * m} * 22.538g * (30.84cm)^2 + \frac{16 * \pi^2}{5 * 164.934 * 10^3 N * m} * 63.30g * (1.257cm)^2 \approx 0.155$$

Z czego wynika, że końcowe wzory na funkcję wynoszą:

$$y_1 = 0.023x_1 + 0.218$$

$$y_2 = 0.046x_2 + 0.238$$

Regresja liniowa

Regresję liniową możemy obliczyć za pomocą metody najmniejszych kwadratów korzystając ze wzorów:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \sum_{i=1}^{n}(x_i) \sum_{i=1}^{n}(y_i)}{n \sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - (\sum_{i=1}^{n}(x_i))^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i) - a \sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$$

Możemy znaleźć współczynniki funkcji liniowej $y = ax + b$

Obliczenia współczynników regresji liniowej zostały wykonane w autorskim skrypcie w języku *Python*[1] (patrz przypis)

Wykresy zostały zamieszczone na samym końcu sprawozdania.
Pierwszy wykres zawiera regresję liniową obliczoną za pomocą wzorów podanych w opisie ćwiczenia:

$$A = \frac{8 * \pi^2 * m_k}{D}$$

$$B = \frac{\pi}{3 * D} * m_p * l^2 + \frac{16 * \pi^2}{5 * D} * m_k * R_k^2$$

Drugi wykres zawiera regresję liniową obliczoną za pomocą skryptu w języku *Python*[1].

Zauważalnym, a jednocześnie zaskakującym zjawiskiem jest fakt, że regresja liniowa obliczona metodą najmniejszych kwadratów jest dokładniejsza niż metoda podana w opisie ćwiczenia.

WNIOSKI

Wnioskując z powyższych obliczeń, oraz wykresów, można stwierdzić, że:

Odległość obciążników od środka ciężkości jest wprost proporcjonalna do długości jednego okresu drgań wahadła skrętnego.
oraz
Masa obciążników jest wprost proporcjonalna do długości jednego okresu drgań wahadła skrętnego.

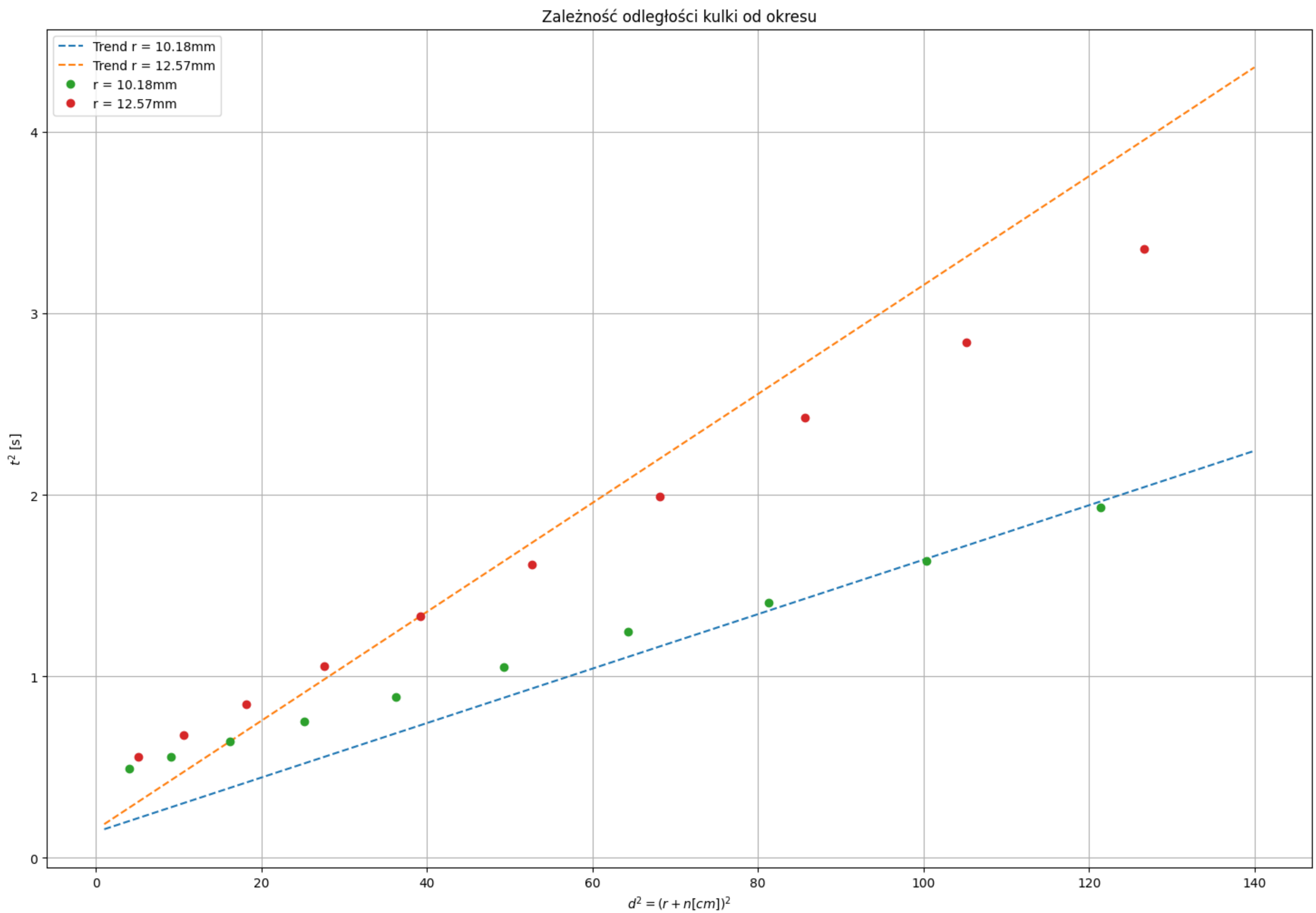
Ciekawym zjawiskiem jest fakt wspomniany w podrozdziale "Regresja Liniowa", gdzie regresja obliczona metodą najmniejszych kwadratów jest dokładniejsza niż metoda polegająca na wyliczeniu regresji z danych związanych z ćwiczeniem.
Metoda najmniejszych kwadratów jednak opiera się na samych punktach zmierzonych przez człowieka, zaś metoda polegająca na wyliczeniu regresji z danych, nie bierze pod uwagę zjawisk współistniejących.
Może być to związane z takimi zjawiskami jak:

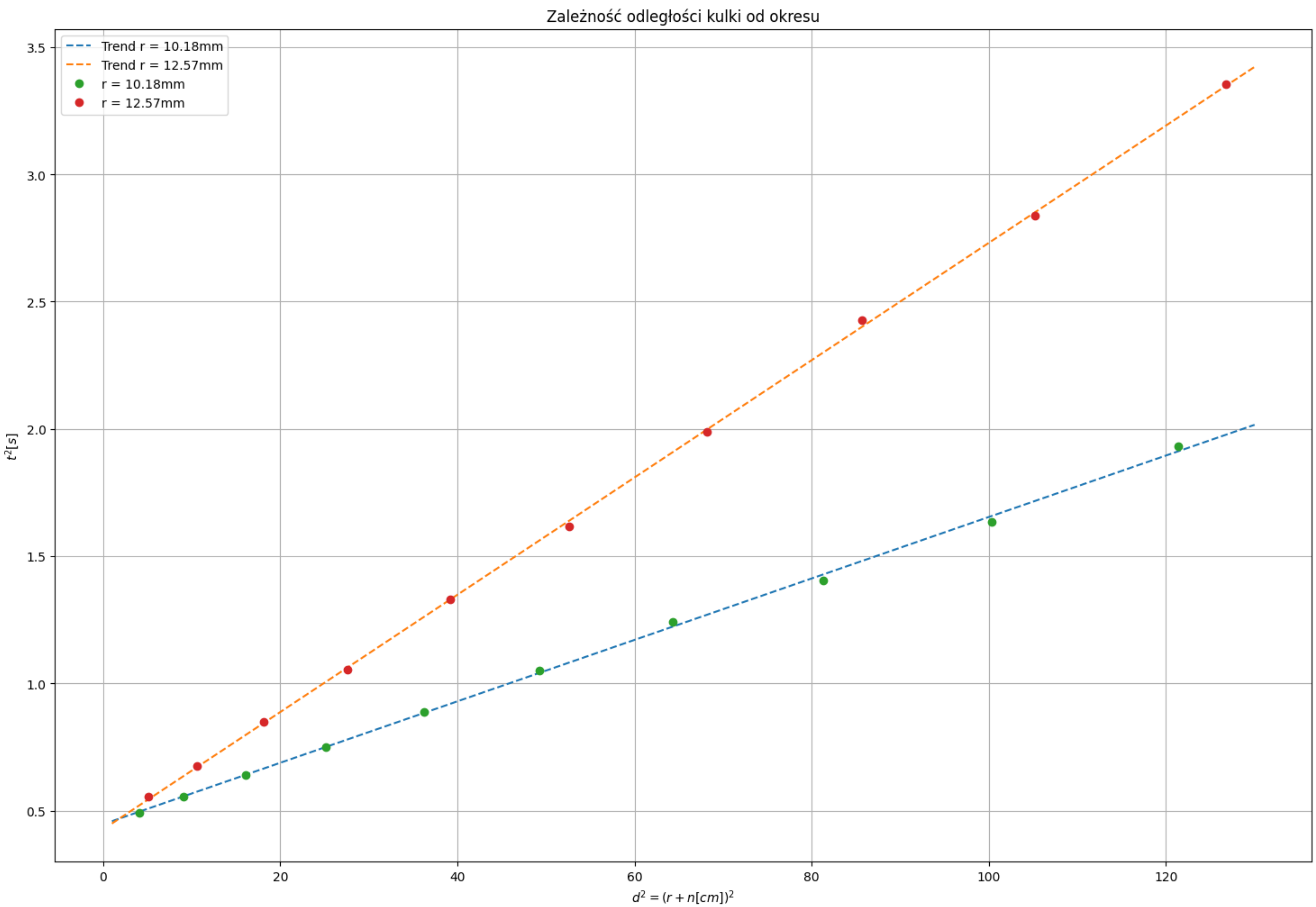
- **Opór powietrza** - okres drgań pręta mógł zostać spowolniony przez opór powietrza.
- **Błąd pomiarowy** - narzędzia pomiarowe takie jak chociażby stoper mogły być rozregulowane i podawać błędne wyniki.
- **Błąd ludzki** - wyniki mogły zostać błędnie zmierzone bądź odczytane przez wykonujących ćwiczenie.

W przyszłości wykonując ćwiczenie, można wykonać obliczenia uwzględniające opór powietrza, oraz wykonać pomiary różnymi narzędziami pomiarowymi.

Przypisy

1. https://github.com/milosz0542/I-Pracownia-Fizyczna
   - Regresja liniowa - /pomocenaukowe/linearregression.py
   - Wykresy - /pomocenaukowe/Sprawozdanie3.ipynb


Zależność odległości kulki od okresu
Trend r = 10.18mm
Trend r = 12.57mm
r = 10.18mm
r = 12.57mm
t^2 [s]
$d^2 = (r + n[cm])^2$
0
1
2
3
4
0
20
40
60
80
100
120
140


Zależność odległości kulki od okresu
Trend r = 10.18mm
Trend r = 12.57mm
r = 10.18mm
r = 12.57mm
$t^2[s]$
$d^2 = (r + n[cm])^2$
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
0
20
40
60
80
100
120