

Ćwiczenie nr. 9

Temat: Wyznaczenie modułu Younga metodą jednostronnego rozciągania

#	Początkowa długość drutu [cm]	Średnica drutu [mm]	Średnica wskazówki [mm]
1	94.5	0.83	0.94
2	93.5	0.83	0.96
3	93.8	0.82	0.95
4	94.2	0.83	0.97
5	94.2	0.82	0.97
średnia	94.04	0.826	0.958
odch. stand.	0.35	0.004	0.012

Dokładność wartości z pomiaru 1
 $\Delta_1 = 0.1\text{cm}$

Dokładność wartości z pomiaru 2
 $\Delta_2 = 0.01\text{mm}$

Dokładność wartości z pomiaru 3
 $\Delta_3 = 0.01\text{mm}$

Długość przy obciążeniu prostującym $0.5\text{kg} = 32\text{dz}$

obciążenie [kg]	długość drutu (pomiar rosnąco) [dz.]	długość drutu (pomiar malejąco) [dz.]
1	33	32
2	34	33
3	35	34
4	36	35
5	37	36
6	38	38
6.5	38	38

Dokładność wartości z pomiaru
 $\Delta = 1\text{dz} \approx 0.083\text{mm}$

Obciążenie [N]	ΔL [mm]
9.81	0.041
19.62	0.127
29.43	0.207
39.24	0.290
49.05	0.373
58.86	0.498
63.76	0.498

ZAGADNIENIA TEORETYCZNE

Wprowadzenie

Moduł Younga (E) jest jednym z podstawowych parametrów charakteryzujących właściwości mechaniczne materiałów. Określa on zależność między naprężeniem a odkształceniem w zakresie sprężystości, zgodnie z prawem Hooke'a. Wyznaczenie modułu Younga jest istotne w inżynierii materiałowej, konstrukcji maszyn oraz budownictwie, ponieważ pozwala ocenić sztywność materiału i jego odporność na odkształcenia pod wpływem sił zewnętrznych [1].

Podstawy teoretyczne

Prawo Hooke'a dla rozciągania

Dla małych odkształceń, w zakresie sprężystości, naprężenie (σ) jest wprost proporcjonalne do odkształcenia względnego (ε):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1)$$

gdzie:

- σ - naprężenie mechaniczne [Pa],
- E - moduł Younga [Pa],
- ε - odkształcenie względne (bezwymiarowe).

Definicje naprężenia i odkształcenia

- **Naprężenie** (σ) - stosunek siły rozciągającej (F) do pola przekroju poprzecznego próbki (S):

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2)$$

- **Odkształcenie względne** (ε) - stosunek przyrostu długości (ΔL) do początkowej długości próbki (L_0):

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (3)$$

Zależność siły od wydłużenia

Łącząc powyższe zależności, otrzymujemy wyrażenie na moduł Younga:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot L_0}{S \cdot \Delta L} \quad (4)$$

Metoda jednostronnego rozciągania

W doświadczeniu wyznacza się moduł Younga poprzez pomiar wydłużenia próbki pod wpływem przyłożonej siły rozciągającej. Wykonuje się następujące kroki [2]:

1. **Przygotowanie próbki** - drut o znanych wymiarach (długość L_0 , pole przekroju S).
2. **Pomiar siły** - obciążenie próbki kolejnymi ciężarkami i rejestracja przyrostu długości (ΔL).
3. **Analiza danych** - sporządzenie wykresu zależności $F(\Delta L)$, który powinien być liniowy w zakresie sprężystości. Nachylenie prostej pozwala wyznaczyć E po przekształceniu wzoru:

$$E = \frac{L_0}{S} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta(\Delta L)} \quad (5)$$

Czynniki wpływające na dokładność pomiaru

- Jednorodność materiału próbki,
- precyzja pomiaru długości i przekroju,
- zakres odkształceń sprężystych (aby uniknąć plastyczności),
- temperatura otoczenia (moduł Younga może zależeć od temperatury) [3].

Podsumowanie

Metoda jednostronnego rozciągania pozwala wyznaczyć moduł Younga w prosty sposób, opierając się na fundamentalnych zasadach mechaniki ośrodków ciągłych. Wynik doświadczenia zależy od dokładności pomiarów geometrycznych próbki oraz kontroli zakresu sprężystego materiału [1].

Literatura

- [1] Nowicki, B. (1998). *Mechanika materiałów*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [2] Banasik, A. (2012). *Wytrzymałość materiałów*. Kraków: Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- [3] Szczeniowski, S. (1980). *Fizyka doświadczalna, cz. 1*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
- [4] Leyko, J. (2006). *Mechanika ogólna*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.

OPIS DOŚWIADCZENIA

Doświadczenie polegało na obciążaniu drutu odważnikami, w celu ustalenia jak zmieniać się będzie jego długość.

Po obciążaniu druta, mierzone było położenie wskazówki przytwierdzonej do drutu.

OPRACOWANIE WYNIKÓW POMIARÓW

Moduł Younga możemy wyliczyć za pomocą współczynnika kierunkowego prostej regresji liniowej wyliczonej metodą najmniejszych kwadratów:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Korzystając z autorskiego skryptu w języku Python^[1] obliczającego regresję liniową metodą najmniejszych kwadratów, wartości współczynników wynosiły odpowiednio

$$a = 109560.798 \text{ i } b = 6.342$$

Obliczenie modułu Younga za pomocą współczynnika kierunkowego prostej

Moduł Younga możemy określić za pomocą współczynnika kierunkowego prostej. W tym wypadku współczynnik kierunkowy a będzie równy współczynnikowi sprężystości k .

Współczynnik sprężystości jest równy:

$$k = \frac{F}{\Delta L}$$

Więc podstawiając do wzoru na moduł Younga, będzie on się prezentował następująco

$$E = \frac{k * L_0}{S}$$

Jedyną niewiadomą w tym wzorze pozostaje S , czyli pole przekroju poprzecznego drutu. Możemy je wyliczyć:

$$S = \pi * \left(\frac{\Phi}{2}\right)^2 = \pi * \left(\frac{0.000826m}{2}\right)^2 \approx 5.36 * 10^{-7}m$$

Podstawiając wartości do wzoru:

$$E = \frac{109560 \frac{N}{m} * 0.9404m}{5.36 * 10^{-7}m} \approx 192.221 * 10^9 = 192.221 GPa$$

Niepewność współczynnika kierunkowego regresji prostej

Niepewność współczynnika kierunkowego możemy obliczyć ze wzoru

$$u(a) = \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

Korzystając ze skryptu w języku Python^[1], wynik niepewności współczynnika kierunkowego wynosi
 $u(a) = 4.264379$.

Niepewność modułu Younga

Niepewność modułu Younga możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\Delta E = E \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_1 L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2}$$

Gdzie:

- $\Delta k = u(a)$
- $\Delta_1 L$ - niepewność przyrządu pomiarowego ($0.01mm = 0.00001m$)
- $\Delta S = S \Delta d = \pi * d * \Delta d \approx 5.36 * 10^{-12}$ (Δd - niepewność przyrządu pomiarowego)

Podstawiając wartości do wzoru

$$\Delta E = 192.221 GPa \sqrt{\left(\frac{4.264379}{109.560 \frac{N}{m}}\right)^2 + \left(\frac{0.00001}{0.9404m}\right)^2 + \left(\frac{5.36 * 10^{-12}}{5.36 * 10^{-7}m}\right)^2} \approx 7.481$$

Co oznacza, że

$$E = 192.221 \pm 7.481 GPa$$

Analiza wykresu

Na podstawie zamieszczonego na ostatniej stronie sprawozdania wykresu (z którego określona została wartość współczynnika kierunkowego prostej regresji liniowej) można zauważyć, że punkty są bardzo zbliżone do prostej regresji, co wskazuje na to, że na pomiar nie wpływały żadne większe błędy pomiarowe.

WNIOSKI

Analizując wyniki, można dojść do wniosku, że pomiary zostały wykonane prawidłowo, z bardzo niskimi odchyleniami.

Na podstawie wartości modułu Younga, która wynosi $E = 192.221 \pm 7.481 GPa$ można określić materiał z jakiego został wykonany drut.

Biorąc pod uwagę dane na temat wartości modułu Younga dla wybranych materiałów^[2] można określić, że materiał, z jakiego został wykonany drut to **stal niklowa**, **stal konstrukcyjna** lub **żelazo kute**.

Przypisy

1. <https://github.com/milosz0542/I-Pracownia-Fizyczna>
 - Regresja liniowa /pomocnaukowe/linearregression.py
 - Wykresy oraz współczynnik prostej regresji liniowej /pomocnaukowe/sprawozdanie4.ipynb
2. https://www.engineeringtoolbox.com/young-modulus-d_417.html

Zmiana długości drutu w zależności od obciążenia

