HTW Berlin
Fachbereich 1
Prof. Dr. Andreas Zeiser
Version 3. Dezember 2021

Angewandte Mathematik – Elektrotechnik (M)

Übungsblatt Systeme von Dgln und Dgln höherer Ordnung

Aufgabe 1

Erweitern Sie Ihre Routinen zum Euler-Verfahren und zur Mittelpunktsregel, so dass auch Systeme von Differenzialgleichungen der Form

$$\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a, \quad \text{mit } \mathbf{y}_a \in \mathbb{R}^k,\ f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

gelöst werden können. Verwenden Sie folgende geänderten Ein- und Ausgabeparameter:
Eingabe:

`f`	Funktionshandle für $f(t, \mathbf{y})$ mit Rückgabe der Größe $k \times 1$
`ya`	Anfangswerte $\mathbf{y}_a$ der Größe $k \times 1$

Ausgabe:

`y`	Matrix der Größe $(n+1) \times k$; die Komponenten der approximierten Lösung $\mathbf{y}_i$ zum Zeitpunkt t_i stehen in der i-ten Zeile.

Überlegen Sie sich Beispiele, um Ihren Algorithmus zu testen und implementieren Sie diese als Skript.

Zusatz: Erweitern Sie die Routine `awp12` auf Systeme von Differenzialgleichungen. Nutzen Sie dabei die Euklidsche Norm (`norm`).

Aufgabe 2

Der Verlauf einer ansteckenden Krankheit kann mithilfe des SIR-Modells beschrieben werden:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -c\,i\,s, & s(0) &= s_0 \\ \dot{i} &= c\,i\,s - w\,i, & i(0) &= i_0 \\ \dot{r} &= w\,i, & r(0) &= r_0 \end{aligned}$$

Dabei sind die Größen

- s der Anteil der gesunden Individuen (engl. *susceptible individuals*),
- i der Anteil der erkrankten, ansteckenden Individuen (engl. *infectious individuals*),
- r der Anteil der gesunden, immunisierten Individuen (engl. *resistant individuals*)

an der Gesamtbevölkerung. Die Konstante c beschreibt die Ansteckungsgefahr und w die Gesundungsrate. Simulieren Sie mithilfe des Euler-Verfahrens, der Mittelpunktregel und `ode45` für die Parameter

$$c = 2,\ w = 1,\ i_0 = 10^{-6},\ s_0 = 1 - i_0,\ r_0 = 0$$

den Verlauf der Krankheit. Wählen Sie ein geeignetes Intervall und eine geeignete Schrittanzahl. Überprüfen Sie, inwieweit Ihre Näherungslösung die Bedingung

$$s + i + r = 1$$

erfüllt. Welche Auswirkung hat eine Impfung von 30% der Bevölkerung auf den Verlauf der Krankheit?

Aufgabe 3

Der Strom $i(t)$ in einem Reihenschwingkreis eines Widerstands (R), eines Kondensators (C) und einer Spule (L) bei einer Spannung von $u_e(t)$ kann durch

$$\ddot{i} + \frac{R}{L}\dot{i} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_e(t), \quad i(0) = 0,\, \dot{i}(0) = 0.$$

modelliert werden. Simulieren Sie mithilfe des Euler-Verfahrens das Verhalten bei einer periodischen Anregung

$$u_e(t) = u_0 \sin(\omega t)$$

mit Parametern

$$R = 47\,\Omega,\ C = 0.1\,\mu\mathrm{F},\ L = 2\,\mathrm{mH},\ u_0 = 5\,\mathrm{V},\ \omega = 10^4\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Wählen Sie das Zeitintervall so, dass sich eine stationäre Lösung einstellt.

Untersuchen Sie mithilfe der Simulation die Amplitude $A(\omega)$ des stationären Zustandes für die Kreisfrequenzen

$$\omega = 10 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1},\ 12 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1},\ \ldots,\ 150 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}$$

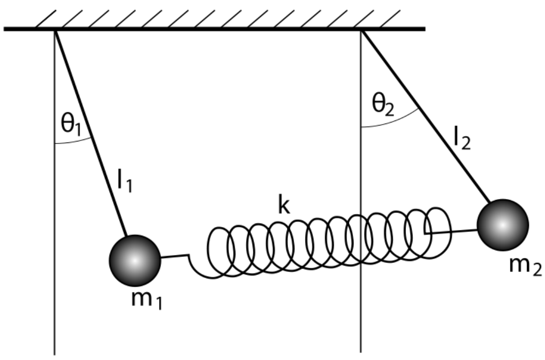
und erstellen Sie einen Graphen von $A(\omega)$ über ω. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Kreisfrequenz ω_{max} mit maximaler Amplitude.

Aufgabe 4 **(Zusatz)**

Zwei gekoppelte Pendel (siehe Abbildung) mit gleicher Länge ($L = \ell_1 = \ell_2$) und gleicher Masse ($m = m_1 = m_2$) können durch die Gleichungen[1]

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{\theta}_1 &= -mgL \cdot \theta_1 + kL^2(\theta_2 - \theta_1) \\ mL^2\ddot{\theta}_2 &= -mgL \cdot \theta_2 - kL^2(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

modelliert werden, wobei g die Erdbeschleunigung und k eine Kopplungskonstante ist. Finden Sie geeignete Konstanten und simulieren Sie dieses System. Finden Sie Anfangsbedingungen für eine gleichsinnige, eine gegensinnige Schwingung und den Schwebungsfall.



Gekoppeltes Pendel (Quelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte_Pendel`)

[1] siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Gekoppelte_Pendel`