

Aufgabenblatt 3

Mit diesem Aufgabenblatt werden lineare shift-invariante Systeme (LSI) betrachtet. Des Weiteren wird die Faltung im Experiment untersucht und der Begriff des Frequenzgangs motiviert. Die folgenden Schlüsselworte und Funktionen sind dabei von besonderer Bedeutung:

sin, rectpuls, zeros, square
conv, max, length, logspace, log10
figure, plot, stem, semilogx, grid, xlabel, ylabel, hold
for, function

Wichtig: Geben Sie bitte nur eine Gesamtlösung pro Aufgabe ab. Lösungen für die Teilaufgaben a, b usw. sind nicht erwünscht. Am besten geben Sie ein einzelnes Matlab-Skript für das Aufgabenblatt ab und verwenden Sektionen für die einzelnen Aufgabe (dies ist nur in Matlab und nicht in Octave möglich).

Jede Gruppe (mit maximal zwei Studierenden) gibt die Lösungen bitte gemeinsam ab (also nur einmal). Vergessen Sie nicht, die Namen und Matrikel-Nummern aller an der Lösung beteiligten Studierenden als Kommentar in den ersten Zeilen jedes Matlab-Skripts einzufügen.

3.1 Impulsantwort

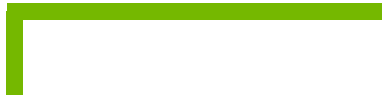
Gegeben ist das folgende LSI-System (moving average Filter):

$$y[n] = (x[n - 2] + x[n - 1] + x[n]) / 3$$

Bearbeiten Sie zu diesem System folgende Aufgaben:

- Ermitteln Sie mit Matlab/Octave die Impulsantwort des Systems und stellen Sie diese graphisch dar. Die Achsen sollen beschriftet sein. Verwenden Sie nicht die Faltung, sondern lösen Sie die Aufgabe z.B. indem Sie die Ausgangswerte in einer Schleife berechnen.
- An den Eingang des oben dargestellten System soll ein Rechtecksignal mit der Amplitude 1 und der Frequenz 4 Hz angelegt werden. Als Abtastfrequenz sollen $f_s = 64$ Hz verwendet werden. Berechnen Sie mit Hilfe der Faltung in Matlab/Octave das Ausgangssignal über eine Sekunde und stellen Sie das Eingangssignal und das Ausgangssignal in einem zweiten Diagramm graphisch dar (mit figure und plot). Beschriften Sie die Achsen.

Hinweis: Ein Rechtecksignal können Sie mit der Matlab-Funktion square erzeugen. Sie verwenden diese Funktion genauso wie eine Sinusfunktion (periodisch in 2π).



- c) Wiederholen Sie den Versuch aus Teilaufgabe b mit Sinussignalen. Verwenden Sie erneut die Amplitude 1 und die Abtastfrequenz 64 Hz. Geben Sie in einem Plot die Ausgangssignale des Systems für die Frequenzen 4 Hz, 8 Hz, 16 Hz und 32 Hz aus. Beschriften Sie die Achsen. Was für ein Filterverhalten hat das implementierte System? Begründen Sie Ihre Antwort und ergänzen Sie sie als Kommentar in dem Matlab-Skript.

3.2 LSI-Systeme

Gegeben ist ein LSI-System mit folgender Impulsantwort:

$$h[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1] + 0,25 \cdot \delta[n - 2]$$

Weisen Sie mit Matlab/Octave exemplarisch die Linearität des Systems nach. Gehen Sie hierzu folgendermaßen vor:

- a) Ermitteln Sie zu den folgenden beiden Eingangssignalen mit $n=0:16$ die Ausgangssignale $y_1[n]$ und $y_2[n]$ (verwenden Sie hierzu die Funktion für die Faltung, conv):

$$x_1[n] = \sin(6\pi \cdot n/16) \quad x_2[n] = \sin(10\pi \cdot n/16)$$

- b) Ermitteln Sie zu einem Eingangssignal $x_{\text{ges}} = a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]$ durch Anwendung der Faltung das Ausgangssignal $y_{\text{ges}}[n]$, wobei Sie für a und b beliebige Werte vorgeben dürfen.
- c) Zeigen Sie graphisch (mit plot und stem), dass folgende Beziehung gilt:

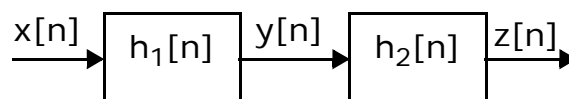
$$y_{\text{ges}}[n] = a \cdot y_1[n] + b \cdot y_2[n]$$

Darin sind y_1 , y_2 und y_{ges} die Ergebnisse der vorangehenden Teilaufgaben und a und b entsprechend der Teilaufgaben b zu wählen.

- d) Kommentieren Sie das Ergebnis.

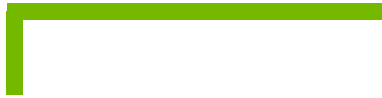
3.3 Reihenschaltung von LSI-Systemen

Gegeben ist ein Reihenschaltung von zwei LSI-Systemen (siehe Bild) sowie die Impulsantworten beider Systeme.



$$h_1[n] = \delta[n] + 0,5 \cdot \delta[n - 1] + 0,25 \cdot \delta[n - 2]$$

$$h_2[n] = -0,25 \cdot \delta[n] - \delta[n - 1] - 0,5 \cdot \delta[n - 2]$$



Für diese Reihenschaltung soll mit Matlab/Octave gezeigt werden, dass sich die Impulsantwort des Gesamtsystems durch Faltung der Impulsantworten der Einzelsysteme ergibt. Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Ermitteln Sie zunächst die Impulsantwort $y[n]$ (das geht durch scharfes Nachdenken).
- Ermitteln Sie die Antwort $z[n]$ des Systems $h_2[n]$, unter der Voraussetzung, dass am Eingang das zuvor ermittelte $y[n]$ angelegt wird.
- Berechnen Sie die Faltung $h_1[n] * h_2[n]$ und ermitteln Sie zu dem Gesamtsystem die Impulsantwort $z[n]$.
- Vergleichen Sie graphisch die zu Teilaufgaben b und c ermittelten Ausgangssignale $z[n]$.

3.4 Manuelle Aufnahme des Frequenzgangs

Gegeben ist die Impulsantwort des folgenden LSI-Systems:

$$h[n] = 0,25 \cdot (\delta[n - 3] + \delta[n - 2] + \delta[n - 1] + \delta[n])$$

Zu diesem System soll die Amplitude des Frequenzgangs (Amplitudengang) dargestellt werden. Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Erzeugen Sie in einer Schleife Sinussignale mit den Frequenzen 1 Hz, 11 Hz, 21 Hz, 31 Hz, 51 Hz jeweils mit einer einheitlichen Abtastfrequenz von 64 Hz. Berechnen Sie zu jedem Sinussignal das Ausgangssignal zum angegebenen System $h[n]$ über 3 Sekunden und ermitteln Sie die maximale Amplitude des Ausgangssignals.
- Visualisieren Sie die Ergebnisse, indem Sie die maximalen Amplitudenwerte und zugehörigen Frequenzen in einem Graphen darstellen (inklusive Achsenbeschriftung). Ergänzen Sie einen Kommentar, der erläutert, wie das Ergebnis zu interpretieren ist.

3.5 Frequenzgang

Mit der vorangehenden Aufgabe wurde der Amplitudengang eines Systems manuell aufgenommen. Im Folgenden soll dieser Vorgang automatisiert werden. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

- Schreiben Sie eine Funktion „getSpectrum“, die den Amplitudengang linear ermittelt und das Ergebnis als Vektor von Amplitudenwerten zurückgibt. Verwenden Sie hierbei nicht die in Matlab/Octave verfügbaren Funktionen zur Berechnung eines Frequenzgangs, sondern automatisieren Sie den Vorgang entsprechend Aufgabe 3.4. Die Funktion soll folgenden Funktionskopf besitzen:

```
function spec = getSpectrum (h, fvec)
```

Die Impulsantwort des zu untersuchenden LSI-Systems wird in h als Vektor übergeben. Die zu betrachtenden Frequenzen werden als Vektor in $fvec$ übergeben. Die Abtastfrequenz soll konstant 8 kHz betragen.

- b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Funktion `getSpectrum` für den Frequenzbereich von 1 Hz bis 1 kHz (Schrittweite 1) den Amplitudengang eines Systems mit folgender Impulsantwort:

$$h[n] = 0,25 \cdot (\delta[n - 3] + \delta[n - 2] + \delta[n - 1] + \delta[n])$$

Stellen Sie den Amplitudengang grafisch dar und beschriften die Achsen.

- c) Der Amplitudengang wird normalerweise in einem Bodediagramm dargestellt. Dabei werden die Frequenzen logarithmisch und die Amplituden mit der Einheit dB (entspricht $20 \cdot \log_{10}(y)$) aufgetragen. Schreiben Sie eine zweite Funktion, die einen entsprechenden Amplitudengang berechnet und die zuvor geschriebene Funktion „getSpectrum“ verwendet. Die Funktion soll folgenden Funktionskopf besitzen:

$$\text{function } [f, \text{spec}] = \text{getSpectrumLog}(h, \text{exp1}, \text{exp2}, n)$$

Die Impulsantwort des zu untersuchenden LSI-Systems wird in h als Vektor übergeben. Die Startfrequenz berechnet sich zu $f_1 = 10^{\text{exp1}}$, die Endfrequenz zu $f_2 = 10^{\text{exp2}}$. In n wird die Anzahl der zu betrachtenden Frequenzen zwischen f_1 und f_2 festgelegt.

Als Ergebnisse in f werden die betrachteten Frequenzen zwischen f_1 und f_2 zurückgegeben und in spec die Amplituden in dB.

Hinweis: Für die logarithmische Aufteilung der Frequenzen können Sie die Funktion `logspace(exp1, exp2, n)` verwenden. Für die Berechnung der dB Werte nutzen Sie die Funktion `log10`.

- d) Geben Sie in einem zweiten Graphen (Aufruf `figure`) den mit Hilfe der Funktion `getSpectrumLog` ermittelten Amplitudengang über den Frequenzbereich von 1 Hz bis 1 kHz zu dem bereits in Teilaufgabe b verwendeten folgenden System aus:

$$h[n] = 0,25 \cdot (\delta[n - 3] + \delta[n - 2] + \delta[n - 1] + \delta[n])$$

Die Achsen sollen beschriftet und das Grid eingeschaltet sein.

Hinweis: Für eine halblogarithmische Darstellung können Sie die Matlab/Octave Funktion `semilogx` verwenden. Sie wird wie die Funktion `plot` aufgerufen.

- e) Bestimmen Sie im dargestellten Graphen die Grenzfrequenz des Moving-Average-Filters. Geben Sie den Wert als Kommentar in Ihrem Skript an.