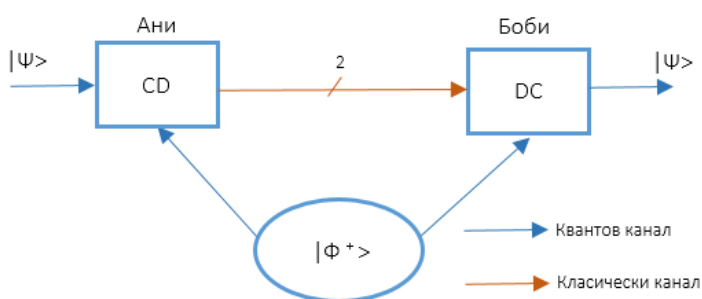


2.4. ПАРАЛЕЛЕН МОДЕЛ НА КВАНТОВАТА ТЕЛЕПОРТАЦИЯ НА 1-QUBIT

Тази точка е посветена на решаването на задачата за построяване на паралелен структурен модел на квантовата телепортация. Поради сложността и многото неизвестни, на този етап се счита достатъчно да се предложи само предварителен вариант на подобен модел, който допълнително да се развива.

Квантовата телепортация (*Quantum Teleporting*) се заключава в точното предаване на неизвестно 1-qubit квантово състояние $|\psi\rangle$ чрез изпращането на два класически бита по допълнителен класически канал.

Не се пренася самият qubit, а информацията, необходима за неговото точно възпроизвеждане в приемника. В края на преноса, оригиналното състояние се разрушава, поради невъзможността да се копират квантови състояния. Това е единственият начин за обмен на квантова информация, следствие на *теоремата за невъзможност на клонирането* на квантовите състояния (*no-cloning theorem*). Оттук и принципното значение на квантовата телепортация. Тясно свързан с нея е *квантовият алгоритъм за плътно кодиране (Dense Coding)*.



Фиг. 2. 19. Схема на квантовата телепортация

Схемата на квантовата телепортация е показана на фиг. 2.19 [А.20, А.21, А.И.1]. Ани¹ притежава qubit с неизвестно състояние

1 Ани (Alice в англоезичната литература) представлява изпращащата страна или страна А, в която се извършва кодирането.

$|\psi\rangle$. Трябва да го предаде на Боби² чрез двубитов класически комуникационен канал. Предварително на Ани е изпратен единият, а на Боби – другият *qubit* от сплетена двойка $|\Phi^+\rangle$, генерирана от *EPR* източника.

Сплитането (entanglement) е възлово за квантовите изчисления явление. То няма класически аналог. Както е посочено в т. 1.3, вътрешноприсъщият на квантовите компютри паралелизъм се дължи именно на възможността квантовите битове да се сплитат (фиг. 1.15).

По правило, даден *q-bit* може да се представи като тензорно произведение на два или повече *q-бита* с по-малка размерност. Сплетените състояния обаче са изключение – те *не са тензорни произведения* на състояния с по-малка размерност. Следователно, състоянието на една квантова система *не винаги* се описва от състоянията на нейните компоненти. Докато състоянието на една класическа система *винаги* се описва напълно от състоянията на нейните компоненти [A.21, A.32].

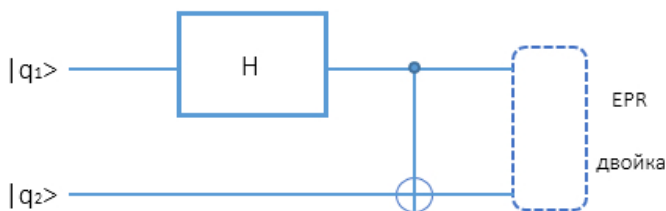
Процесът на формиране на *сплетена двойка (entangled pair, EPR pair)* се нарича *сплитане (entanglement, EPR pair generation)*. Изпълнява се от квантова схема, наричана *EPR източник (EPR source)*³ или *генератор на състояния на Бел (Bell state generator)*.

Нека са дадени например двете *1-qubit* състояния $|x\rangle = a_0|x_0\rangle + a_1|x_1\rangle$ и $|y\rangle = b_0|y_0\rangle + b_1|y_1\rangle$. Чрез подходяща унитарна трансформация, те могат да се сплетат в *2-qubit* състоянието $|\psi\rangle = |x_0\rangle \otimes |y_0\rangle + |x_1\rangle \otimes |y_1\rangle$, което не може да се представи като тензорно произведение на компонентите - $|x\rangle \otimes |y\rangle$. При това, двете частици с *1-qubit* състояния $|x\rangle$ и $|y\rangle$ са толкова силно свързани, че ако първата премине например в състояние $|x_0\rangle$, втората ще премине в същия момент, независимо от разстоянието⁴, в състояние $|y_0\rangle$. Обратно, ако пък първата частица премине в състояние $|x_1\rangle$, втората ще премине в същия момент, независимо от разстоянието, в състояние $|y_1\rangle$. По идентичен начин, промяната на състоянието на втората частица ще се отрази на състоянието на първата.

2 Боби (*Bob* в англоезичната литература) представлява приемащата страна или *страна Б*, в която се извършва декодирането.

3 Обозначението *EPR* идва от имената на откривателите на известния квантов парадокс за сплетените елементарни частици - Einstein, Podolsky, Rosen.

4 Именно в това *моментално действие на разстояние*, наречено от Айнщайн “*spooky action at distance*” в съвместната му статия с Подолски и Розен, се заключава посоченият квантов парадокс. Той се определя също като *нелокална зависимост* между сплетените частици или като *нелокално действие*.



Фиг. 2. 20. *EPR* източник

Известният при *2-qubit* системите *базис на Бел* е получен чрез унитарната трансформация⁵ $U_{CNOT}(H \otimes I)|q_1 q_2\rangle$. Следователно, еквивалентната на тази трансформация квантова верига от фиг. 2.20, представлява *EPR източник (генератор на Бел)*. Тя съдържа последователно свързани *1-qubit* вентил на Адамар и *2-qubit CNOT* вентил.

Базисът на Бел е множество от четири *2-qubit* квантови състояния⁶, всяко едно от които е *максимално сплетено*

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.2)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.4.3)$$

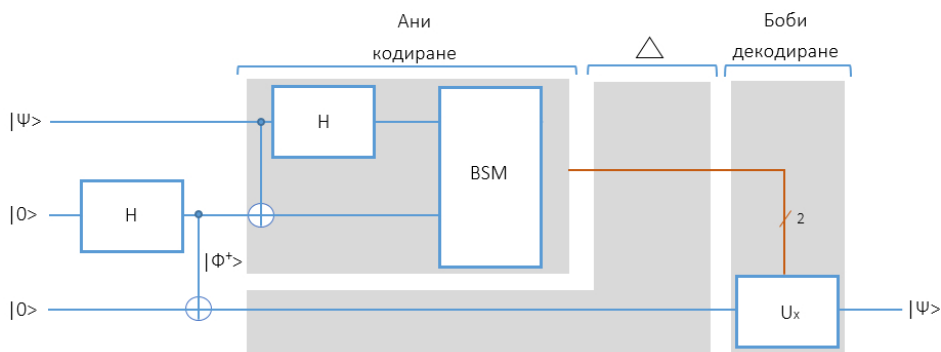
$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.4)$$

Състоянията от *базиса на Бел* се получават като на входа на квантовата верига от фиг. 2.20 се подават съответните *2-qubit* базиси $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ и $|11\rangle$ на входното квантово състояние $|q_1 q_2\rangle$.

След като разполагаме с *EPR източник*, включен в схемата на квантовата телепортация от фиг. 2.19, може да се премине към изясняването на останалите компоненти – кодера *CD* на Ани и декодера *DC* на Боби.

5 Тензорното произведение на (2×2) матрицата на Адамар H и (2×2) единичната матрица I преобразува матрицата на Адамар H от (2×2) в еквивалентна (4×4) матрица, необходима за работа с *2-qubit* състояния.

6 Заради векторното представяне в дясната част на равенствата, *състоянията на Бел* се наричат също и *вектори на Бел*.



Фиг. 2. 21. Еквивалентна квантова верига за телепортация

За целта, на фиг. 2.21 е приведена еквивалентната квантова верига. Последователно, отляво надясно, по посока на предаване на информацията са показани: *EPR източникът* от фиг. 2.20, кодерът *CD* на Ани, пространствената отдалеченост Δ на двете страни и декодерът *DC* на Боби.

На входа на *EPR източника* се подава състоянието, описвано от кет-вектора $|00\rangle$. На изхода му се формира $|\Phi^+\rangle$ - едно от базисните състояния на Бел, отговарящо на *сплетена двойка*.

Единият *q-bit* на сплетената двойка, заедно с входното квантово състояние $|\psi\rangle$, се обработват от кодера на Ани. Този кодер съдържа последователно включени *CNOT* вентил и вентил на Адамар, след което от блока *BSM* се извършва *измервателната процедура на Бел (Bell state measurement)*. На изхода на блока *BSM* се формират два класически коригиращи бита, предавани по обикновен канал към приемащата страна.

В приемащата страна освен двата класически бита, изпращани от Ани, постъпва и вторият *q-bit* на сплетената двойка. Той се подлага на унитарната трансформация U_x . Нейният вид се определя от двата класически бита. В резултат, на изхода на декодера в приемащата част се възстановява точния вид на входното квантово състояние $|\psi\rangle$.

За да се разбере как се формират двата класически бита и как унитарната трансформация U_x в декодера на приемника зависи от тях, се проследяват преобразуванията, на които последователно се подлага входното квантово състояние $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ в кодера *CD* на Ани.

След *EPR* източника, обобщеното 3-qubit квантово състояние има вида

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[a|0\rangle\otimes(|00\rangle + |11\rangle) + b|1\rangle\otimes(|00\rangle + |11\rangle)] = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle).
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

В кодера на Ани постъпват неговите първи два *q-бита*, а в декодера на Боби – третият. Преобразуването на обобщеното 3-qubit квантово състояние $|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle$ в кодера на Ани формално се свежда до две последователни векторни умножения – първо със $(U_{CNOT}\otimes I)$, а след това и със $(H\otimes I\otimes I)$. Тензорните произведения на операторите U_{CNOT} и H са необходими за увеличаване на размерността им до 3-qubit. В резултат се получава

$$\begin{aligned}
 &(H\otimes I\otimes I)(U_{CNOT}\otimes I)(|\psi\rangle\otimes|\Phi^+\rangle) = \\
 &= (H\otimes I\otimes I)(U_{CNOT}\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle) = \\
 &= (H\otimes I\otimes I)\frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|110\rangle + b|101\rangle) = \\
 &= \frac{1}{2}[(a|000\rangle + a|011\rangle + a|100\rangle + a|111\rangle) + (b|010\rangle + b|001\rangle - b|110\rangle - b|101\rangle)] = \\
 &= \frac{1}{2}[a(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle) + b(|010\rangle + |001\rangle - |110\rangle - |101\rangle)] = \\
 &= \frac{1}{2}[|00\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |01\rangle(a|1\rangle + b|0\rangle) + |10\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) + |11\rangle(a|1\rangle - b|0\rangle)].
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Крайният вид на обобщеното 3-qubit квантово състояние и определя възможността да се изпълни поставената задача.

Ани разполага с първите два *q-бита*. При измерването им в блока *BSM* тя ще получи едно от четирите им възможни състояния $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$ с равна вероятност от $\frac{1}{4}$. Едновременно с това, вследствие на сплитането, състоянието на третия *q-бит* също ще се промени, като колапсира в $(a|0\rangle + b|1\rangle)$, $(a|1\rangle + b|0\rangle)$, $(a|0\rangle - b|1\rangle)$ или $(a|1\rangle - b|0\rangle)$, в зависимост от резултата на измерването при Ани.

На този етап, между Ани и Боби не е извършвана никаква комуникация. Промяната на състоянието на третия *q-бит*, с който Боби предварително разполага, се дължи единствено на квантовите

ефекти: *сплитането*; *нелокалната корелация* между сплетените частици; *измерването*. И ако Ани е измерила състояние $|00\rangle$ на своите два q -бита, Боби ще разполага с телепортираната стойност на входното квантово състояние $|\psi\rangle$.

В останалите три случая, телепортираната при Боби стойност се нуждае от *корекция*. Необходимата корекция се определя от измерената от Ани стойност на нейните два q -бита. Ани кодира измерената стойност с два класически бита и ги изпраща по обикновен канал към Боби.

Боби коригира квантовото състояние на третия q -бит чрез съответна унитарна трансформация U_x , определена от комбинацията на двата класически бита:

- при $00 \rightarrow U_x = I$ (не се налага корекция);
- при $01 \rightarrow U_x = X$ (налага се инверсия на квантовото състояние);
- при $10 \rightarrow U_x = Z$ (налага се фазово изместване на квантовото състояние на 180°);
- при $11 \rightarrow U_x = Y = ZX$ (налага се фазово изместване с инверсия).

С получаването на двата класически бита и съответната корекция на грешката в декодера на Боби, квантовото телепортиране завършва.

+++

Предложеният паралелен структурен модел на квантовата телепортация е показан на фиг. 2.22. Включва пет паралелни процеса и три типа канали.

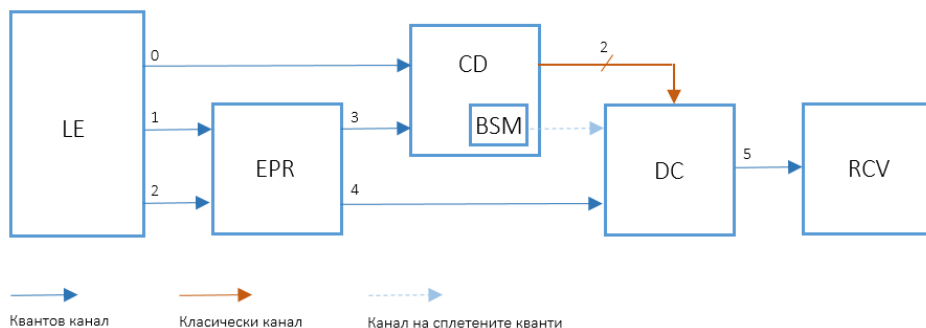
Процесите отговарят на активните елементи от еквивалентната квантова верига.

Светлинният източник LE генерира по изходния си канал 0 фотон с предварително зададено 1 -qubit квантово състояние $|\psi\rangle$. По останалите си два канала генерира базисното квантово състояние $|0\rangle$.

Процесът EPR генерира сплетена двойка като реализира квантовата верига от фиг. 2.20.

Функциите на кодера от страната на Ани се изпълняват от процес CD . Чрез блока BSM за измерване *състоянията на Бел*, кодерът определя двубитовия коригиращ код и го изпраща по класическия канал към приемната страна.

На предния план в приемната страна е разположен декодера DC . След като получи от Ани коригиращите битове по класическия канал, декодерът прилага зададената от тях унитарна трансформация U_x



Фиг. 2. 22. Структурна схема на паралелния модел на квантовата телепортация

върху $1-qubit$ състоянието от квантовия канал с номер 4. Коригираното квантово състояние $|\psi\rangle$ се изпраща по канал 5 към същинския приемник от страната на Боби. На този етап от работата по модела, за поддържане на *сплитането* се предполага използването на специален канал, свързващ двата сплетени квантови бита.

Прототипите на главните функции на процесите имат следните декларации

```
void taskLightEmitter(chanend chanOut1,
                     chanend chanOut2,
                     chanend chanOut3);
void taskEPRSource(chanend chanIn1, chanend chanIn2,
                  chanend chanOut1, chanend chanOut2);
void taskEncoder(chanend chanIn1, chanend chanIn2,
                chanend chanOutClassic2Bits,
                chanend chanOutEntanglement);
void taskDecoder(chanend chanIn,
                chanend chanInClassic2Bits,
                chanend chanOut,
                chanend chanInEntanglement);
void taskReceiver(chanend chanIn);
```

На най-високото йерархично ниво в модела се стартира паралелната композиция на процесите

```
int main(void)
{
    chan chanQuantum[6];
    chan chanClassic2Bits;
    chan chanEntanglement;
```

```

par
{
    // LE
    on stdcore[0]: taskLightEmitter(chanQuantum[0],
                                    chanQuantum[1], chanQuantum[2]);

    // EPR Source
    on stdcore[1]: taskEPRSource(chanQuantum[1],
                                 chanQuantum[2], chanQuantum[3],
                                 chanQuantum[4]);

    // Encoder
    on stdcore[1]: taskEncoder(chanQuantum[0],
                               chanQuantum[3],
                               chanClassic2Bits,
                               chanEntanglement);

    // Decoder
    on stdcore[3]: taskDecoder(chanQuantum[4],
                               chanClassic2Bits,
                               chanQuantum[5], chanEntanglement);

    // Receiver
    on stdcore[3]: taskReceiver(chanQuantum[5]);
}

return 0;
}

```

Квантовите канали се разпределят чрез масива `chanQuantum[]`.

Подобно на модела от т. 2.3 и тук при обработката се използва възможността за допълнително разпаралелване. Освен при функциите за работа с комплексни числа, подобно разпаралелване се прави и в основните процеси.

Например в главната функция на кодера *CD* информацията от двата входни канала се получава едновременно чрез **par** оператора

```

par
{
    chanIn1 :> phIn1;
    chanIn2 :> phIn2;
}

```

Получаването от трите канала на входната информация в главната функция на декодера *DC* също е паралелно


```

par
{
    chanIn :> phIn;
    chanInClassic2Bits :> byteClassic2Bits;
    chanInEntanglement :> q_stateEntanglement;
}

```

Стремежът е в максимална степен да се използва вградения в изпълнителната среда паралелизъм.

Освен вентилът на Адамар, тук се налага да се реализират и други квантови вентили

```

SINGLE_QUBIT gateHadamard(SINGLE_QUBIT src);
SINGLE_QUBIT gateX(SINGLE_QUBIT src);
SINGLE_QUBIT gateZ(SINGLE_QUBIT src);
SINGLE_QUBIT gateCNOT(SINGLE_QUBIT ctrl,
                     SINGLE_QUBIT src);

```

Квантовият инвертор X и дефазиращият вентил Z се изпълняват по схема, която следва тази на Адамар. Единствената разлика е в матричния оператор, който разбира се трябва да отговаря на типа на вентила.

В началото на функцията `gateX()` се обявява операторът

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```

OPERATOR_2x2 X;

// Оператор за инверсия
X.common_factor = 1;
X.m[0][0].r_part = 0;
X.m[0][0].i_part = 0;
X.m[0][1].r_part = 1;
X.m[0][1].i_part = 0;
X.m[1][0].r_part = 1;
X.m[1][0].i_part = 0;
X.m[1][1].r_part = 0;
X.m[1][1].i_part = 0;

```

Докато в началото на функцията `gateZ()` се обявява оператора за фазово дефазиране $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

```

OPERATOR_2x2 Z;

// Оператор за обръщане на фазата на 180 градуса
Z.common_factor = 1;

```

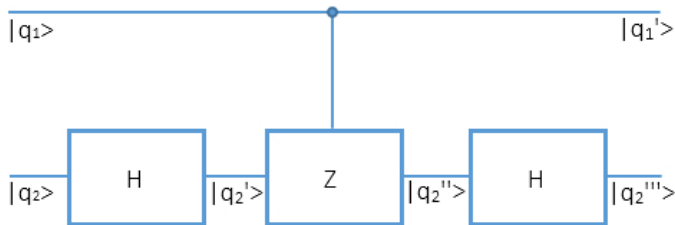
```

Z.m[0][0].r_part = 1;
Z.m[0][0].i_part = 0;
Z.m[0][1].r_part = 0;
Z.m[0][1].i_part = 0;
Z.m[1][0].r_part = 0;
Z.m[1][0].i_part = 0;
Z.m[1][1].r_part = -1;
Z.m[1][1].i_part = 0;

```

Реализацията на вентила *CNOT* е по-особена. Този вентил е *2-qubit* и формалното описание на работата му предполага увеличаване размерността на състоянията. Това може да се направи, но ще доведе до трудности при обратната декомпозиция, която не винаги е възможна.

При вентила *CNOT* на промяна подлежи само целевият му квантов бит $|q_2\rangle$. Като се използва тази негова особеност, тук е направен опит да се работи само с *1-qubit* квантови състояния. Идеята се основава на еквивалентната квантова верига на *CNOT* вентила, съдържаща два вентила на Адамар и един *управляван Z* вентил (фиг. 2.23).



Фиг. 2. 23. Еквивалентна квантова верига на *CNOT* вентил

Управляваният Z вентил (*Controlled-Z gate*) се определя от матрицата

$$U_{cz} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

и подобно на *CNOT* също е *2-qubit*. Увеличаването на размерността обаче може да се избегне, ако еквивалентната верига на целевия квантов бит $|q_2\rangle$ се задейства само ако стойността на управляващия квантов бит $|q_1\rangle$ е $|1\rangle$. Ако стойността на управляващия квантов бит $|q_1\rangle$ е $|0\rangle$, целевият квантов бит $|q_2\rangle$ не се подлага на трансформация.

Ако управляващият квантов бит $|q_1\rangle$ е в суперпозиция, а началната стойност на целевия бит $|q_2\rangle$ - в едно от двете базисни състояния

$|0\rangle$ или $|1\rangle$, изходната стойност на $|q_2\rangle$ също трябва да се установи в суперпозиция, като премине през вентил на Адамар

```
if(getQS(ctrl) == QS_1)
{
    dst = gateHadamard(src);
    dst = gateZ(dst);
    dst = gateHadamard(dst);
}
else if(getQS(ctrl) == QS_S)
{
    if(getQS(src) == QS_0 || getQS(src) == QS_1)
    {
        // Преминава в суперпозиция
        dst = gateHadamard(src);
    }
    else
    {
        // TODO - при dst в суперпозиция
    }
}
```

Процесът *EPR* получава по входните си квантови канали `chanIn1` и `chanIn2` фотоните `phIn1` и `phIn2` в базисното квантово състояние $|0\rangle$. Главната функция `taskEPRSource()` на процеса генерира сплетената двойка фотони `phIn1` и `phIn2`, като директно реализира квантовата верига от фиг. 2.20. Така формираната двойка се изпраща по двата изходни квантови канала `chanOut1` и `chanOut2` на процеса

```
par
{
    chanIn1 :> phIn1;
    chanIn2 :> phIn2;
}

phOut1 = phIn1;
phOut2 = phIn2;

phOut1.q_state = gateHadamard(phIn1.q_state);
phOut2.q_state = gateCNOT(phOut1.q_state,
                           phIn2.q_state);

par
{
    chanOut1 <: phOut1;
    chanOut2 <: phOut2;
}
```

Декодирането, извършвано в главната функция `taskDecoder()` на декодера *DC*, следва описаната по-горе процедура за корекция на квантовото състояние на фотона `phIn`, получен по входния квантов канал. Изходното квантово състояние се формира във фотона `phOut`. Преди корекцията това състояние се установява в стойност, идентична на стойността на другия фотон от сплетената двойка, намиращ се при Ани. Тази стойност се получава по специалния канал `chanInEntanglement` и се записва в `q_stateEntanglement`.

Двата коригиращи бита, изпращани от Ани, се получават по канала `chanInClassic2Bits` и записват в младшите два бита на буфера `byteClassic2Bits`.

```
// Декодиране (корекция на грешката)
phOut = phIn;
phOut.q_state = q_stateEntanglement;
if(byteClassic2Bits & 0x2)
{
    phOut.q_state = gateZ(phOut.q_state);
}
if(byteClassic2Bits & 0x1)
{
    phOut.q_state = gateX(phOut.q_state);
}

chanOut <: phOut;
```

В зависимост от стойността на младшите два бита на буфера `byteClassic2Bits`, квантовото състояние на фотона `phOut` се подлага на корекция. След това, по изходния канал `chanOut` се изпраща към същинския приемник *RCV*.

+++

Моделите, разгледани в т. 2.2 и 2.3 са изцяло завършени. Направено е сравнение на резултатите от изпълнението им с теоретичните и опитните, с което е доказана и тяхната адекватност на моделираните явления и обекти.

Моделът на квантовата телепортация, разгледан в тази точка, обаче е в неговия предварителен вариант. Решени са много въпроси, но остават още важни моменти. Първият е *сплитането*, което като сложно явление изисква допълнителни елементи, неизяснени на този етап от изследванията. Вторият е *процедурата за измерване състоянията на максимално сплитане (Bell state measurement)*,

изпълнена като заглушка в момента.

В реализацията на вентила *CNOT* е направен опит да се работи само с *1-qubit*, за да не се увеличава размерността на представянето. Остава неясно обаче как да се обработва целевия *qubit* $|q_2\rangle$, ако е в суперпозиция. По тези въпроси се планират допълнителни изследвания.

Програмният код на предложението в тази точка предварителен вариант на паралелния структурен модел на квантовата телепортация се съдържа в Приложение П6 (проект *QC-T020*).