ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Άσκηση 1

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

Αρχικά, πρόκειται για ένα στοχαστικό σήμα διακριτού χρόνου και μάλιστα για έναν τετραγωνικό παλμό με πλάτος 1 από n = 0 ως n = 100. Άρα, θα είναι:

$$\mathbf{X(n,\theta) = A(\theta),\ 0 \le n \le 100}$$

Για να υπολογίσουμε την Στοχαστική Μέση Τιμή της διαδικασίας

$$X(n,\theta) = A(\theta)[u(n) - u(n-100)]\ ,\ A(\theta) \sim U(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$

εργαζόμαστε ως εξής:

$\widetilde{X} = E[X(n,\theta)] = E[A(\theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} A f_A(A)\ dA$, όπου $\mathbf{f_A(A)}$ η Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή μας $A(\theta)$. Επειδή στη προκειμένη περίπτωση έχουμε ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ θα έχουμε ότι η σ.π.π. θα ισούται με:

$$\mathbf{f_A(A) = \frac{1}{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})} = 1}$$

Άρα, θα έχουμε ότι:

$$\widetilde{X} = E[X(n,\theta)] = \int_{-1/2}^{1/2} A\ dA \Rightarrow \widetilde{X} = \frac{A^2}{2}\Big|_{A=-1/2}^{A=1/2} \Rightarrow \widetilde{X} = \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{(-\frac{1}{2})^2}{2} \Rightarrow \mathbf{\widetilde{X} = 0}$$

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *rand(·)* της MATLAB δημιουργήστε Κ υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση:

Ο Αριθμητικός Μέσος της στοχαστικής Διαδικασίας θα δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{\overline{X} = \lim_{K\to\infty} \frac{X(n,\theta_1) + X(n,\theta_2) + \cdots + X(n,\theta_k)}{K} = \lim_{K\to\infty} \frac{A + A + \cdots + A}{K} = \lim_{K\to\infty} \frac{KA}{K} = A}$$

Όσο αυξάνεται το πλήθος Κ των υλοποιήσεων θα πρέπει η τιμή του Αριθμητικού Μέσου να συγκλίνει σε μια ντετερμινιστική σταθερά, δηλαδή να προσεγγίσουμε μια θεωρητική τιμή. Επομένως, ο Αριθμητικός Μέσος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

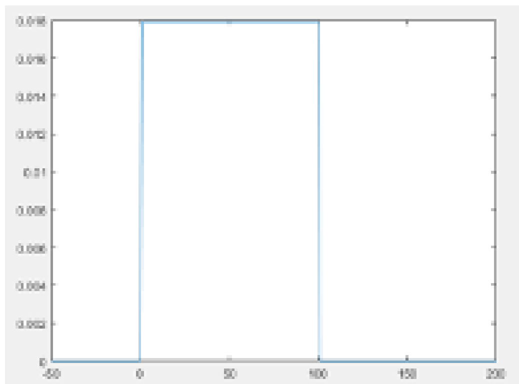
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Στοχαστικού Μέσου Όρου των τυχαίων μεταβλητών $X(n,\theta_1)$, $X(n,\theta_2)$, … $X(n,\theta_k)$, καθώς για αρκούντως μεγάλες τιμές του Κ θα ισχύει:

$$\overline{X} = E[X(n,\theta)] = \widetilde{X}$$

Μέση Υλοποίηση



(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

Απάντηση:

Η Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται ως εξής:

$R_{xx}(n_1, n_2) = E[(X(n_1,\theta) - \tilde{X}(n_1))(X(n_2,\theta) - \widetilde{X}(n_2)] = E[(X(n_1,\theta) - 0)(X(n_1,\theta) - 0] =>$

$R_{xx}(n_1, n_2) = E[X(n_1,\theta)X(n_1,\theta)] = E[A^2] =>$

$R_{xx}(n_1, n_2) = \int_{-1/2}^{1/2} A^2 f_A(A)\, dA = \frac{A^3}{3} \Big|_{A=-1/2}^{A=1/2} = \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{(-\frac{1}{2})^3}{3} =>$

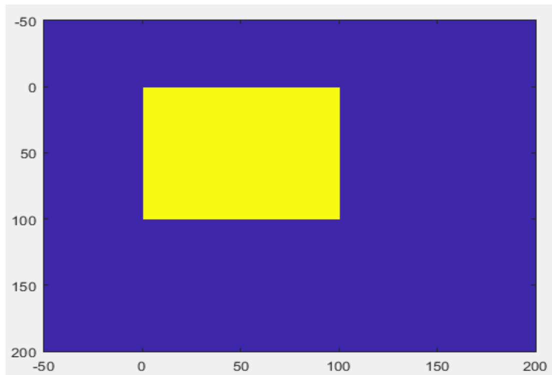
$\mathbf{R_{xx}(n) = \frac{1}{12}}$, $\mathbf{0 \leq n \leq 100}$, αφού είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης



(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Για να είναι η διαδικασία «λευκή» θα πρέπει οι τυχαίες μεταβλητές της να είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους, δηλαδή να ισχύει $\boldsymbol{E[A(\theta_1)A(\theta_2)] = E[A(\theta_1)]E[A(\theta_2)]}$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε όντως ότι $E[A(\theta_1)A(\theta_2)] = E[A(\theta_1)]E[A(\theta_2)] = 0$, οπότε επιβεβαιώνουμε ότι η διαδικασία είναι «λευκή».

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

Απάντηση:

Η Πυκνότητα Φάσματος θα είναι ο **Μετασχηματισμός Fourier** της Ακολουθίας Αυτοσυσχέτισης και θα ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_{xx}(n)e^{-j\omega n}}$$

Επομένως θα έχουμε ότι:

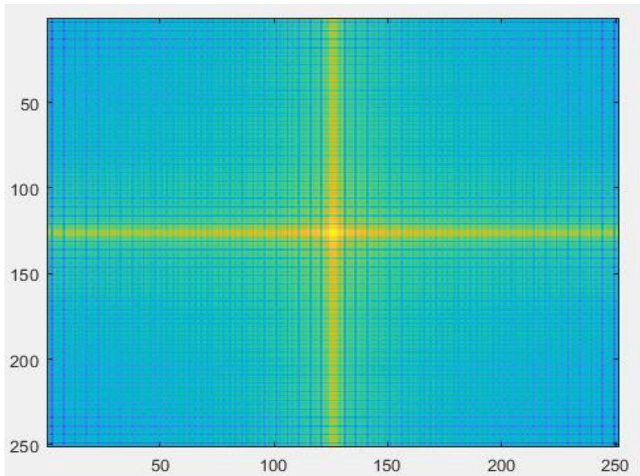
$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_{xx}(n)e^{-j\omega n} \Rightarrow \Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{n=100} R_{xx}(n)e^{-j\omega n} \Rightarrow \Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{n=100} \frac{1}{12} e^{-j\omega n} \Rightarrow$
$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \frac{1}{12}\sum_{n=0}^{n=100} e^{-j\omega n} \Rightarrow \boldsymbol{\underline{\Phi_{xx}} = \frac{1}{12}[1 \ \ e^{-j\omega} \dots \ e^{-j100\omega}]^T}$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Πυκνότητα Φάσματος



Άσκηση 2

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

Η τυχαία μεταβλητή A(θ) ακολουθεί τώρα κατανομή Gauss, δηλαδή A(θ)$\sim N(0,1)$, οπότε θα έχουμε ότι η καινούργια Στοχαστική Μέση Τιμή θα ισούται με:

$$\widetilde{\mathrm{X}} = \boldsymbol{E}[\mathrm{X}(\mathrm{n},\theta)] = \boldsymbol{E}[\mathrm{A}(\theta)] = \mu = 0$$

αφού $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *randn(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση:

Όμοια με πριν ο καινούργιος Αριθμητικός Μέσος της στοχαστικής Διαδικασίας θα δίνεται από τον τύπο:

$$\overline{\mathrm{X}} = \lim_{\mathrm{K}\to\infty} \frac{\mathrm{X}(\mathrm{n},\theta_1) + \mathrm{X}(\mathrm{n},\theta_2) + \cdots + \mathrm{X}(\mathrm{n},\theta_k)}{\mathrm{K}} = \lim_{\mathrm{K}\to\infty} \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A} + \cdots + \mathrm{A}}{\mathrm{K}} = \lim_{\mathrm{K}\to\infty} \frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{K}} = \mathrm{A}$$

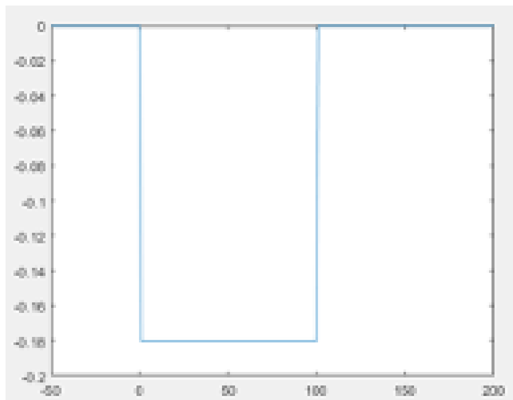
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Όμοια με πριν, όσο αυξάνεται η τιμή του Κ τόσο περισσότερο η τιμή του Στοχαστικού Μέσου πλησιάζει στην τιμή του Αριθμητικού Μέσου.

Μέση Υλοποίηση



(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

Απάντηση:

Η Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται τώρα ως εξής:

$R_{xx}(n_1, n_2) = E[(X(n_1,\theta) - \tilde{X}(n_1))(X(n_2,\theta) - \tilde{X}(n_2)] = E[(X(n_1,\theta) - 0)(X(n_1,\theta) - 0] \Rightarrow$
$R_{xx}(n_1, n_2) = E[X(n_1,\theta)X(n_1,\theta)] = E[A^2] \Rightarrow$

Για $\sigma_A^2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma_A = 1}$ θα ισχύει η σχέση:

$$\sigma_A^2 = E[(A - E[A])^2] \Rightarrow 1 = E[(A - \tilde{X})^2] \Rightarrow \boldsymbol{E[A^2] = 1}$$

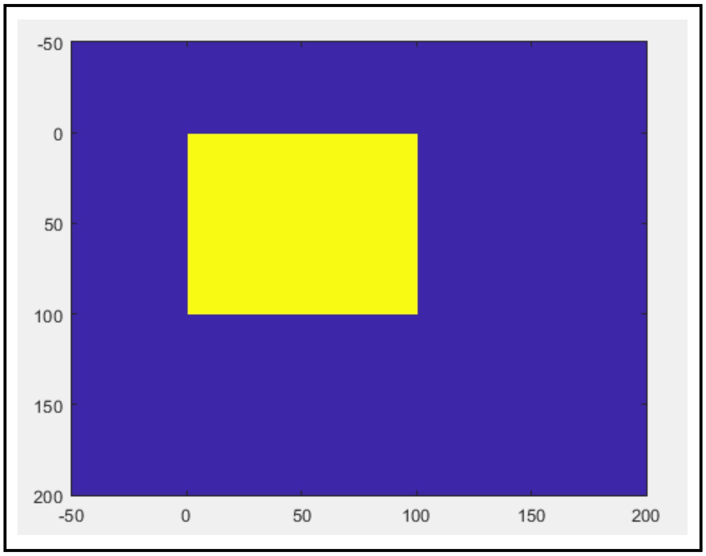
Άρα: $\boldsymbol{R_{xx}(n) = 1,\ 0 \leq n \leq 100}$, αφού είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**



(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Όμοια με πριν επιβεβαιώνουμε ότι η διαδικασία είναι «λευκή», αφού κιόλας ακολουθεί Γκαουσιανή Κατανομή, οπότε πάλι $E[A(\theta_1)A(\theta_2)] = E[A(\theta_1)]E[A(\theta_2)] = \mu = 0$.

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

Απάντηση:

Η Πυκνότητα Φάσματος θα είναι ο **Μετασχηματισμός Fourier** της Ακολουθίας Αυτοσυσχέτισης και θα ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_{xx}(n)e^{-j\omega n}}$$

Επομένως θα έχουμε ότι:

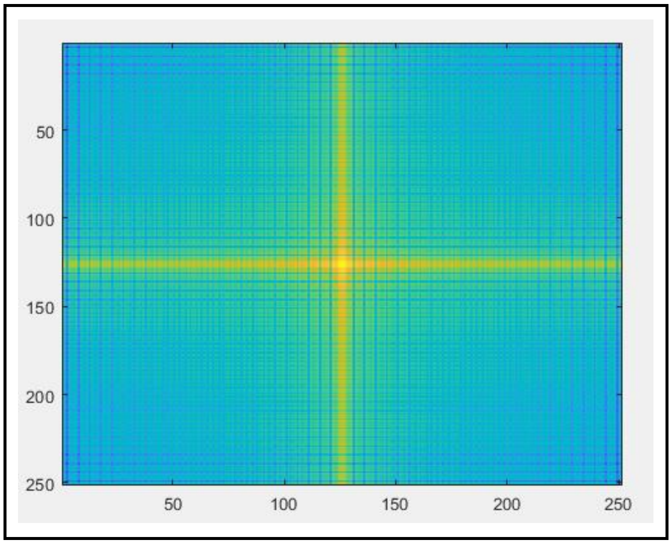
$\Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} R_{xx}(n)e^{-j\omega n} \Rightarrow \Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{n=100} R_{xx}(n)e^{-j\omega n} \Rightarrow \Phi_{xx}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{n=100} e^{-j\omega n} \Rightarrow$
$\boldsymbol{\underline{\Phi_{xx}} = [1 \;\; e^{-j\omega} \ldots . \; e^{-j100\omega}]^{Ta}}$

Πυκνότητα Φάσματος

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

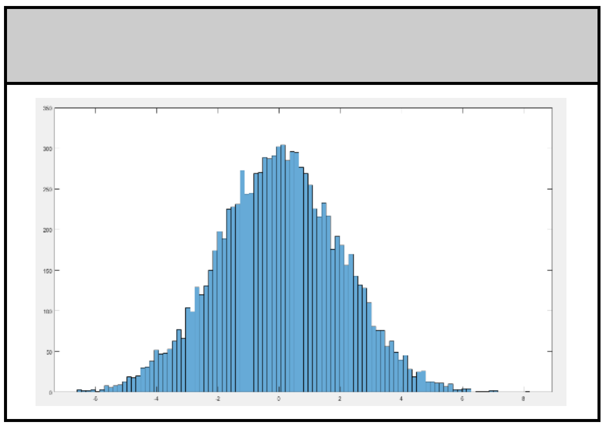
Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Άσκηση 3

(α) Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

Απάντηση:

Παρατηρούμε στη διασπορά του θορύβου ότι ακολουθείται κανονική ή **Γκαουσιανή** κατανομή με μέση τιμή $\mu = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = 1$.



(β) Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Απάντηση:

Όσο η τιμή του Κ αυξάνεται η Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης θα τείνει να προσεγγίσει ακριβώς την ιδανική Πυκνότητα Φάσματος. Αυτό το γεγονός επομένως επιβεβαιώνει και το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα σύμφωνα με το οποίο όσο περισσότερες υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας έχουμε, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια αυτοσυσχέτισης θα έχουμε και άρα η κατανομή των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τείνει σε κανονική.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

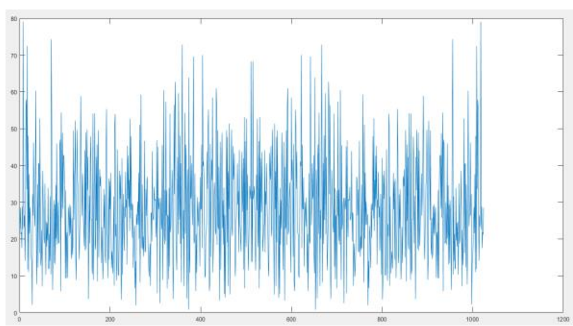
Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Άσκηση 4

(α) Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0 = 0.25$ και τη συνάρτηση *randn(·)*, δημιουργήστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

Απάντηση:

Η Σχέση (2) περιγράφει ένα αυτοπαλινδρομικό φίλτρο, το οποίο χρησιμοποιεί σαν είσοδο τον λευκό γκαουσιανό θόρυβο w[n] και τον χρωματίζει προσθέτοντας στο επόμενο στοιχείο της ακολουθίας v[n] έναν γραμμικό συνδυασμό της τιμής του προηγούμενου στοιχείου v[n – 1] και της τρέχουσας τιμής του λευκού θορύβου.



(β) Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

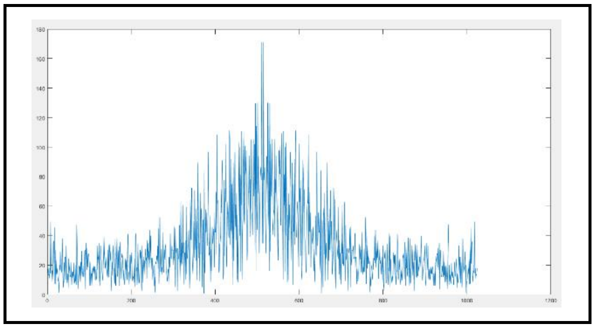
Απάντηση:

Το Σύστημα Λεύκανσης δέχεται ως είσοδο ένα σήμα μολυσμένο με χρωματισμένο θόρυβο v[n] και χρησιμοποιεί ένα Φίλτρο Wiener για να το αποθορυβοποιήσει και να το μετατρέψει ξανά σε σήμα λευκού θορύβου $\widetilde{w}[n]$, το οποίο θα έχει ομοιόμορφη κατανομή των στοιχείων του αφαιρώντας τη συσχέτιση μεταξύ τους.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**



(γ) Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Η πηγή είναι στοχαστική, γιατί στο σήμα που παράγει $s(n) = \sin(\omega_o n + \Phi)$, η $\Phi(\theta)$ είναι τυχαία μεταβλητή που αντιπροσωπεύει τη φάση του σήματος και ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,2π), δηλαδή $\Phi(\theta) \sim U[0, 2\pi)$.

(δ) Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση rand(·), δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματα σας.

Απάντηση:

Αρχικά, υπολογίζουμε τη Στοχαστική Μέση Τιμή του σήματος πηγής:

$$\boldsymbol{E[s(n)] = \tilde{s} = E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = E[\sin(\omega_o n + \Phi)]}$$

Επειδή η τυχαία μεταβλητή Φ(θ) της φάσης του σήματος ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 2π] θα έχει σ.π.π. ίση με $\mathbf{f_\Phi(\Phi) = \frac{1}{2\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}}$ οπότε θα έχουμε:

$E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_o n + \Phi) f_\Phi(\Phi)\, d\Phi \Rightarrow E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = \int_0^{2\pi} \sin(\omega_o n + \Phi) \frac{1}{2\pi}\, d\Phi \Rightarrow$
$E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\omega_o n + \Phi)\, d\Phi \Rightarrow E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(\omega_o n)\cos(\Phi)\, d\Phi +$
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\omega_o n)\sin(\Phi)\, d\Phi \Rightarrow E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = \frac{1}{2\pi}\sin(\omega_o n)\int_0^{2\pi}\cos(\Phi)\, d\Phi +$
$\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_o n)\int_0^{2\pi}\sin(\Phi)\, d\Phi \Rightarrow E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = \frac{1}{2\pi}\sin(\omega_o n)\, \sin(\Phi)\Big|_{\Phi=0}^{\Phi=2\pi} +$
$\frac{1}{2\pi}\cos(\omega_o n)\,(-\cos(\Phi))\Big|_{\Phi=0}^{\Phi=2\pi} \Rightarrow \boldsymbol{E[\sin(\omega_o n + \Phi)] = 0}$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Επομένως, θα έχουμε ότι: ***E*[s(n)] = 0** και άρα η πηγή του σήματος θα είναι ασθενώς 1ης τάξης στάσιμη, αφού ο Στοχαστικός Μέσος είναι σταθερός και ανεξάρτητος από τον χρόνο.

Για να ελέγξουμε την ασθενή στασιμότητα 2ης τάξης πρέπει να ελέγξουμε επίσης την μορφή της Ακολουθίας Αυτοσυσχέτισης, οπότε θα έχουμε:

$R_{xx}(n_1, n_2) = E[(s(n_1,\theta) - \tilde{s})(s(n_2,\theta) - \tilde{s})] = E[(s(n_1,\theta) - 0)(s(n_2,\theta) - 0)] =>$
$R_{xx}(n_1, n_2) = E[s(n_1,\theta)s(n_2,\theta)] = E[\sin(\omega_o n_1 + \Phi)\sin(\omega_o n_2 + \Phi)] =>$
$R_{xx}(n_1, n_2) = E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 - n_2))] - E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)] =>$
$R_{xx}(n_1, n_2) = \frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 - n_2)) - E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)]$

Υπολογίζουμε τον όρο $E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)]$ ως εξής:

$E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)] = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)f_\Phi(\Phi)\,d\Phi =$
$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_o(n_1 + n_2)\cos(2\Phi)f_\Phi(\Phi)\,d\Phi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(\omega_o(n_1 + n_2)\sin(2\Phi)f_\Phi(\Phi)\,d\Phi =>$
$E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(\omega_o(n_1 + n_2)\cos(2\Phi)\frac{1}{2\pi}\,d\Phi -$
$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(\omega o(n1 + n2)\sin(2\Phi)\frac{1}{2\pi}\,d\Phi = \frac{1}{4\pi}\cos(\omega_o(n_1 + n_2)\int_0^{2\pi}\cos(2\Phi)\,d\Phi -$
$\frac{1}{4\pi}\sin(\omega_o(n_1 + n_2)\int_0^{2\pi}\sin(2\Phi)\,d\Phi = \frac{1}{4\pi}\cos(\omega_o(n_1 + n_2)\frac{1}{2}\sin(2\Phi)\Big|_{\Phi=0}^{\Phi=2\pi} -$
$\frac{1}{4\pi}\sin(\omega_o(n_1 + n_2)\frac{1}{2}(-\cos(2\Phi))\Big|_{\Phi=0}^{\Phi=2\pi} =>$ $\boldsymbol{E[\frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 + n_2) + 2\Phi)] = 0}$

Συνεπώς, η Ακολουθία Αυτοσυσχέτισης θα ισούται με:

$$\boldsymbol{R_{xx}(n_1, n_2) = \frac{1}{2}\cos(\omega_o(n_1 - n_2))}$$

Παρατηρούμε δε ότι εξαρτάται μόνον από την διαφορά δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών, οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η στοχαστική πηγή σήματος είναι τελικά **ασθενώς 2ης τάξης στάσιμη**.

(ε) Εκφράστε την έξοδο του FIR φίλτρου Wiener μήκους Μ συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Απάντηση:

Η έξοδος του αιτιατού Φίλτρου Wiener μήκους Μ θα δίνεται από την σχέση:

$\tilde{w}(\theta) = h_n * v_n(\theta) = \sum_{k=0}^{k=M-1} h_k v_{n-k}(\theta) = \underline{\mathbf{h_M}}^T \underline{\mathbf{v_n}}(\boldsymbol{\theta})$, όπου: $\underline{\mathbf{h_M}}^T = [h_0\ h_1\ \dots\ h_{M-1}]^T$

$$\underline{\mathbf{v_n}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} v_{n-1}(\theta) \\ v_{n-2}(\theta) \\ \dots \\ v_{n-M+1}(\theta) \end{bmatrix}$$

(στ) Σχεδιάστε το βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Απάντηση:

(ζ) Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

M = 3	M =4	M = 5	M = 6

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ