ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Άσκηση 1

(α) Τι παρατηρείτε εάν αντί για *Ts*=0.02s ή 0.04s θέσετε *Ts*=0.1s ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Παρατηρούμε πως για μεγάλη περίοδο δειγματοληψίας T_s, τα δείγματα του αρχικού σήματος συνεχούς χρόνου που θα συλλέξουμε θα είναι λιγότερα σε πλήθος και θα κατανέμονται πιο αραιά πάνω στον οριζόντιο άξονα. Επομένως, θα έχουμε σημαντική απώλεια πληροφορίας για το αρχικό σήμα. Αντίθετα, για μικρότερες περιόδους δειγματοληψίας, όπως 0.02 s ή 0.04 s, τα συλλεγόμενα δείγματα θα είναι σαφώς πιο πολλά και κατανεμημένα με μεγαλύτερη πυκνότητα.

(β) Πώς επηρεάζει η συχνότητα δειγματοληψίας την ποιότητα ανακατασκευής του σήματος; Για κάθε συνάρτηση ανακατασκευής χρησιμοποιήστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, ανάμεσα στο αρχικό και το ανακατασκευασμένο σήμα, και την τυπική απόκλιση, ως μετρικές ποιότητας ανακατασκευής (δείτε στο m-file που σας δίνεται για τον ορισμό τους).

Απάντηση:

Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται η συχνότητα δειγματοληψίας f_s του σήματος εισόδου (δηλαδή η T_s μειώνεται), τόσο πιο ποιοτική θα είναι και η ανακατασκευή του. Πιο συγκεκριμένα, με μεγάλη συχνότητα δειγματοληψίας θα επιτύχουμε τη συλλογή πολλών τιμών του αναλογικού σήματος και συνεπώς ελαχιστοποίηση του σφάλματος στο ανακατασκευασμένο σήμα, μιας και η απόσταση του επόμενου δείγματος από το προηγούμενο στον οριζόντιο άξονα θα τείνει στο μηδέν. Αυτό το συμπέρασμα επιβεβαιώνεται και μέσω των μετρικών του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος και της Τυπικής Απόκλισης, όπως φαίνεται και στο πίνακα πιο κάτω, καθώς πράγματι σφάλμα & απόκλιση προσεγγίζουν ικανοποιητικά το μηδέν για πολύ μεγάλες τιμές της συχνότητας f_s.

Για κάθε μία από τις συναρτήσεις ανακατασκευής του αρχικού σήματος θα έχουμε:
– **sinc**: αξιοποιεί ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο και γι' αυτό το λόγο προτιμάται για ιδανική ανακατασκευή ημιτονοειδών σημάτων με περιορισμένη συχνοτική ζώνη,
– **τετραγωνικό / τριγωνικό παράθυρο**: αξιοποιούν FIR φίλτρο και δεν παρέχουν έτσι την ίδια ακρίβεια ανακατασκευής.

T_s	MSE_1, STD_1	MSE_2, STD_2	MSE_3, STD_3
0.02s	0.0001, 0.0111	0.0006, 0.0253	0.0165, 0.1285
0.04s	0.0008, 0.0288	0.0097, 0.0985	0.0646, 0.2543
0.1s	0.4995, 0.7071	0.4995, 0.7071	0.4995, 0.7071

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

(γ) Σχολιάστε τον ρόλο της αρχικής φάσης του σήματος.

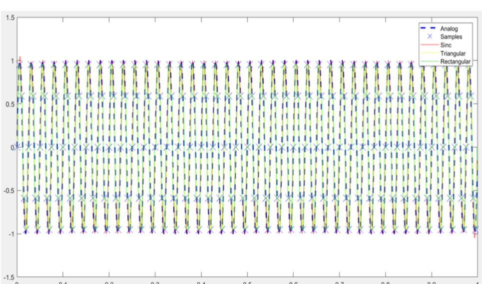
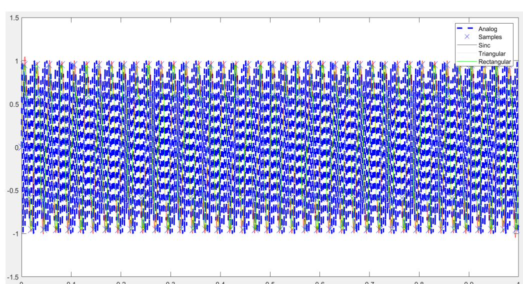
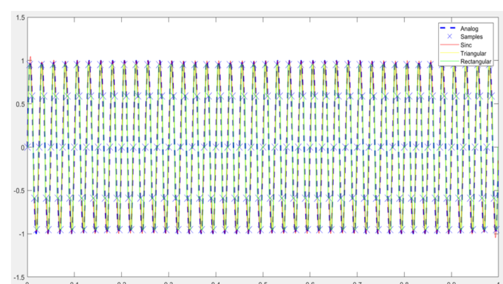
Απάντηση:

Η αρχική φάση ενός σήματος γενικά επιφέρει μετατόπιση της κυματομορφής του στον οριζόντιο άξονα. Όσον αφορά τη διαδικασία της δειγματοληψίας, η αρχική φάση **π/4** μετατοπίζει το σημείο έναρξης της δειγματοληψίας και επηρεάζει έτσι το σχετικό χρονισμό των τιμών που συλλέγουμε προκαλώντας παραμόρφωση. Τέλος, αν στη διαδικασία της ανακατασκευής δεν λάβουμε υπόψη την αρχική φάση ενδέχεται να προκληθεί σφάλμα στην ακρίβεια του ανακατασκευασμένου σήματος, καθώς δεν θα ταιριάζει απόλυτα με το αρχικό. Αυτό επιβεβαιώνεται πάλι χρησιμοποιώντας τις δύο μετρικές σφάλματος, οι οποίες βλέπουμε ότι έχουν αυξηθεί σημαντικά συγκριτικά με το προηγούμενο ερώτημα όπου η αρχική φάση ήταν **0**.

T_s	MSE_1, STD_1	MSE_2, STD_2	MSE_3, STD_3
0.1s	0.2943, 0.5413	0.2611, 0.5113	0.3531, 0.5945

(δ) Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα με τα δικά σας γραφήματα.

Απάντηση:

$f_0 = 40Hz$	$f_0 = 240Hz$	$f_0 = 4040Hz$
		

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Ερώτηση 5 (δ συνέχεια) Τι παρατηρείτε στις παραπάνω γραφικές παραστάσεις σας; Ποια η συχνότητα των ανακατασκευασμένων σημάτων; Εξηγήστε.

Απάντηση:

Στο συγκεκριμένο ερώτημα αξιοποιούμε το Θεώρημα των **Nyquist – Shannon** για τη Δειγματοληψία, προκειμένου να προβλέψουμε ποιες συχνότητες δειγματοληψίας θα μας δώσουν ως αποτέλεσμα ένα πλήρως ανακατασκευασμένο σήμα χωρίς να παρατηρείται το Φαινόμενο της Αναδίπλωσης. Σύμφωνα με το θεώρημα, η συχνότητα δειγματοληψίας οφείλει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το διπλάσιο της μέγιστης συχνότητας του δειγματοληπτούμενου σήματος, δηλαδή $f_s \geq 2 * f_o$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση για περίοδο T_s = 0.005 s ή αντίστοιχα συχνότητα f_s = 200 Hz θα έχουμε:

$$200 \geq 2 * f_o \Rightarrow f_o \leq \mathbf{100\ Hz}$$

Άρα, η συχνότητα του σήματός μας δεν πρέπει να ξεπερνάει τα 100 Hz. Αυτό βλέπουμε ότι αληθεύει μόνο για την πρώτη περίπτωση, όπου f_o = 40 Hz, ενώ στις άλλες δύο περιπτώσεις δεν ισχύει. Για αυτές λοιπόν τις περιπτώσεις, η συχνότητα της αναδίπλωσης (f_{alias}) που προκύπτει θα δίνεται ως εξής:

– f_o = 240 Hz: $f_{alias} = |\mathbf{1}*200 - 240| = |200 - 240| = 40$ Hz
– f_o = 4040 Hz: $f_{alias} = |\mathbf{20}*200 - 4040| = |4000 - 4040| = 40$ Hz

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Άσκηση 2

(α) Αιτιολογήστε αν το σύστημα είναι αιτιατό ή όχι.

Απάντηση:

Το σύστημα είναι **αιτιατό**, καθώς η έξοδος **y[n]** τη χρονική στιγμή **n** εξαρτάται από την τρέχουσα τιμή της εισόδου (**x[n]**) αλλά και από τη τιμή της εισόδου σε προγενέστερες χρονικές στιγμές(**x[n – 1]** και **x[n – 2]**). Άρα, η έξοδος ΔΕΝ εξαρτάται από μελλοντικές τιμές του σήματος εισόδου.

(β.1) Υπολογίστε κρουστική απόκριση του συστήματος (μόνο θεωρητικά).

Απάντηση:

Η κρουστική απόκριση του συστήματος θα δίνεται από την σχέση:

$$h[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k) * \delta(n-k) \Rightarrow$$

$$\mathbf{h[n] = 1/2*\delta[n]+\delta[n-1]-1/2*\delta[n-2]}$$

Ακόμη, οι συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης μπορούν να δώσουν τη κρουστική απόκριση του συστήματος και σε μορφή διανύσματος:

$$\underline{\mathbf{h}} = [1/2 \quad 1 \quad -1/2]^T$$

(β.2) Σχεδιάστε το μέτρο και τη φάση της απόκρισης συχνότητας θεωρητικά και χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *freqz( )* της Matlab).

Απάντηση:

Η απόκριση συχνότητας του συστήματος υπολογίζεται εύκολα εφαρμόζοντας τον **Μετασχηματισμό Fourier Διακριτού Χρόνου** (**DTFT**) πάνω στην εξίσωση που περιγράφει την κρουστική απόκριση:

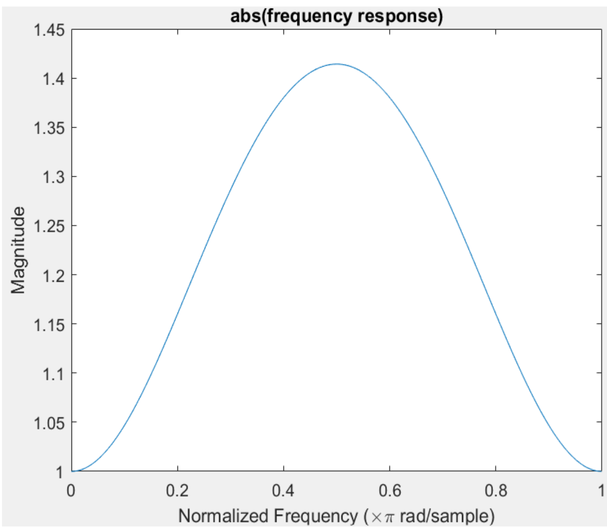
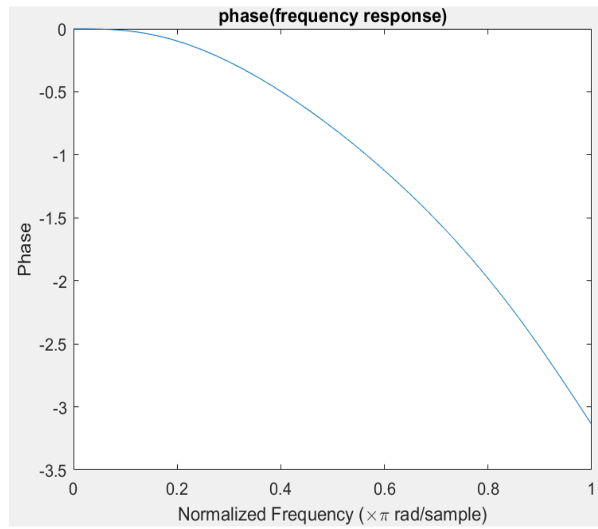
$h[n] = 1/2*\delta[n]+\delta[n-1]-1/2*\delta[n-2] \Rightarrow \mathcal{F}\{h[n]\} = \mathcal{F}\{1/2*\delta[n]+\delta[n-1]-1/2*\delta[n-2]\} \Rightarrow$
$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{1/2*\delta[n]\}+\mathcal{F}\{\delta[n-1]\}+\mathcal{F}\{-1/2*\delta[n-2]\} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1/2*\mathcal{F}\{\delta[n]\}+\mathcal{F}\{\delta[n-1]\}$
$-1/2*\mathcal{F}\{\delta[n-2]\} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1/2+e^{-j\omega}-1/2*e^{-2j\omega} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1/2*e^{-j\omega}(e^{j\omega}+2-e^{-j\omega}) \Rightarrow$
$H(e^{j\omega}) = 1/2*e^{-j\omega}(2+2\cos\omega) \Rightarrow \mathbf{H(e^{j\omega}) = (1+\cos\omega)*e^{-j\omega}}$

Άρα, η απόκριση μέτρου θα είναι: $|\mathbf{H(e^{j\omega})}| = \mathbf{1+\cos\omega}$
Η απόκριση φάσης θα είναι: $\angle\mathbf{H(e^{j\omega}) = -\omega}$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Μέτρο απόκρισης συχνότητας	**Φάση απόκρισης συχνότητας**
	

(γ) Ποιες συχνότητες του σήματος εισόδου διατηρεί το παραπάνω σύστημα;

Απάντηση:

Το σύστημα υλοποιεί τη λειτουργία ενός **ζωνοπερατού φίλτρου**, δηλαδή επιτρέπει τη διέλευση του σήματος εισόδου μόνο για τιμές που ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο συχνοτικό φάσμα (bandwidth). Το εύρος ζώνης **$[\omega_1, \omega_2]$** που θα διατηρεί το σήμα θα δίνεται από τους πόλους της συνάρτησης απόκρισης συχνότητας και θα είναι η απόσταση ανάμεσά τους. Οι πόλοι ονομάζονται επίσης και σημεία αποκοπής.

(δ) Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις *conv()* και *filter()*, υπολογίστε και σχεδιάστε την έξοδο του συστήματος για την είσοδο $x[n]$ (μόνο για τα πρώτα 100 δείγματα). Ποιες οι διαφορές;

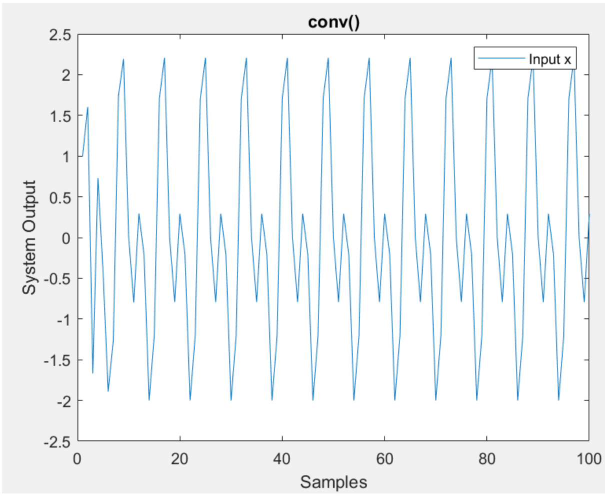
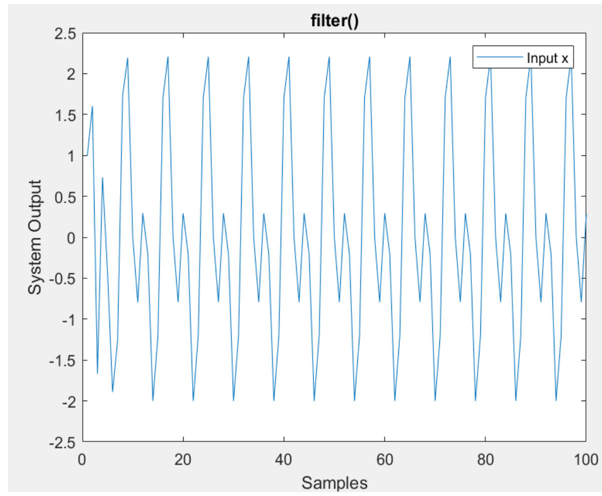
Απάντηση:

Παρατηρούμε ότι και για τις δύο συναρτήσεις θα έχουμε την ίδια κυματομορφή για το σήμα εξόδου και αυτό θα οφείλεται στο γεγονός ότι αξιοποιούμε πολύ μικρό αριθμό δειγμάτων (100) για το ίδιο σήμα εισόδου. Η συνάρτηση ***conv( )*** θα εφαρμόζει τον τελεστή της γραμμικής συνέλιξης($*$) πάνω στα δύο σήματα εισόδου, ενώ η συνάρτηση ***filter( )*** θα εφαρμόσει ένα ψηφιακό φίλτρο πάνω στο σήμα εισόδου.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

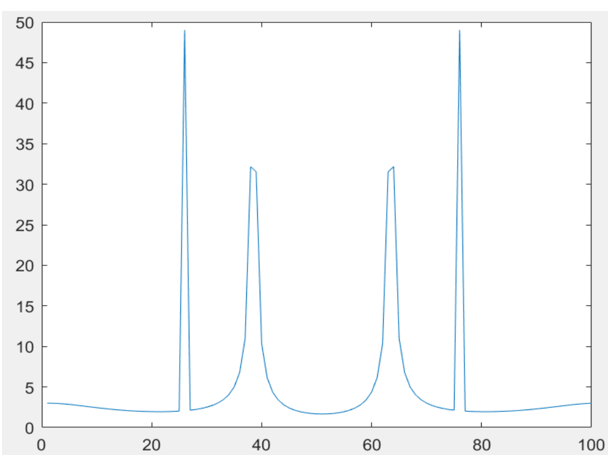
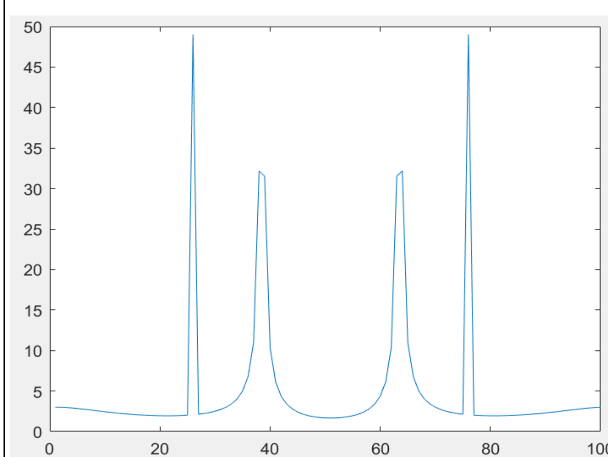
Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Έξοδος για *conv( )*	**Έξοδος για *filter( )***
	

(ε) Σχεδιάστε το abs(fftshift(fft(x))) και abs(fftshift(fft(y))).

Απάντηση:

$\|DFT\{x\}\|$	$\|DFT\{y\}\|$
	

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

(στ)

Μήκος σήματος	Μέσος χρόνος	Μήκος σήματος	Μέσος χρόνος
2^6	0.011200	2^6-1	0.010272
2^7	0.032158	2^7-1	0.011519
2^8	0.108719	2^8-1	0.015302
2^9	0.073042	2^9-1	0.023492
2^{10}	0.170972	2^{10}-1	0.052097
2^{11}	1.105988	2^{11}-1	0.080553
2^{12}	1.878557	2^{12}-1	0.150098
2^{13}	3.726932	2^{13}-1	0.284369
2^{14}	6.914686	2^{14}-1	0.624503
2^{15}	14.547731	2^{15}-1	1.234519

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Άσκηση 1:

```
% Ts: sampling rate
% f0: frequency of signal in Hz
% initial_phase: initial phase of signal
%=========================================================================%
% clear
% clc
% close all
%=========================================================================%
Ts = 0.005;
f0 = 4040;
initial_phase = 0;
n = 0:1/Ts; %discrete samples
%x = sin(2*pi*f0*n*Ts+initial_phase);
x = sin(2*pi*f0*n*Ts+initial_phase);
%plot(n,x)
dt = 0.001;
t = 0:dt:1; %continuous time
x_cont=sin(2*pi*f0*t'+initial_phase);
% Initialize Arrays
sinc_array = zeros(length(t),length(n));
triangular_array = sinc_array;
rec_array = sinc_array;
% indx:(t/Ts-n)
indx = t'*ones(1,length(n))/Ts-ones(length(t),1)*n;
% Sinc
sinc_array = sinc(indx);
% Triangular
triangular_array(abs(indx)>1)=0; %x in [-1, 1], so delete the rest
triangular_array(abs(indx)<1) = 1 - abs(indx(abs(indx)<1));
% Rectangular
```

```
rec_array(abs(indx)<1/2) = 1;
rec_array(indx ==1/2) = 1;
rec_array(abs(indx)>1/2) = 0;
% Reconstructed Signals
x_analog1 = sum((ones(length(t),1)*x).*sinc_array,2); % Sinc Reconstruction
x_analog2 = sum((ones(length(t),1)*x).*triangular_array,2); %Triangular
Reconstruction
x_analog3 = sum((ones(length(t),1)*x).*rec_array,2); % Rectangular
Reconstruction
% Residual Signals
r1=x_cont-x_analog1;
r2=x_cont-x_analog2;
r3=x_cont-x_analog3;
% Plot Reconstructed Signals
figure;
plot(t(1:1000),x_cont(1:1000),'b--','LineWidth',2) % Plot original analog
signal
hold on
plot(n(1:dt/Ts*1000)*Ts,x(1:dt/Ts*1000),'bx','MarkerSize',14) % Plot Sample
Points
plot(t(1:1000),x_analog1(1:1000),'r') % Plot sinc reconsruction
plot(t(1:1000),x_analog2(1:1000),'y') % Plot triangular reconstruction
plot(t(1:1000),x_analog3(1:1000),'g') % Plot rectangular reconsturction
hold off
legend('Analog','Samples','Sinc','Triangular','Rectangular')
% Plot Error of Reconstruction
figure
hold on
plot(t(1:100),sin(10*pi*t(1:100)')-x_analog1(1:100)) % Plot sinc Error
plot(t(1:100),sin(10*pi*t(1:100)')-x_analog2(1:100)) % Plot triangular Error
plot(t(1:100),sin(10*pi*t(1:100)')-x_analog3(1:100)) % Plot rectangular Error
hold off
legend('Sinc','Triangular','Rectangular')
% Plot of Distributions of residuals
figure
hist(r1,200) % Histogram of r1
legend('Sinc Residual')
figure
hist(r2,200) % Histogram of r2
legend('Triangular Residual')
figure
hist(r3,200) % Histogram of r3
legend('Rectangular Residual')
MSE = [mean(r1.^2) mean(r2.^2) mean(r3.^2) ]
STD = [std(r1) std(r2) std(r3) ]
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

Άσκηση 2:

```
% impulse response
h = [1/2, 1, -1/2];
% 1000 samples
[H, w] = freqz(h, 1, 1000);
% normalized plot of abs
figure (1);
plot(w/pi, abs(H))
title('abs(frequency response)')
xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)')
ylabel('Magnitude')
% normalized plot of phase
figure (2);
plot(w/pi, angle(H))
title('phase(frequency response)')
xlabel('Normalized Frequency (\times\pi rad/sample)')
ylabel('Phase')
hold off
n = 0:16000;
x = cos((pi/4)*n)-sin((pi/2)*n)+(-1/2).^n;
y1 = filter(h, 1, x);
y2 = conv(h, x);
hold on
figure (3);
plot(y1(1:100))
title('filter()')
xlabel('Samples')
ylabel('System Output')
legend ('Input x','filter()')
hold off
hold on
figure (4);
plot( y2(1:100))
title('conv()')
xlabel('Samples')
ylabel('System Output')
legend ('Input x','conv()')
hold off
hold on
figure (5);
a1 = abs(fftshift(fft(x(1:100))));
plot(a1)
hold off
hold on
figure (6);
a2 = abs(fftshift(fft(y1(1:100))));
plot(a2)
hold off
length = 2^15-1;
n = 0:length;
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο πρώτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	**Μηλτιάδης Μαντές**	ΑΜ:	**1084661**	Έτος:	**3ο**

```
x = cos((pi/4)*n) - sin((pi/2)*n) + (-1/2).^n;
tic
for c = 1:10000
fft(x);
end
toc
```