



# **Cálculo de integrais com Monte Carlo e geradores Quasi-Aleatórios**

Laboratório de Computação e Simulação  
(MAP2212)

Alunos:	<b>Lucka de Godoy Gianvechio e Milton Leal Neto</b>
Curso:	Bacharelado de Matemática Aplicada Computacional
NUSP:	11352442 e 8973974
Professor:	Julio Stern

São Paulo, 26 de maio de 2021

# Conteúdo

1	Apresentação	1
2	Planejamento do experimento	2
3	Estrutura do programa	2
4	Conclusão	3
5	Referências	8

# 1 Apresentação

Este relatório apresenta uma solução para o terceiro Exercício Programa (EP) proposto pelo professor Julio Stern no âmbito da disciplina de Laboratório de Computação e Simulação (MAP 2212) do Bacharelado de Matemática Aplicada Computacional (BMAC) do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP).

O objetivo do EP é utilizar métodos estocásticos de Monte Carlo para calcular o valor de uma integral definida de Riemann. Diferentemente do EP anterior, neste pede-se que utilizemos um gerador de números quasi-aleatórios no lugar do gerador pseudo-aleatório e que façamos uma análise empírica dos resultados desta substituição.

Os métodos de Monte Carlo utilizados para o cálculo da integral são os mesmos do EP anterior:

1. Crude
2. Hit or Miss
3. Importance Sampling
4. Control Variate

A integral cujo valor será estimado é:

$$\gamma = \int_0^1 e^{-0.508662102x} \cos(0.43898402827x) dx$$

O enunciado do EP exige que façamos a substituição do gerador de números aleatórios e que analisemos quão mais ou menos rápida deu-se a velocidade de convergência em direção ao valor real da integral nos quatro métodos supracitados.

A título de registro, nos foi solicitado que escolhêssemos apenas uma versão do segundo Exercício Programa realizado anteriormente para a confecção deste experimento. Neste relatório, apresentamos os resultados relativos ao Exercício Programa 2 do aluno Lucka de Godoy Gianvechio.

## 2 Planejamento do experimento

Considerando que as teorias da estatística e probabilidade não se aplicam aos geradores de números quasi-aleatórios, não nos foi possível encontrar um critério de parada baseado em estatística oriunda dos valores amostrados.

Por isso, a estratégia adotada foi considerar os valores de  $n_{final}$ , ou seja, o tamanho das amostras, obtidos no EP 2 para a realização do experimento com os geradores quasi-aleatórios.

Dessa forma, optou-se por iterar sobre cada valor de  $n$  para observarmos como o resultado da integral comportaria-se quando avaliado em valores quasi-aleatórios. Esta iteração foi feita em um espaço logarítmico devido ao tamanho das amostras de alguns dos métodos de Monte Carlo utilizados.

Além disso, também calculamos a estimativa do valor da integral com base no  $n_{final}$ .

Vale ainda dizer que para efeitos de comparação fizemos o experimento utilizando duas sequências distintas de números quasi-aleatórios: Halton e Sobol. Deixamos para um futuro trabalho as discussões sobre as medidas de discrepância de ambas as sequências.

## 3 Estrutura do programa

O programa escrito em *Python* está estruturado em dois grandes blocos:

1) Cálculo das estimativas da integral:

Neste bloco, apresentamos um conjunto de cinco funções que realiza o cálculo da estimativa da integral tanto pelo método que utiliza números pseudo-aleatórios quanto pelos métodos que utilizam as sequências quasi-aleatórias de Halton e Sobol.

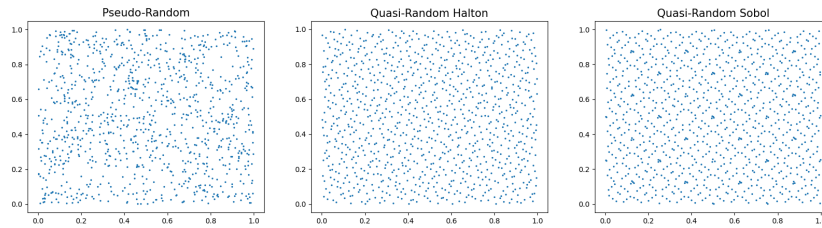
2) Plotagem dos gráficos:

Neste bloco, temos uma conjunto de sete funções que calcula as estimativas da integral sobre um espaço logarítmico e plota os resultados em gráficos separados. Além disso, também plotamos um exemplo da distribuição dos números pseudo e quasi-aleatórios sobre o quadrado de lado 1.

## 4 Conclusão

De maneira geral, os resultados da simulação via métodos de Monte Carlo com geradores quasi-aleatórios mostram superioridade das sequências de Halton e Sobol em relação às sequências pseudo-aleatórias. Como veremos a seguir, a velocidade de convergência da estimativa do valor da integral cresceu consideravelmente.

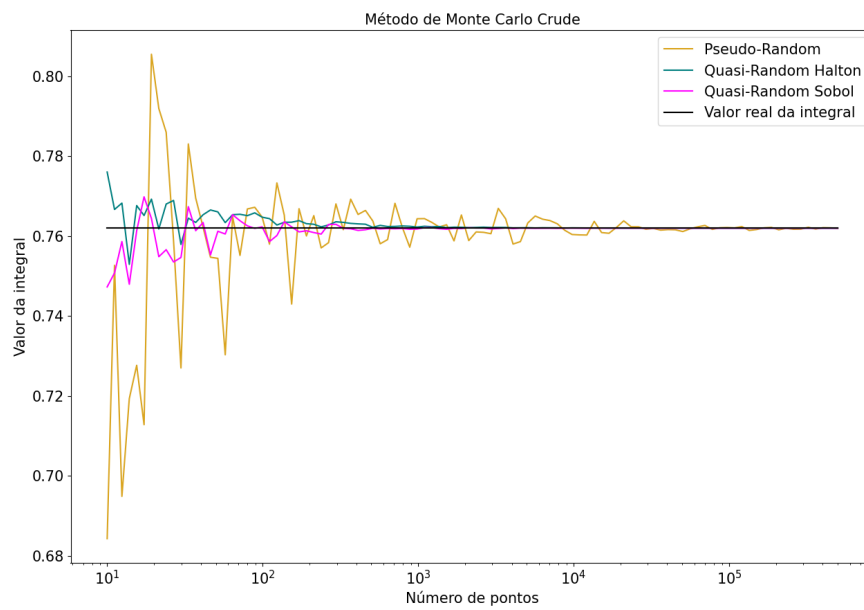
Antes de mostrarmos os resultados, vale aqui apresentar uma representação gráfica da geração de pontos pseudo e quasi aleatórios no plano. Observamos, como era de se esperar, uma grande uniformidade nos pontos das sequências Halton e Sobol.



Analisemos a seguir os resultados de convergência para cada um dos métodos.

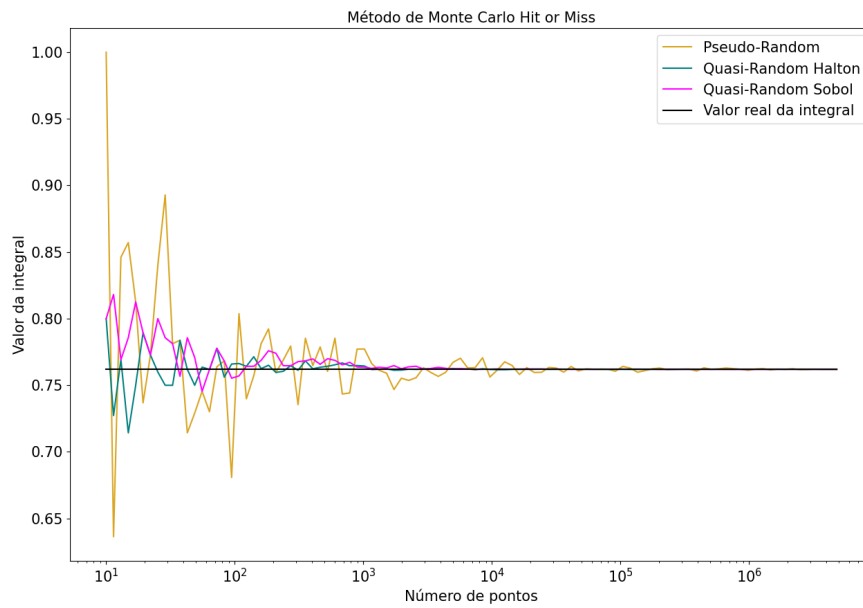
### 1) Crude

No EP2, o método Crude precisou de um  $n_{final} = 467811$  para obtermos a acurácia pedida. No gráfico abaixo, podemos inferir visualmente que as curvas das sequências de Halton e Sobol aproximam-se da reta que marca o valor real da integral em torno de  $n = 1000$ , o que confere uma superioridade da ordem de  $10^2$  para os geradores quasi-aleatórios.



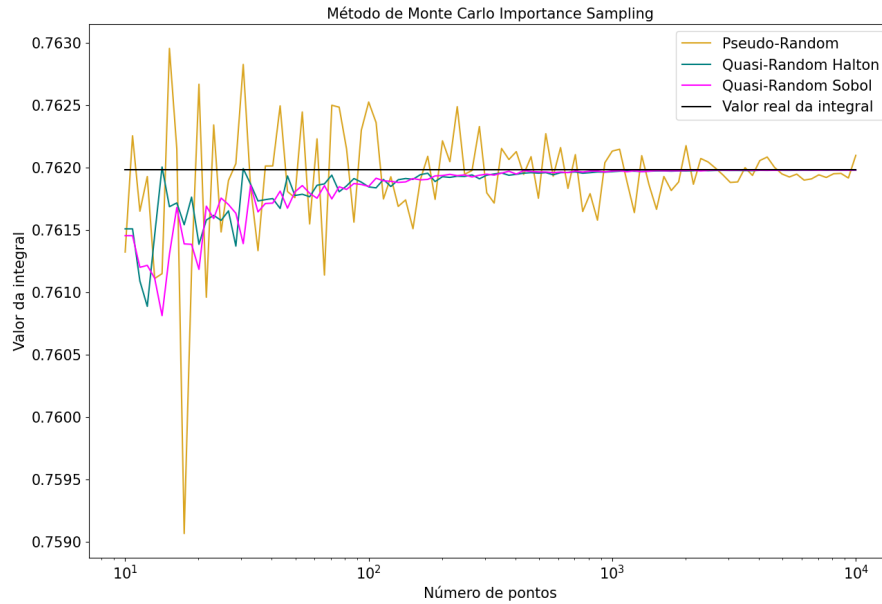
## 2) Hit or Miss

No EP2, o método Crude precisou de um  $n_{final} = 4830000$  para obtermos a acurácia pedida. No gráfico abaixo, podemos inferir visualmente que as curvas das sequências de Halton e Sobol aproximam-se da reta que marca o valor real da integral em torno de  $n = 5000$ , o que confere uma superioridade da ordem de  $10^3$  para os geradores quasi-aleatórios.



### 3) Importance Sampling

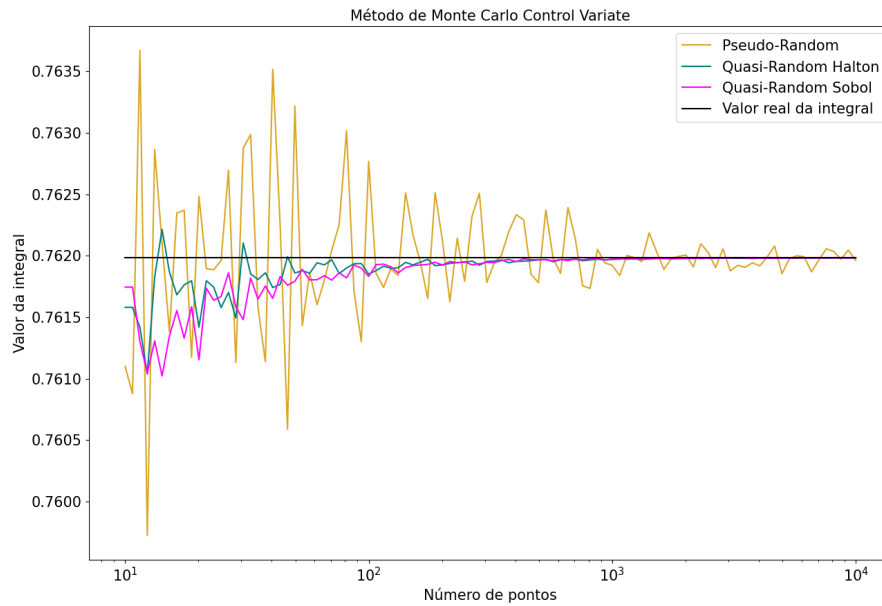
No EP2, o método Crude precisou de um  $n_{final} = 555$  para obtermos a acurácia pedida. No gráfico abaixo, podemos inferir visualmente que as curvas das sequências de Halton e Sobol aproximam-se da reta que marca o valor real da integral, considerando a acurácia de 0.0005 pedida, em torno de  $n = 50$ , o que confere uma superioridade da ordem de  $10^1$  para os geradores quasi-aleatórios neste método.





#### 4) Control Variate

No EP2, o método Crude precisou de um  $n_{final} = 552$  para obtermos a acurácia pedida. No gráfico abaixo, podemos inferir visualmente que as curvas das sequências de Halton e Sobol aproximam-se da reta que marca o valor real da integral, considerando a acurácia de 0.0005 pedida, em torno de  $n = 10$ , o que confere uma superioridade da ordem de  $10^1$  para os geradores quasi-aleatórios neste método.



## 5) Estimativas

Abaixo mostramos os valores estimados para a integral que queríamos calcular em cada um dos métodos e cada uma das sequências. Percebemos que os valores estão muito próximos entre si e dentro da acurácia desejada. Para o cálculo abaixo, utilizemos o  $n_{final}$  obtido em cada método no EP2.

	Crude	Hit.Miss	Imp. Sampling	C. Variate
Pseudo-Random	0.76214	0.7619	0.76145	0.76188
Quasi-Random Halton	0.76199	0.76198	0.76195	0.76196
Quasi-Random Sobol	0.76198	0.76199	0.76197	0.76195

Tabela 1: Estimativas obtidas do valor da integral

## 5 Referências

[1] John Michael Hammersley, D.C. Handscomb - Monte Carlo Methods- Methuen young books (1964)

[2] J.M. Stern. Cognitive Constructivism and the Epistemic Significance of Sharp Statistical Hypotheses in Natural Sciences (2013)