Домашнее задание 10

Задача 1 Разобъём исходную матрицу n x n на 2 матрицы, каждая размером так же n x n:
В первой матрице на диагонали находятся только единицы, на местах двоек из исходной матрицы - нули; во второй матрице, наоборот, только двойки, на местах единиц - нули.
Пусть $trA_(nxn) = X_i$
Тогда по закону больших чисел $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \to E$ при $n \to \infty$
E_1X_i для первой матрицы $= \frac{3}{4}$, E_2X_i для второй матрицы $= 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow E$ для исходной матрицы $= E_1 + E_2 = \frac{5}{4}$.
Ответ: $\frac{5}{4}$

Задача 2 $\log \det A = tr \log A$
$\Rightarrow \log \det A = E \log a_(ii)$
Так как $\log 1 = 0$, в сумму войдут только те, ячейки матрицы, в которых значение равно 2.
$E \log a_(ii) = \frac{\log 2}{4}$.
Ответ: $\frac{\log 2}{4}$

Задача 3 Рассмотрим случайную величину $X = \frac{m}{n}$ - частота голосов "за где m - количество "за n - количество голосов.
Известно, что:
$E(X) = EX_i$
$Var\overline{X} = \frac{VarX}{n}$
Рассмотрим

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{успех} \\ 0 & \text{не успех} \end{cases}$$

Тогда $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = X \Rightarrow E\frac{1}{n}\sum i = 1nX_i = p$; $Var\frac{1}{n}\sum_{i=1} nX_i = \frac{VarX_i}{n} = \frac{pq}{n}$
Так как неравенство усиливается при максимальном значении pq, $pq_max = \frac{1}{4}$, то есть $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$
Неравенство Чебышева $p(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$
$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 0{,}95$
$\Rightarrow n = \frac{20}{4\varepsilon^2} = \frac{5}{(0{,}01)^2} = 50000$
Ответ: 50000