empiricae industriae scientiam analyticam adjiceremus, contenti tamen sumus vel incertas hypotheses comminisci vel ex observationibus conclusiones ducere aliunde jam notas et per se demonstrabiles deplorabili temporis sumtuumque jactura. Quare si sic pergimus, serae tantum posteritati laboramus, cum possemus, si saperemus quidem, ipsi laborum nostrorum percipere fructus. Atque haec quidem illis consideranda commendo, qui altiore genio res agitant, veroque affectu publica bona prosequuntur; an autem fides aliqua tribuenda sit sive votis sive propositionibus meis, his qui libellum hunc intelligent, judicandum relinquo, hoc unum nunc adjicere contentus, duas inventoriae artis partes esse, analyticam et combinatoriam, instrumentum autem inventionis humanae generale esse characteres aptos, quod satis Arithmeticae et Algebrae et Geometriae ipsius exemplo patet: mens enim filo quasi quodam sensibili regenda est, ne vagetur in labyrintho et cum multa simul complecti distincte nequeat, adhibitis signis pro rebus, imaginationi parcit: multum tamen interest, quomodo signa adhibeantur ut res utiliter referrant; et jam nunc profiteor, hoc, quicquid est quod inventioni mathematicae adjeci, ex hoc uno natum esse, quod usum symbolorum quantitates repraesentantium reddidi meliorem.

III.

INITIA RERUM MATHEMATICARUM METAPHYSICA.

Cum insignis Mathematicus Christianus Wolfius nuper in Cursu suo Mathematico Latino meditationes quasdam meas circa Analysin Axiomatum et circa naturam similitudinis attigerit et pro more suo illustrarit (vid. Act. Erudit A. 1714), visum est nonnulla huc spectantia, dudum a me animo concepta, ne intercidant proferre, ex quibus intelligi potest, esse artem quandam Analyticam Mathematica ampliorem, ex qua Mathematica scientia pulcherrimas quasque suas Methodos mutuatur. Paulo ergo altius ordiri placet:

Si plures ponantur existere rerum status, nihil oppositum involventes, dicentur existere **simul.** Itaque quae anno praeterito et praesente facta sunt negamus esse simul, involvunt enim oppositos ejusdem rei status.

Si eorum quae non sunt simul unum rationem alterius involvat, illud **prius,** hoc **posterius** habetur. Status meus prior rationem involvit, ut posterior existat. Et cum status meus prior, ob omnium rerum connexionem, etiam statum aliarum rerum priorem involvat, hinc status meus prior etiam rationem involvit status posterioris aliarum rerum atque adeo et aliarum rerum statu est prior. Et ideo quicquid existit alteri existenti aut simul est aut prius aut posterius.

Tempus est ordo existendi eorum quae non sunt simul. Atque adeo est ordo mutationum generalis, ubi mutationum species non spectatur.

Duratio est temporis magnitudo. Si temporis magnitudo aequabiliter continue minuatur, tempus abit in Momentum, cujus magnitudo nulla est.

Spatium est ordo coexistendi seu ordo existendi inter ea quae sunt simul.

Secundum utrumque ordinem (temporis vel spatii) **propiora sibi aut remotiora** censentur, prout ad ordinem inter ipsa intelligendi plura paucioraque correquiruntur. Hinc duo puncta propiora sunt, quorum interposita ex ipsis maxime determinata dant aliquid simplicius. Tale interpositum maxime determinatum, est via ab uno ad aliud simplicissima, minima simul et maxime aequabilis, nempe recta, quae minor interjecta est inter puncta propiora.

Extensio est spatii magnitudo. Male Extensionem vulgo ipsi extenso confundunt, et instar substantiae considerant.

Si spatii magnitudo aequabiliter continue minuatur, abit in punctum cujus magnitudo nulla est.

Situs est coexistentiae modus. Itaque non tantum quantitatem, sed et qualitatem involvit.

Quantitas seu Magnitudo est, quod in rebus sola compraesentia (seu perceptione simultanea) cognosci potest. Sic non potest cognosci, quid sit pes, quid ulna, nisi actu habeamus aliquid tanquam mensuram, quod deinde aliis applicari possit. Neque adeo pes ulla definitione satis explicari potest, nempe quae non rursus aliquid tale involvat. Nam etsi pedem dicamus esse duodecim pollicum, eadem est de pollice quaestio, nec majorem inde lucem acquirimus, nec dici potest, pollicis an pedis notio sit natura prior, cum in arbitrio existat utrum pro basi sumere velimus.

Qualitas autem est, quod in rebus cognosci potest cum singulatim observantur, neque opus est compraesentia. Talia sunt attributa quae explicantur definitione aut per varias modificationes quas involvunt.

Aequalia sunt ejusdem quantitatis.

Similia sunt ejusdem qualitatis. Hinc si duo similia sunt diversa, non nisi per compraesentiam distingui possunt.

Hinc patet exempli causa, duo Triangula aequiangula habere latera proportionalia vel vicissim. Nam sint latera proportionalia, similia utique sunt triangula, cum simili modo determinentur. Porro in omni triangulo summa angulorum est eadem, cum aequetur duobus rectis; ergo necesse est in uno rationem angulorum respondentium ad summam esse quae in altero; alioqui unum triangulum ab alio eo ipso distingui posset, ex se scilicet seu singulatim spectatum. Ita facile demonstratur quod alias per multos ambages.

Homogenea sunt quibus dari possunt aequalia similia inter se. Sunto A et B, et possit sumi L aequale ipsi A, et M aequale ipsi B sic ut L et M sint similia, tunc A et B appellabuntur Homogenea.

Hinc etiam dicere soleo, Homogenea esse quae per transformationem sibi reddi possunt similia, ut curva rectae. Nempe si A transformetur in aequale sibi L, potest fieri simile ipsi B vel ipsi M, in quod transformari ponitur B.

Inesse alicui loco dicimus vel alicujus ingrediens esse, quod aliquo posito, eo ipso immediate poni intelligitur, ita scilicet ut nullis opus sit consequentiis. Sic ubi lineam aliquam finitam ponimus, ejus extrema ponimus ejus partes.

Quod inest homogeneum, Pars appellatur, et cui inest appellatur Totum, seu pars est ingrediens homogeneum.

Terminus communis est, quod duobus inest partem communem non habentibus. Quae quoties intelligantur partes ejusdem Totius, is terminus communis dicetur Sectio totius.

Hinc patet, Terminum non esse homogeneum terminato, nec Sectionem esse homogeneam secto.

Tempus et Momentum, Spatium et Punctum, Terminus et Terminatum, etsi non sint Homogenea, sunt tamen **homogona**, dum unum in alterum continua mutatione abire potest.

Locum qui alteri loco inesse dicitur, Homogonum intelligimus, quod si ejus sit pars aut parti aequalis, non tantum homogonus sed et homogeneus erit. Angulus etsi ad punctum sit, non tamen est in puncto, alioqui in puncto magnitudo intelligeretur.

Si pars unius sit aequalis alteri toti, illud vocatur Minus, hoc Majus.

Itaque Totum est majus parte. Sit totum A, pars B, dico A esse majus quam B, quia pars ipsius A (nempe B) aequatur toti B. Res etiam Syllogismo exponi potest, cujus Major propositio est definitio, Minor propositio est identica:

Quicquid ipsius A parti aequale est, id ipso A minus est, ex definitione,

B est aequale parti ipsius A, nempe sibi, ex hypothesi,

ergo B est minus ipso A.

Unde videmus demonstrationes ultimum resolvi in duo indemonstrabilia: Definitiones seu ideas, et propositiones primitivas, nempe identicas, qualis haec est B est B, unumquodque sibi ipsi aequale est, aliaeque hujusmodi infinitae.

Motus est mutatio situs.

Movetur, in quo est mutatio situs, et simul ratio mutationis.

Mobile est homogonum extenso, nam et punctum mobile intelligitur.

Via est locus continuus successivus rei mobilis.

Vestigium est locus rei mobilis, quem aliquo momento occupat. Hinc vestigium termini est sectio viae quam terminus describit, cum scilicet mobile per sua vestigia non incedit.

Mobile per sua vestigia incedere dicitur, cum quodvis ejus punctum extra terminum in locum alterius puncti ejusdem mobilis continuo succedit.

Quodsi Mobile sic moveri non ponatur, tunc Linea est via puncti.

Superficies est via Lineae.

Amplum vel Spatium vel ut vulgo solidum est via superficiei.

Magnitudines viarum quibus punctum lineam, linea superficiem, superficies amplum describit, vocantur longitudo, latitudo, profunditas. Vocantur dimensiones, et in Geometria ostenditur non nisi tres dari.

Latitudinem habet, cujus datur sectio extensa, seu quod extenso terminatur.

Profunditatem habet, quod extensum non terminat, seu quod sectio extensi esse non potest, in profundo scilicet est plus aliquid quam quod terminus esse possit.

Linea est ultimum terminans extensum.

Amplum est ultimum Terminatum extensum.

Similitudo vel dissimilitudo in amplo seu spatio cognoscitur ratione terminorum, itaque amplum, cum plus aliquid sit quam quod terminus esse possit, intus ubique simile est. Amplaque quorum omnimodae extremitates coincidunt, congruunt, assimilantur, sunt coincidentia, congruentia, similia. Idem est in plano, quod est superficies intus uniformis vel sibi similis, et in recta, quae est linea intus sibi similis.

Omnimoda extremitas in Extensis latitudinem habentibus Ambitus appellari potest. Sic ambitus circuli est peripheria, ambitus sphaerae est superficies sphaerica.

Punctum (spatii scilicet) est locus simplicissimus, seu locus nullius alterius loci.

Spatium absolutum est locus plenissimus seu locus omnium locorum.

Ex uno puncto nihil prosultat.

Ex duobus punctis prosultat aliquid novi, nempe punctum quodvis sui ad ea situs unicum, horumque omnium locus, id est recta quae per duo puncta proposita transit.

Ex tribus punctis prosultat planum, id est locus omnium punctorum sui ad tria puncta non in eandem rectam cadentia situs unicorum.

Ex quatuor punctis non in idem planum cadentibus prosultat Spatium absolutum. Nam quodvis punctum sui ad quatuor puncta in idem planum non cadentia situs unicum est.

Prosultandi vocabulo utor ad ideam indicandam novam, dum ex quibusdam positis aliquid aliud determinatur eo ipso quod suae ad ipsa relationis unicum est. Relatio autem hic intelligitur situs.

Tempus in infinitum continuari potest. Cum enim totum tempus sit simile parti, habebit se ad aliud tempus, ut pars se habet ad ipsum, et ita in alio majore tempore continuari intelligitur.

Similiter et spatium solidum seu amplitudo continuari in infinitum potest, quandoquidem ejus pars sumi potest similis toti. Et hinc planum quoque et recta continuantur in infinitum. Eodem modo ostenditur, spatium velut rectam, itemque tempus, et in universum continuum in infinitum subdividi posse. Nam in recta et in tempore pars est similis toti atque adeo in eadem ratione secari potest, qua totum, et licet sint extensa, in quibus pars non est similis toti, possunt tamen transformari in talia, et in eadem ratione secari, in qua ea, in quae transformantur.

Sequitur etiam ex his, quovis motu posse assumi celeriorem et tardiorem in data ratione: radio enim rigido circa centrum acto motus punctorum sunt ut distantiae eorum a centro, itaque celeritates variari possunt ut rectae.

Aestimatio magnitudinum duplex est, imperfecta et perfecta; imperfecta, cum aliquid majus minusve altero dicimus, quamvis non sint homogenea, nec habeant proportionem inter se, quemadmodum si quis diceret, Lineam esse majorem puncto, aut superficiem linea. Et tali modo Euclides dixit, Angulum contactus esse minorem quovis rectilineo, etsi revera nulla inter hos toto genere diversos sit comparatio, quin nec homogenea sunt, nec continua mutatione ab uno in alterum transiri potest. In aestimationibus perfectis inter homogenea obtinet haec regula, ut transeundo continue ab uno extremo ad aliud, transeatur per omnia intermedia; sed non obtinet in imperfectis, quia quod medium dicitur heterogeneum est, itaque transeundo continue ab angulo acuto dato ad angulum rectum non transitur per Angulum semicirculi seu radii ad circumferentiam, etsi is angulo recto minor, et quovis acuto major dicatur, id Majus enim hic sumitur improprie pro eo quod intra alterum cadit.

Plures secundum quantitatem dantur relationes; sic duae rectae possunt eam habere Relationem inter se, ut summa earum aequetur constanti rectae. Et infinita possunt dari paria rectarum hanc relationem inter se habentia, nempe x et y, ita ut sit $x+y=a$, si verb. gr. a sit ut 10, possunt x et y esse ut 1 et 9, ut 2 et 8, ut 3 et 7, ut 4 et 6, ut 5 et 5, ut 6 et 4, ut 7 et 3, ut 8 et 2, ut 9 et 1. Sed possunt etiam infiniti sumi fracti infra 10, qui satisfaciunt. Sic datur relatio talis inter duas rectas x et y, ut quadrata earum simul sumta aequentur quadrato dato rectae a, ita fiet $xx+yy=aa$: et talium etiam dari possunt paria infinita, et haec est in Circulo relatio sinus complementi ad sinum vel cōntra, nam uno posito x, alter est y, radius autem est a. Et tales relationes possunt fingi infinitae, tot quot species linearum in plano describi possunt. Veluti si x sint abscissae ex recta directrice, y erunt ordinatae inter se parallelae ad abscissas applicatae, quae terminantur in Linea.

Sed omnium Relationum simplicissima est, quae dicitur **Ratio** vel **Proportio**, eaque est Relatio duarum quantitatum homogenearum, quae ex ipsis solis oritur sine tertio homogeneo assumto. Veluti si sit y ad x ut numerus ad unitatem seu $y=nx$, quo casu x positis abscissis, y ordinatis, locus est recta, locus inquam seu Linea quam ordinatae terminantur. Ex quo etiam patet, si esset aequatio localis cujuscunque gradus velut $lx^3+my^3+nxxy+pxyy=0$, ubi l, m, n, p sint meri numeri, locum ad quem sit aequatio fore rectam et datam esse rationem ipsarum x et y.

Sint datae duae rectae, quae inter se comparentur utcunque. Verb. gr. detrahatur minor ex majore, quoties fieri potest, et residuum rursus ex minore, et ita porro residuum ex illo quod quoties fieri potest est detractum, donec vel sequatur exhaustio, ultimo subtrahendo existente communi Mensura, si quantitates sunt commensurabiles, vel habeatur lex progressionis in infinitum, si sint incommensurabiles. Et eadem erit series numerorum Quotientium, cum eadem est proportio. Nempe si sit a ad b ut

$$l+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}} \quad \text{ad unitatem, erit } l,\ m,\ n,\ p \text{ etc.}$$

series numerorum quotientium. Verb. gr. si a sit 17 et b sit 5, series tantum constabit ex tribus l, m, n, qui numeri erunt 3, 2, 2. Si a et b sint partes rectae extrema et media ratione sectae, erit a major ad b minorem, ut $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{ etc.}}}}$

ad unitatem; quotientes erunt unitates, et series eorum ibit in infinitum. Sic a et b quaecunque rectae erunt ad se invicem ut $\frac{l}{1}+\frac{m}{2}+\frac{n}{4}+\frac{p}{8}+\frac{q}{16}+$ etc. ad 1, posito l, m, n, p, q etc. esse 0 vel 1, quae series vel finitur vel periodica est, cum numeri sunt commensurabiles.

Ex his sequitur, lineas similes esse in ratione rectarum Homologarum, superficies similes ut rectarum homologarum quadrata, solida similia ut eorum cubos. Sint duo Extensa similia A et L, et homologa homogenea et B et M. Quia A cum B seu A; B simile est ipsi L cum M seu L; M, erit ratio A ad B eadem quae L ad M. alioqui ipsum A; L ab ipso B; M aliter quam per compraesentiam distingui posset; prodibunt enim alii numeri rationem exprimentes. Ergo permutando erit A ad L ut B ad M, ut ponebatur. Sic ostendetur circulos esse ut quadrata diametrorum, sphaeras ut cubos diametrorum. Circuli (sphaerae) erunt A et L, quadrata homologa (cubi homologi) B et M.

Ex his manifestum est, Numerum in genere integrum, fractum, rationalem, surdum, ordinalium, transcendentem generali notione definiri posse, ut sit id quod homogeneum est Unitati, seu quod se habet ad Unitatem, ut recta ad rectam. Manifestum est etiam, si Ratio a ad b consideretur ut numerus qui sit ad Unitatem, ut recta a ad rectam b, fore Rationem ipsam homogeneam Unitati; Unitatem autem repraesentare Rationem aequalitatis.

Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum, et ad Metaphysicam pertinet. Sic productum multiplicatione $a+b+c+$ etc. per $l+m+n+$ etc. nihil aliud est quam summa omnium binionum ex diversi ordinis literis, et productum ex tribus ordinibus invicem ductis, $a+b+c+$ etc. in $l+m+n+$ etc. in $s+t+v+$ etc. fore summam omnium ternionum ex diversi ordinis literis; et ex aliis operationibus aliae prodeunt formae.

Hinc in calculo non tantum lex homogeneorum, sed et justitiae utiliter observatur, ut quae eodem modo se habent in datis vel assumtis, etiam eodem modo se habeant in quaesitis vel provenientibus, et qua commode licet inter operandum eodem modo tractentur; et generaliter judicandum est, datis ordinate procedentibus etiam quaesita procedere ordinate. Hinc etiam sequitur Lex Continuitatis a me primum prolata, qua fit ut lex quiescentium sit quasi species legis in motu existentium, lex aequalium quasi species legis inaequalium, ut lex Curvilineorum est quasi species legis rectilineorum, quod semper locum habet, quoties genus in quasi-speciem oppositam desinit. Et hic pertinet illa ratiocinatio quam Geometrae dudum admirati sunt, qua ex eo quod quid ponitur esse, directe probatur id non esse, vel contra, vel qua quod velut species assumitur, oppositum seu disparatum reperitur. Idque continui privilegium est; Continuitas autem in tempore, extensione, qualitatibus, motibus, omnique naturae transitu reperitur, qui nunquam fit per saltum.

Situs quaedam coexistendi relatio est inter plura, eaque cognoscitur per alia coexistentia, intermedia, id est quae ad priora simpliciorem habent coexistendi relationem.

Coexistere autem cognoscimus non ea tantum quae simul percipiuntur, sed etiam quae successive percipimus, modo ponatur durante transitu a perceptione unius ad perceptionem alterius aut non interiisse prius, aut non natum esse posterius. Ex illa hypothesi sequitur nunc ambo coexistere, cum posterius attigimus; ex hac sequitur ambo extitisse cum prius disereremus.

Est autem in percipiendi transitu quidam ordo, dum ab uno ad aliud per alia transitur. Atque hoc via dici potest. Sed hic ordo cum variari possit infinitis modis, necesse est unum esse simplicissimum, qui scilicet sit secundum ipsam rei naturam procedendo per determinata intermedia, id est per ea quae se habent ad utrumque extremum quam simplicissime. Id enim nisi esset, nullus esset ordo, nulla discernendi ratio in coexistentia rerum, cum a dato ad datum per quodvis iri possit. Atque haec est via minima ab uno ad aliud, cujus magnitudo distantia appellatur.

Haec ut melius intelligantur, nunc quidem abstrahemus animum ab his quae in singulis spectari possunt, de quorum distantia agitur: ita considerabimus ea, tanquam in singulis plura spectanda non essent, seu considerabimus ea tanquam Puncta. Nam punctum est, in quo nihil aliud ei coexistens ponitur, ita ut quicquid in ipso est, ipsum sit.

Ita via puncti erit linea, quae utique latitudinem non habebit, quia sectio ejus quae in puncto fit longitudinem non habet.

Ex uno puncto dato nihil determinatur praeterea. Sed duobus datis punctis determinatur via ab uno ad aliud simplicissima, quam appellamus Rectam.

(1) Hinc sequitur primo, rectam esse minimam a puncto ad punctum, seu magnitudinem ejus esse punctorum distantiam.

(2) Secundo, rectam esse inter sua extrema aequabilem. Neque enim aliquid assumitur, unde reddi possit ratio varietatis.

(3) Itaque oportet, ut unus locus puncti in ea moti ab altero discerni non possit seposito respectu ad extrema. Hinc et pars rectae recta est, itaque intus ubique sibi similis est, nec duae partes discerni possunt inter se, cum suis extremis discerni non possint.

(4) Sequitur etiam, extremis positis similibus aut congruis aut coincidentibus, ipsas rectas similes, congruas aut coincidentes esse. Extrema autem semper sunt similia. Itaque rectae duae quaevis sunt similes, et pars etiam toti.

(5) Tertio ex definitione sequitur, procedere rectam per puncta suae relationis unica ad duo puncta data, quae ratio est maxime determinata. Oportet autem talia dari, alioqui ex duobus datis nihil resultaret novi determinati. Et si daretur aliud punctum eodem modo se habens ad A et B simul sumta ut propositum, nulla esset ratio cur via illa simplicissima determinata per unum potius quam per aliud procederet. Patet etiam hoc ex praecedente, quia dum ostendimus extremis datis rectam esse determinatam seu extremis coincidentibus coincidere rectas.

(6) Quarto sequitur, rectam in omnes plagas se habere eodem modo nec concavum habere et convexum ut curvam, cum ex duobus punctis assumtis A et B nulla ratio diversitatis reddi possit.

(7) Et proinde, si duo assumantur puncta quaecunque extra rectam L et M quae se eodem modo habeant ad duo puncta rectae collective, seu ita ut L se habeat ad A et B, ut M se habet ad A et B, etiam eodem modo se habebunt ad totam rectam, seu L se habebit ad rectam per A, B, ut M se ad eam habet.

(8) Manifestum etiam est, rectam rigidam seu cujus puncta

non mutant situm inter se, duobus in ea punctis manentibus immotis moveri non posse, alioqui enim plura darentur puncta eodem modo se habentia ad duo puncta immota, nempe tam punctum in quo fuit punctum mobile, quam illud ad quod est translatum.

(9) Sequitur vicissim, alia omnia puncta, quae in rectam per A et B transeuntem non cadunt seu quae ipsis A et B non sunt in directum, mobilia esse situ ad A et B servato, ipsis A et B manentibus immotis, cum recta sit locus omnium punctorum unice se habentium ad A et B; caetera ergo variari possunt et quidem in omnes partes, cum recta eodem modo se habeat in omnes partes.

(10) Itaque si Extensum rigidum moveatur duobus punctis manentibus immotis, omnia puncta ejus quiescentia cadent in rectam per puncta immota transeuntem, quodvis punctum mobile describet circulum circa eandem rectam velut axem.

Datis tribus punctis in eandem Rectam non cadentibus, quod inde determinatur est planum. Sint puncta A, B, C non cadentia in eandem rectam, ex A, B punctis determinatur recta per A et B, ex C et B punctis determinatur recta per C et B. Ex quovis puncto rectae per A et B, conjuncto cum quovis puncto rectae per C et B, nova determinatur recta, et proinde datis A, B, C, determinantur rectae infinitae quarum locus vocatur planum.

(1) Itaque primo planum est minimum inter sua extrema. Ambitus enim ejus non constat recta, quia recta spatium non claudit, alioqui pars rectae foret dissimilis toti. Ergo ambitu dato dantur tria puncta in eandem rectam non cadentia, ergo ex solo ambitu dato determinatur planum interceptum. Ergo est minimum.

(2) Secundo planum est aequabile inter sua extrema, quia nulla ratio varietatis ex hac origine ejus deduci potest.

(3) Unde sequitur, planum intus esse sibi simile, ita quod in eo movetur punctum, locum in quo est ab alio loco non distinguit nisi respectu ad extrema. Nec pars plani a parte nisi per extrema discerni potest.

(4) Sequitur et porro, plana quorum ambitus sunt similes aut congrui aut coincidentes, ipsa similia aut congrua aut coincidentia esse.

(5) Tertio ex definitione plani patet esse locum omnium punctorum ad tria data puncta unicorum.

(6) Quarto sequitur planum utrinque se habere eodem modo, adeoque nec concavum habere neque convexum.

(7) Atque adeo puncto se habenti utcunque ad A, B, C simul vel ad planum ex his determinatum, respondens aliud punctum dari posse eodem modo se habens ad tria haec puncta simul sumta, cum nulla sit ratio diversitatis.

(8) Planum autem est latitudine praeditum, nam per lineam rectam secari potest, per bina data ejus puncta transeuntem. Itaque sectio ejus longitudinem habet, cujus autem sectio habet longitudinem, id ipsum habet latitudinem.

Datis quatuor punctis in idem planum non cadentibus resultat profundum, seu id in quo sumi potest aliquid quod Terminus non est, seu quod non potest ei esse commune cum altero nisi pro parte in ipsum immerso.

Sunto quatuor puncta A, B, C, D (fig. 1). Hinc dantur sex rectae AB, AC, AD, BC, BD, CD; sed sufficiunt AB, AC, AD, nam tres reliquae ex his nascuntur. Prosultantibus his tribus rectis, prosultant et omnia earum puncta, et rectae conjungentes duo quaevis diversarum rectarum puncta, locusque adeo harum rectarum omnium. Porro habemus et quatuor plana per A, B, C, per A, B, D, per A, C, D, per B, C, D, quorum duo quaevis sectionem habent rectam communem; verb. gr. plana per A, B, C et per B, C, D habent communem sectionem rectam per B, C. Haec quatuor plana claudent spatium quatuor Triangulis planis ABC, ABD, ACD, BCD, quae spatii ambitum facient. Et recta quaevis EF, duo puncta E et F duorum planorum ABC, BCD conjungens, habet omnia puncta ut G intra hoc spatium, ita ut ex puncto G rectae extremis interjecto nulla recta educi possit, quae non in ambitum cadat. Claudunt autem spatium quae ambitum constituunt plenum, nempe talem, ut linea quaecunque ducta in parte ambitus, ubi pervenit ad ejus partis extremum, continuari possit in alia ambitus parte. Ex. gr. recta AL in parte Ambitus ABC ducta, ubi pervenit ad extremum ejus L, continuari non posset in alia ambitus parte, si abesset triangulum BCD, quod cum caeteris tribus ABC, ABD, ACD spatii claudendi opus absolvit. Ponatur illa recta produci quantum opus est ad punctum H, quod magis absit a puncto G, quam omnia puncta triangulorum ABC, ABD, ACD, BCD. Ex puncto H agantur normales in quatuor plana et itidem ex puncto G, reperietur aliquod ex his planis planum, respectu cujus normales amborum non sint ad easdem partes; aliquod ex his planis debet GK secare in triangulo cujus planum est continuatio; dico rectam GH si opus productam cadere in aliquod ex his planis. Sumatur aliud quodcunque punctum H, ajo rectam GH productam si opus occurrere uni triangulorum quatuor ut ipsi ABD in K, planum per E, F, H secabit plana ABD, ACD, BCD, quae tres rectae constituent triangulum cujus duo latera cadent in duo ex triangulis tribus dictis, et punctum G intra hoc triangulum cadet. Recta ergo quaecunque transiens per G alterutrum ex illis duobus lateribus secabit, ergo et recta GH, ergo recta GH occurrit uni ex triangulis ABD, ACD, BCD in K. Eodem modo ostendetur, et alio extremo occurrere uni ex aliis tribus triangulis. Sed brevius rem ostendemus.

IV.

INITIA MATHEMATICA.

DE QUANTITATE.

Determinantia sunt, quae simul non nisi uni soli competunt, ut duo extrema A, B (fig. 2) non nisi uni competunt rectae.

Coincidentia sunt, quae plane eadem sunt tantumque denominatione differunt, ut via ab A ad B a via a B ad A.

Congrua sunt, quae si diversa sunt, non nisi respectu ad externa discerni possunt, ut quadrata C et D (fig. 3), nempe quod eodem tempore sunt in diverso loco vel situ, vel quod unum C est in materia aurea, alterum D in argentea. Ita congruunt libra auri et libra plumbi; dies hodiernus et hesternus. Punctum quodlibet congruit cuilibet alteri, ut et instans instanti.

Aequalia sunt quae vel congruunt (exempli gratia (fig. 4) triangula EFH, EFG, IKL, LMI, GNE, item rectangula EFGN et