#40892. SPECIMEN ANALYSEOS FIGURATAE
[1685 – 1687]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 21–22. 1 Bog. 2°. 4 S.

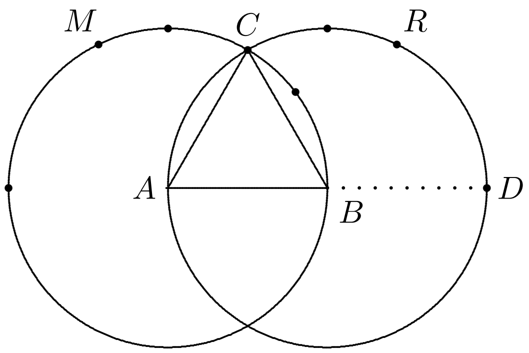
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Jahre 1685–1687 belegt.

Specimen Analyseos Figuratae in *Elementis* Geometriae

Analysin figuratam voco, quae modum praestat literis puncta significantibus repraesentandi Figuras, et inveniendi atque demonstrandi earum effectus et proprietates, ita ut non tantum magnitudines, ut in Calculo Algebraico, sed situs ipsi per novum hoc Calculi genus, directe exhibeantur. Specimen autem hujus artificii edemus in *Elementis* Euclidis, et inter procedendum assumemus Lemmata, Axiomata, Definitiones aliasque propositiones, quibus indigebimus.

Quicquid autem in Decem prioribus libris Euclidis exponitur, hoc intelligendum est in uno esse plano. Ne id perpetuo admoneri opus sit.

Ad Lib. 1 Elem.



[*Fig. 1*]

Prop. 1. Super data recta linea terminata AB. triangulum aequilaterum ABC construere.

(1) $AC = AB$ ex hypothesi. (2) $BC = BH$ ex hyp. Et quod his satisfacit est C. (3)

Sit $AM = AB$. (4) Fiat (per postulat. 1) $\overline{M}$ circumferentia circuli centro A intervallo AB (per definitionem 1). (5) Sit $BR = BA$. (6) Fiat $\overline{R}$ circumf. circuli centro B intervallo BA (ut ad 4). (7) Jam quoddam R est M (per Lemma 1), (8) Seu $\overline{R}$ et $\overline{M}$ sibi occurrunt (ex. 7. per defin. 2). (9) Datis lineis $\overline{M}$ et $\overline{R}$ (per 4 et 6) sibi occurrentibus (per 7, 8) habetur eorum occursus (per postulatum 2) nempe R quod est M. (10) Id vero est C (per 1 et 3 ac per 2 et 5). (11) Habetur ergo C. (12) Jam datur AB (ex hyp.). (13) Ergo habetur ABC. Qu. Er. Fac.

Lemma 1. Si duo circuli MA ex A et RA ex B habeant mutuo centrum in alterius circumferentia, B in $\overline{M}$, et A in $\overline{R}$, eorum circumferentiae $\overline{M}$ et $\overline{R}$ sibi occurrent alicubi in C.

Iisdem quae antea positis, (14) $BA = BA$ (per se). (15) Ergo quoddam R est A (per 5). (16) Itaque quodd. R est intra circulum $A.\overline{M}$ (, per defin. 3, nam punctum intra circulum esse dicimus cujus distantia a centro est minor radio). (17) Producatur AB ex B in D (per postulatum 3) (18) ut sit $BD = BA$ (per lemma 2). (19) Ergo $AD = AB + BD$ (per lemma 3). (20) Ergo $AD \sqcap AB$ (totum parte per Axiom. 1). (21) Ergo D est extra $A.\overline{M}$ (per def. 4, nam punctum extra circulum esse dicimus cujus distantia a centro est major radio). (22) Jam D est R (per 18 et 5). (23)

---

1 *Zu (4):* Def. 1 . Circumf. centr. interv. lib. 1 pr. 1 art. 4.
Postul. 1. Dato centro et intervallum circulum describere.

3 *Zu (8):* Def. 2. Occursus art. 8.

4 *Zu (9):* Postul. 2 Datis occurrentibus habetur occursus art. 9.

12 f. *Zu (16):* Def. 3. intra circulum esse, art. 16.

13–3,8 *Zu (17) u. (26)*: Postul. 3. Recta produci potest ex uno termino ad distantiam quantamvis art. 17. 26.

15 *Zu (20):* Axiom 1. Totum majus parte art. 20.

16 f. *Zu (21):* Def. 4. extra circ. esse art. 21.

5 eorum *(1)* intersectio *(2)* occursus *L*

Ergo qu. R est extra $A.\overline{M}$. (24) Itaque (per 16 et 23) qu. R est in $\overline{M}$ (per Ax. 2, omne continuum $\overline{R}$ quod intra et extra figuram $A.\overline{M}$ est, esse et in ejus circumferentia $\overline{M}$.

S c h o l. Unde etsi vi formae ex puris particularibus sequatur, tamen vi materiae in continuis ex 16 et 23 sequitur 24.

(25) Ergo (ex 24 per def. 2 ad 8) $\overline{M}$ et $\overline{R}$ sibi occurrunt. Q. E. D.

L e m m a 2. Recta AB ex centro B (imo puncto quovis intra Circulum) produci potest ut et cirumferentiae circuli $\overline{R}$ alicubi occurrat in D.

(26) Produci enim potest ad distantiam quantamvis (per postul. 3 ad 17). (27) Ergo ad E sic ut sit $BE \sqcap BA$. (28) Ergo (per def. 4 ad 21) recta producta est extra circulum $B.\overline{R}$. (29) Eadem est in circulo ad ejus centrum B (per def. 3 ad 16). (30) Ergo (per Ax. 2 ad 23) occurrit ejus circumferentiae alicubi in D.

Corroll. Lemmatis 2. Recta AD transiens per punctum B intra circulum, circulo bis occurrit in A et D. Nam AB producta ex B (recedendo ab A) circumferentiae occurrit alicubi in D, per Lemm. 2. Et DB producta ex B (recedendo a D) circulo occurret alicubi in A.

L e m m a 3. Si tria puncta A. B. D. sint in recta distantia duorum quorundam ex ipsis, AB coincidit ipsi $AB + BD$ summae distantiarum tertiae D ab ipsis A. B.

(31) Tria puncta sunt in recta (ex hyp.). (32) R e c t a AD est via brevissima seu distantia inter extrema A et D (per def. 5). (33) Ergo punctum B in recta minus distat ab extremo A, quam extrema A, D inter se. (34) Et $AB + BD = AD$ (omnes partes nullam partem communem habentes toti, per ax. 3). (35) Est autem AB distantia inter A et B et BD inter B et D (per def. 5 ad 32). (36) Superest ut ostendamus tribus punctis in recta existentibus capi posse rectam quae duobus ex illis terminetur tertium

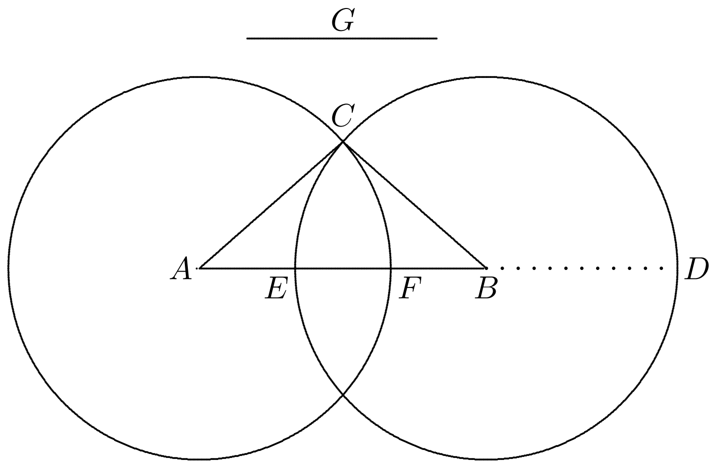
---

1 f. *Zu (24):* A x. 2. Continuum quod intra et extra figuram est ejus circumferentiae occurrit art. 24.

18 f. *Zu (32):* D e f. 5. Recta est via brevissima inter extrema sive distantia duorum punctorum. Art. 32.

20 f. *Zu (34):* A x. 3. Omnes partes nullam partem communem habentes aequantur Toti. Art. 34.

vero includat. (37) Ponamus enim punctum aliquod rectam cui insunt percurrere. (38) Id ipsa attinget successive (per axioma 4). (39) Esto ergo A primum, B secundum, D tertium. (40) Ergo portio rectae quam percurret inter A et D terminabitur ipsis A et D, comprehendet autem B.



[*Fig. 2*]

A d d i t a m e n t u m 1. Si duo circuli $A\overline{M}$, $B\overline{R}$ aequalium radiorum habeant radium, majorem dimidia distantia centrorum A. B. sibi occurrent in C extra rectam per centra.

(41) Recta AB secat $\overline{R}$ bis in E et D (per corroll. Lemm. 2). (42) Et similiter $\overline{M}$ in F. (43) Sit E ex B versus A (44) et D ex B recedendo ab A (45) sitque F ex A versus B (46) AE erit minor AF (adde mox 58). (47) Nam quia (ob 43) E cadit inter B et A, vel B inter E et A (48) erit (per Lemm. 3) AE differentia inter AB et BE, (49) seu inter AB et AF ((50) quia $AF = BE$ (ex Hyp.)). (51) Jam si $AF \sqcap AB$ (52) erit $AF = AB + AE$ (per 48, 49). (53) Ergo $AF \sqcap AE$. (54) Sin $AB \sqcap AF$, erit $AB - AF = AE$ (per 48, 49). (55) Jam $AF \sqcap \frac{1}{2}\, AB$ (ex Hyp.). (56) Ergo $AE \sqcap \frac{1}{2}AB$. (57) Ergo $AF \sqcap AE$. (58) Utroque ergo modo erit $AE \sqcap AF$ ut asserebatur art. 46. (59) Rursus AD est major AF. (60) Nam $AD = AB + BD$ (per Lemm. 3) (61) $= AB + AF$ (quia $BD = AF$ ex hyp.). (62) Ergo quoddam R est intra $\overline{M}$ nempe E. (quia $AE \sqcap AF$ seu $AM \sqcap AE$ per 58).

---

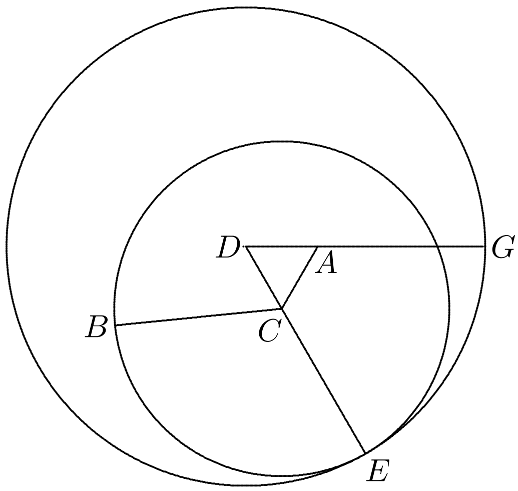
1 f. *Zu (38):* A x. 4. Quod movetur non est simul in pluribus locis. Art. 38.

(63) Quoddam R est extra $\overline{M}$ nempe D (quia per 59 $AD \sqcap AM$ seu AF). (64) Ergo (per Ax. 2) qu. R est in $\overline{M}$, ut C.

A d d i t a m e n t u m 2. Super basi data AB. triangulum isosceles construere cujus crura AC vel BC sint magnitudinis datae G, quam oportet esse majorem dimidia basi AB.

(65) Centris A et B (66) Intervallis $= G$ (per prop. 2. independenter ab hac demonstratam) (67) describantur circuli (postul. 1.) se secantes alicubi in C. Per additam. 1. erit $AC = G$ et $BC = G$. Quod erat fac.

P r o p. 2. Ad datum punctum A ponere datae rectae BC aequalem rectam AG.

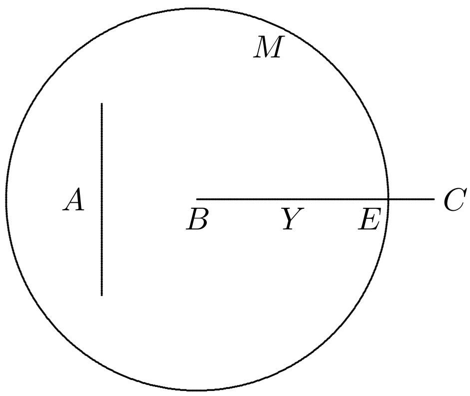


[*Fig. 3*]

Solutio. (1) Jungatur AC. (2) Super qua Triang. Aequil. ACD construatur (per 1. prim.). (3) Centro C. radio CB describatur circumferentia circularis BE (per postul. 1.) (4) cui recta DC producta ex C (per postul. 3) (5) occurret alicubi in E (per prop. 1. Lemm. 2). (6) Centro D radio DE describatur Circulus (postul. 1) (7) cui recta DA producta ex A occurret alicubi in G (per dict. Lemm. 2). (8) Erit $AG = BC$. (9) Nam $DC + CE = DE$ (per 5 et Lemm. 3 ad prop. 1.) (10) $= DG$ (per 6 et 7) (11) $= DA + AG$ (per 7 et Lemm. 3 ad prop. 1.) (12) $= DC + AG$ (per 2). (13) Ergo (per 9 et 12) $AG = CE$ (14) $= BC$ (per 3. 4).

S c h o l. ad prop. 2. Analysis qua constructio haec inveniri potest, talis est. Ad punctum A ponenda est recta aequalis rectae positae ad punctum C. Recta autem posita ad punctum C intelligi potest non tantum BC, sed et alia quaecunque ut CE, ipsi CB aequalis, seu ex C ad circumferentiam circuli CBE ducta. Cum ergo puncta A et C debeant tractari eodem modo, etiam recta AC tractanda est sic, ut respectu C tractetur quemadmodum tractata est respectu A. Quaeratur ergo punctum aliquod D eodem modo se habens ad A et C, quod fit super AC construendo triangulum aequilaterum vel isosceles ADC. Ducta recta ex D per C producta occurret circulo in E; ipsi DE sumatur aequalis DG in recta ex D producta per A, erit et $AG = CE$, quia eodem modo invenitur G respectu A, quo E respectu C.

P r o p. 3. Duabus datis rectis A et BC majore ab ea detrahere BE aequalem ipsi A.



[*Fig. 4*]

(1) Fac $BD = A$ (per 2. prim.) (2) et fac $\overline{M}$ ut sit $BM = BD$ (per postul. 1.). (3) Jam BC est intra $\overline{M}$ in B (ut ad art. 16. prop. 1.) (4) extra $\overline{M}$ in C ((5) quia $BC \sqcap A$ ex hyp. (6) ergo $\sqcap BM$ per 1. 2.) (6) Ergo (per Ax. 2) BC occurrit ipsi $\overline{M}$ alicubi in E. (7) Ergo BE pars BC. (8) Et $BE = BD = A$.

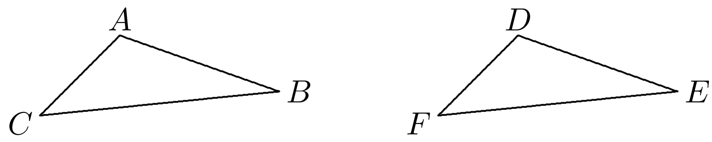
Item sic:

Sit $\overline{Y} \infty BC$. (4) Erit $BY + YC = BC$ (per Lemm. 3. ad prop. 1.). (5) $BC \sqcap A$ (ex

12 per | 3. *ändert Hrsg.* | prim.) *L*

hyp.). (6) Ergo qu. $BY = A$ (nam ex definitione 6. Majoris et Minoris, Minus est A cui qu. BY pars alterius, BC, quod majus dicitur, aequalis est). (7) Ergo qu. Y est M. (9) Quod sit E. Datur ergo E (per postul. 2.). (10) Ergo et $BE = A$ (per 6) (11) pars BC (per 4). Q. E. F.

Prop. 4. Si duo Triangula BAC, EDF, duo latera unius BA, AC duobus lateribus alterius ED, DF, respondens respondenti, aequalia habeant, et angulum unius A angulo alterius D aequalem, sub aequalibus rectis lineis contentum; tunc Triangulum triangulo congruum erit.



[*Fig. 5*]

(1) Ponamus dari positione Angulos LAM et NDP, (2) aequales ex Hypoth. (3) ergo congruos. (Nam anguli rectilinei aequales definiuntur def. 7. qui congrui sunt.) (4) Et G magnitudinem AC et DF, (5) et H magnitudinem AB et DE. (6) Denique dari in quibus lateribus angulorum sumendae sint hae rectae, nempe AB in AM, AC in AL, DE in DP, DF in DN. (7) Dantur ergo puncta B, C, item E, F (per 3. primi). (8) Ergo A, B, C; item D, E, F (per 1 et 7.). (9) Ergo Triangula ABC et DEF (nam datis punctis ad quae anguli figurae consistunt, figura data est per Ax. 5.). (10) Et quidem ambo eodem modo ex datis congruis determinate exhibentur (ex toto processu).

---

1 f. *Zu (6):* Def. 6. Si A sit aequale parti ipsius B, A minus dicetur B majus. Lib. 1. pr. 3. art. 6.

10 f. *Zu (3):* Def. 7. Anguli rectilinei aequales dicuntur si congrui sunt. Prop. 4. Art. 3.

15 f. *Zu (9):* Ax. 5. Datis punctis ad quae anguli figurae consistunt figura data est. Art. 9. Potest censeri postulatum.

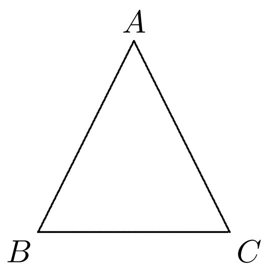
(11) Ergo congrua sunt (per Axioma 6). Q. E. D.

S c h o l. Si quis superpositionem adhibeat res eodem redit, si enim data congrua fiant actu congruentia seu coincidentia per superpositionem, coincident etiam quae ex ipsis determinate dantur; alioqui non unum sed plura his datis satisfacientia haberi possent, contra hypothesin. Unde Axiomatis sexti ratio intelligitur.

P o r i s m a. Triangulum magnitudine et specie datur magnitudine datis angulo et lateribus eum comprehendentibus (per 1. usque ad 9). Nam ut positione detur tantum opus est angulum positione dari, et quae crura anguli, quibus magnitudinibus laterum assignentur, quae nihil in magnitudine et specie mutant, nam utrumque crus in angulo eodem modo se habet.

S c h o l. P o r i s m a voco quod ex demonstratione colligitur, c o r o l l a r i u m quod ex propositione.

P r o p. 5. Triangulum ABC, quod duo latera AB, AC aequalia habet, etiam angulos eorum B, C ad reliquum latus, BC, aequales habet.



[*Fig. 6*]

(1) ponatur positione data BC. (2) Et data sit G, aequalis ipsis BA, CA (3) et partes ad quas cadere debet A (hoc est per def. 8. plano secto in duas partes a recta BC indefinite producta detur in qua parte debeat esse A). (4) Datur A si est possibilis, (5) nam centris B et C intervallo aequali G (per 2. primi) (6) describuntur circuli, (postul. 1) (7) jam A est in circumferentia utriusque (per 2) si scilicet possibilis est. (8) Ergo circuli

1 *Zu (11):* A x. 6. Quae eodem modo ex datis congruis (determinate) dantur congrua sunt. Art. 11.

sibi occurrunt in A si A est possibilis. (9) Ergo (per postul. 2.) datur A. (10) Ergo (per ax. 5) datur ABC. (10) Ergo et anguli ABC, ACB (nam per ax. 7 dato aliquo dantur ejus requisita) (11) et quidem eodem modo (per processum expositum). (12) Ergo (per Ax. 6) congrui sunt anguli. (13) Ac proinde aequales. (Nam congrua sunt aequalia per ax. 8.)

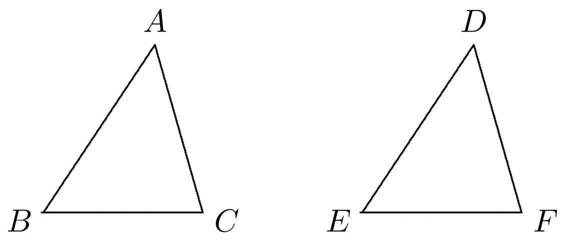
S c h o l. Idem ostendi potuisset per superpositionem, si aliud sumtum fuisset triangulum huic congruum, DEF et nunc ABC applicaretur ipsi DEF; nunc ACB ipsi DEF, ita nunc angulus ABC nunc angulus ACB congrueret eidem DEF, ergo congrui essent inter se.

P r o p. 6. Triangulum ABC quod duos angulos B et C aequales habet, etiam latera AB, AC ad reliquum angulum A pertinentia aequalia habebit.

Demonstratur eodem modo, (1) quia dato latere BC, et angulis B, C et partibus ad quas debet esse A, datur A. (2) Nam data positione recta BC et angulo ad eam alterius rectae BA[,] datur ipsa recta BA, indefinite (dato enim positione angulo latera dantur per ax. 7), eodem modo CA indefinite, (3) quae si possibilis est A se secabunt in A. (4) Datur ergo A, adeoque utraque eodem modo, ergo congruent. Q. E. D.

S c h o l. Idem potuisset demonstrari ex praecedenti. Ut et per superpositionem ad instar praecedentis.

P r o p. 7. Si triangula ABC, DEF latera lateribus alterius aequalia habeant, respondens respondenti, Triangula erunt congrua.

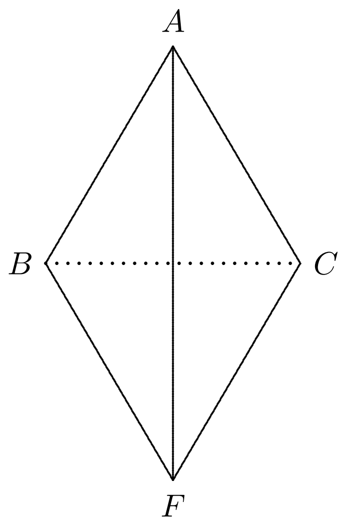


[*Fig. 7*]

1 f. (10) . . . (10): Die Zählung wiederholt sich.

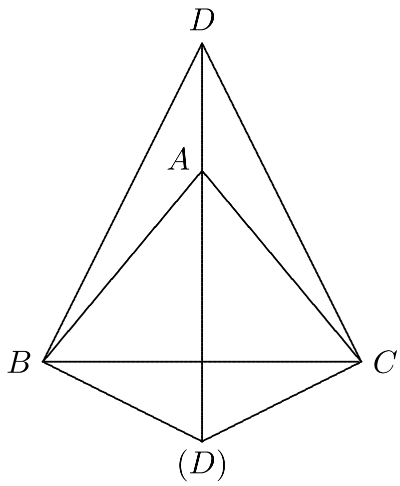
Demonstratur eadem Methodo, quia data positione uno latere unius trianguli, et uno alterius aequali, et reliquis datis magnitudine, circulos ex datorum positione laterum extremis, et magnitudinibus tanquam intervallis describendo dabitur utrumque triangulum, eodem modo, ergo per Ax. 6. congrua erunt.

P r o p. 8. Datum Angulum BAC bisecare.



[*Fig. 8*]

Sit recta bisecans FA, et $FAB = FAC$. Ea se eodem modo habet ad BA et ad CA. Habemus unum punctum rectae FA, nempe A, quaeratur adhuc aliud F ad quod ea recta se habeat ut ad A. Quod fiet si BAC, (positis BA, CA, aequalibus ut utrumque latus eodem modo tractetur respectu FA) transferamus in BFC centris B et C, radiis aequalibus ipsi BA vel CB describendo circulos, qui se secabunt alicubi in F (quia triangulum BFC ipsi BAC congruum per 7. prim. ob basin eandem BC et latera aequalia, utique possibile est). Recta ergo FA eodem modo se habens ad AB et AC utique angulum bisecabit.



[*Fig. 9*]

Idem praestabitur si super BC basi trianguli isoscelis ABC quodcunque aliud triangulum isosceles BFC construamus per additament. 2. ad prop. 1. Nam locus omnium punctorum eodem modo se habentium ad duo latera ejusdem anguli vel ad duo extrema ejusdem rectae, est recta transiens per duos apices duorum isoscelium eodem modo se ad angulum vel rectam propositam habentium.

P r o p. 9. Datam rectam BC bisecare.

Quaerenda sunt duo puncta eodem modo se habentia ad B et C. Quod fiet si duo triangula isoscelia BAC, BDC qualiacunque construantur super basi BC, recta per angulos basi oppositos seu per eorum apices ducta basin bisecabit.

S c h o l. Euclides pro prop. 8. et 9. utitur triangulo aequilatero, sed praestat adhibere constructionem magis generalem.

7 P r o p. | 8. *ändert Hrsg.* | Datam L 11 prop. | 7. et 8. *ändert Hrsg.* | utitur L