

## 12 (40852). DE ANALYSI SITUS

[1693 (?)]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 I 12 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 3 S. — Gedr.: GERHARDT, *Math. Schr.* 5, 1858, S. 178–183.

Datierungsgründe: [noch]

5

## De Analysi Situs

Quae vulgo celebratur *A n a l y s i s m a t h e m a t i c a*, est *m a g n i t u d i n i s*, non *s i t u s*; atque adeo directe quidem et immediate ad Arithmetica pertinet, ad Geometriam autem per circuitum quendam applicatur. Unde fit ut multa ex consideratione situs facile pateant, quae calculus Algebraicus aegrius ostendit. Problemata Geometrica 10  
ad Algebram, id est quae figuris determinantur ad aequationes revocare res non raro satis prolixa est, et rursus alia prolixitate difficultateque opus est, ut ab aequatione ad constructionem, ab Algebra ad Geometriam redeatur, saepeque hac via non admodum aptae prodeunt constructiones nisi feliciter in quasdam non praevisas suppositiones assumptionesve incidamus. Hoc ipse Cartesius tacite fassus est, cum lib. 3. Geometriae 15  
suae problema quoddam Pappi resolvit. Et sane Algebra sive numerica sive speciosa, addit, subtrahit, multiplicat, dividit, radices extrahit, quod utique arithmeticum est. Nam ipsa Logistica, seu scientia magnitudinis proportionisve in universum, nihil aliud tractat quam numerum generalem seu indeterminatum, et has in eo species operandi quoniam *M a g n i t u d o* revera determinatarum partium multitudine aestimatur, quae tamen 20  
manente re variat, prout alia aut alia Mensura vel Unitas assumitur. Unde mirum non est, Scientiam Magnitudinis in universum esse Arithmeticae genus, cum agat de numero incerto.

Habebant Veteres aliud Analyseos genus, ab Algebra diversum, quod magis ad situs considerationem accedit, tractans de *D a t i s* et de *S e d i b u s* quaesitorum seu 25  
*L o c i s*. Et huc tendit Euclidis libellus de *D a t i s*, in quem Marini Commentarius extat. De Locis vero planis, solidis, Linearibus actum est cum ab aliis, tum ab Apollonio, cujus propositiones Pappus conservavit, unde recentiores Loca plana solidaque restituerunt. Sed ita, ut veritatem magis quam fontem doctrinae veteris ostendisse videantur. Hoc tamen Analyseos genus neque ad calculum rem revocat, neque etiam producitur usque 30  
ad prima principia atque Elementa situs, quod ad perfectam Analysin necesse est.

Vera igitur Situs Analysis adhuc supplenda est, idque vel ex eo constat, quod omnes Analytici, sive Algebram exerceant novo more, sive data et quaesita ad veterem formam tractent, multa ex Geometria elementari assumere debent, quae non ex magnitudinis sed figurae consideratione deducuntur neque determinata quadam via hactenus patent.

5 Euclides ipse quaedam axiomata satis obscura sine probatione assumere coactus est, ut caetera procederent. Et Theorematum Demonstratio solutioque problematum in Elementis magis aliquando apparet, laboris opus quam methodi et artis, quanquam et interdum artificium processus suppressum videatur.

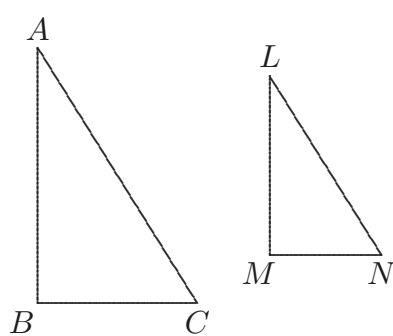
Figura in universum praeter quantitatem continet qualitatem seu formam; et quem-  
10 admodum a e q u a l i a sunt quorum eadem est magnitudo, ita s i m i l i a sunt quorum eadem est forma. Et similitudinum quidem seu formarum consideratio latius patet quam mathesis, et ex Metaphysica reperitur, sed tamen in Mathesi quoque multiplicem usum habet, inque ipso Calculo Algebraico prodest, sed omnium maxime similitudo spectatur in sitibus seu figuris Geometriae. Itaque Analysis vere Geometrica non tantum aequalitates  
15 spectat et proportionalitates, quae revera ad aequalitates reducuntur; sed similitudines etiam, et ex aequalitate ac similitudine conjunctis natas congruentias adhibere debet.

Causam vero cur similitudinis consideratione non satis usi sunt Geometrae, hanc esse arbitror, quod nullam ejus notionem generalem haberent satis distinctam aut ad Mathematicas disquisitiones accommodatam, vitio philosophorum, qui definitionibus va-  
20 gis et definito obscuritate paribus, in prima praesertim philosophia contenti esse solent, unde mirum non est sterilem esse solere doctrinam illam et verbosam. Itaque non sufficit similia dicere, quorum eadem forma est, nisi f o r m a e rursus generalis notio habeatur. Comperi autem, instituta qualitatis vel formae explicatione rem tandem eo devenire, ut s i m i l i a sint, quae singulatim observata discerni non possunt. Quantitas enim sola  
25 rerum compraesentia seu applicatione actuali interveniente deprehendi potest, qualitas aliquid menti objicit, quod in re separatim agnoscas et ad comparisonem duarum rerum adhibere possis, actuali licet applicatione non interveniente, qua res rei vel immediate vel mediante tertio tanquam mensura confertur. Fingamus duo templa vel aedificia exstructa haberi, ea lege, ut nihil in uno deprehendi queat, quod non et in alio observes: nempe ma-  
30 teriam ubique eandem esse, marmor Parium candidum, si placet; parietum, columnarum, caeterorumque omnium easdem utrobique esse proportionem; angulos utrobique eosdem, seu ejusdem rationis ad rectum; itaque qui in haec bina templa ducetur clausis oculis, sed post ingressum apertis, et nunc in uno, nunc in altero versabitur, nullum indicium ex ipsis inveniet, unde alterum ab altero discernat. Et tamen magnitudine differre possunt,

atque adeo discerni poterunt si simul spectentur, ex loco eodem; vel etiam (licet remota sint invicem) si tertium aliquod translatus nunc cum uno, nunc cum altero comparetur, veluti si mensura aliqua, qualis ulna aut pes aut aliud quiddam ad metiendum aptum, nunc uni nunc alteri accommodetur, nam tum demum discernendi ratio dabitur inaequalitate deprehensa. Idem est, si ipsum spectatoris corpus, aut membrum, quod utique cum ipso de loco in locum transit mensuraeque officium praestat, his templis applicetur; tunc enim magnitudo diversa, et per hanc discernendi modus apparebit. Sed si spectatorem non nisi ut mentem oculatam consideres, tanquam in puncto constitutam, nec ullas secum magnitudines aut re aut imaginatione afferentem, eaque sola in rebus considerantem, quae intellectu consequi licet, velut numeros, proportionem, angulos, discrimen nullum occurret. Similia igitur dicentur haec templa, quia non nisi hac coobservatione vel inter se, vel cum tertio, minime autem sigillatim et per se spectata discerni potuere.

Haec evidens et practica, et generalis similitudinis descriptio nobis ad demonstrationes Geometricas proderit, ut mox patebit. Nam duas figuras oblatas, similes dicemus, si aliquid in una singulatim spectata notari nequeat; quod in altera non aequè deprehendatur. Itaque eandem utrobique ingredientium rationem sive proportionem esse debere consequitur, alioqui per se sigillatim, seu nulla licet amborum coobservatione instituta, discrimen apparebit. At Geometrae cum generali similitudinis notione carerent, figuras similes ex aequalibus respondentibus angulis definierunt, quod speciale est, non ipsam naturam similitudinis in universum aperit. Itaque circuitu opus fuit, ut demonstrarentur, quae ex nostra notione primo intuitu patent. Sed ad exempla veniamus.

Ostenditur in *Elementis*, Triangula similia seu aequiangula latera habere proportionalia, et vicissim; sed hoc multis ambagibus Euclides quinto demum libro conficit, cum primo statim ostendere potuisset *Elemento*, si nostram notionem fuisset secutus. Demonstrabimus primum, *triangula aequiangula esse similia*.

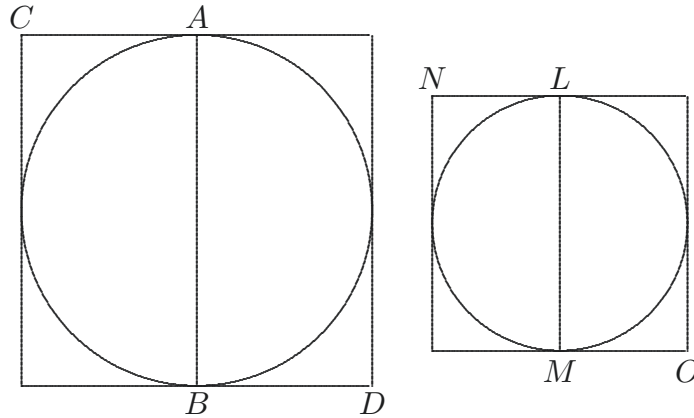


[Fig. 1]

Esto triangulum  $ABC$ , et aliud rursus  $LMN$ , sintque anguli  $A, B, C$  ipsis  $L, M, N$  respective aequales; dico triangula esse similia. Utor autem hoc *Axiomate novo*: Quae ex determinantibus (seu datis sufficientibus) discerni non possunt, ea omnino discerni non posse, cum ex determinantibus caetera  
 5 omnia oriantur. Jam data basi  $BC$ , datisque angulis  $B$ , et  $C$  (adeoque et angulo  $A$ ) datum est triangulum  $ABC$ ; itemque data basi  $MN$ , datisque angulis  $M, N$ , (adeoque et angulo  $L$ ) datum est triangulum  $LMN$ . Sed ex his datis sufficientibus singulatim discerni triangula non possunt. Nam in uno quoque data sunt basis, et duo ad basin anguli; jam basis angulis conferri nequit; nihil aliud ergo superest quod in triangulo alterutro ex  
 10 determinantibus sigillatim spectato examinari possit, quam ratio anguli cujusque dati ad rectum vel duos rectos, id est anguli ipsius magnitudo. Quae ipsa cum utrobique eadem reperiantur, necesse est triangula sigillatim discerni non posse, adeoque similia esse. Nam ut hoc in Scholii modum addam, etsi magnitudine triangula discerni possint, tamen magnitudo nisi per coobservationem vel triangulorum amborum simul, vel utriusque cum  
 15 aliqua mensura, agnoscere non potest, sed ita jam non tantum spectarentur singulatim, quod postulatur.

Vicissim manifestum est, Triangula similia etiam aequiangula esse, alioqui si esset angulus aliquis ut  $A$ , in triangulo  $ABC$ , cui nullus reperiretur aequalis angulus in triangulo  $LMN$ , utique daretur angulus in  $ABC$ , habens rationem  
 20 ad duos rectos (seu ad omnium trianguli angulorum summam), quam non habet ullus in  $LMN$ , quod sufficit ad triangulum  $ABC$ , a triangulo  $LMN$  singulatim distinguendum. Constat etiam Triangula similia habere latera proportionalia. Nam si dentur duo aliqua latera, velut  $AB, BC$ , habentia rationem inter se, quam nulla trianguli  $LMN$  latera inter se habeant, jam poterit alterum triangulum ab altero sin-  
 25 gulatim discerni. Denique si latera proportionalia sint, triangula similia erunt. Quoniam enim datis lateribus data sunt triangula, sufficit (per axioma nostrum) ex laterum ratione discrimen haberi non posse, ut ex nullo in Triangulis his singulatim spectatis alio haberi posse judicemus. Ex his vero etiam patet, Triangula aequiangula habere latera proportionalia, et  
 30 vicissim.

Eodem modo primo statim Mentis obtutu ex nostra similitudinis notione directe ostenditur, circulos esse ut quadrata diametrorum, quod Euclides demum decimo libro ostendit, et quidem per inscripta et circumscripta, rem reducendo ad absurdum, cum tamen nullis ambagibus esset opus.



[Fig. 2]

Diametro  $AB$  descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum  $CD$ : Eodemque modo diametro  $LM$  descriptus sit circulus eique circumscriptum diametri quadratum  $NO$ . Determinatio utrobique est similis, circulus circulo, quadratum quadrato, et accommodatio quadrati ad circulum, itaque (per Axioma supradictum) figurae  $ABCD$ , et  $LMNO$  sunt similes. Ergo (per definitionem similitudinis) erit circulus  $AB$  ad quadratum  $CD$ , ut circulus  $LM$  ad quadratum  $NO$ , ergo etiam circulus  $AB$  ad circulum  $LM$ , est ut quadratum  $CD$  ad quadratum  $NO$ . Quod affirmabatur. Pari ratione sphaerae ostendentur esse ut cubi diametrorum. Et in universum in similibus, lineae, superficies, solida, homologa erunt respective ut longitudines, quadrata, cubi laterum homologorum. Quod hactenus generaliter assumptum magis quam demonstratum est.

Porro haec consideratio, quae tantam praebet facilitatem demonstrandi veritates alia ratione difficulter demonstrandas; etiam novum calculi genus nobis aperuit, a calculo Algebraico toto coelo diversum, notisque pariter, et usu notarum operationibusve novum. Itaque Analysin situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat; ita ut figurae etiam non delineatae per notas in animo depingantur, et quicquid ex figuris imaginatio intelligit empirica, id ex notis calculus certa demonstratione derivet, caeteraque etiam omnia consequatur, ad quae imaginandi vis pertingere non potest. Imaginationis ergo supplementum, et ut ita dicam perfectio in hoc, quem proposui, calculo situs continetur, neque tantum ad Geometriam, sed etiam ad Machinarum inventiones, ipsasque machinarum naturae descriptiones usum hactenus incognitum habebit.