#40983.
[um 1695?]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 16 Bl. 1–20. 5 Bog. 4°. 38 S. — Gedr.: GERHARDT, *Math. Schr.* 7, 1863, S. 260–299.

Datierungsgründe: [noch]

Specimen Geometriae Luciferae.

Saepe notatum est a viris acri judicio praeditis, Geometras verissima quidem et certissima tradere, eaque ita confirmare ut assensus negari non possit, sed non illustrare animum, neque fontes inveniendi aperire, dum lector se captum quidem et constrictum sentit, capere autem non satis potest, quomodo inciderit in has casses, quae res facit ut homines Geometrarum demonstrationes magis admirentur quam intelligant, nec satis ex illis percipiant fructus ad intellectus emendationem, in aliis quoque disciplinis profuturam, quae tamen mihi potissima videtur demonstrationum Mathematicarum utilitas. Cum igitur de his rebus saepe meditanti plurima inciderint, quae ad reddendas causas fontesque recludendos facere videntur, eorum specimen placet exscribere familiari sermone ac liberiori structura, prout nunc in mentem venit, severiore illa exponendi ratione in aliud tempus servata.

Utuntur vel uti possunt Geometrae variis notionibus aliunde sumtis, nempe de eodem et diverso seu de coincidente et non coincidente, de eo quod inest vel non inest, de determinato et indeterminato, de congruo et incongruo, de simili et dissimili, de toto et parte, de aequali, majori et minori, de continuo aut interrupto, de mutatione, ac denique quod ipsis proprium est de situ et extensione.

Doctrina de coincidente aut non coincidente est ipsa doctrina logica de formis syllogismorum. Hinc sumimus quod quae coincidunt eidem tertio coincidunt inter se; si duorum coincidentium unum tertio non coincidat, nec alterum ei coincidere.

fig. 1.

Ita Geometra ostendit, punctum quo duo diametri circuli (id est rectae circulum secantes in duas partes congruas) se secant, coincidere cum puncto, quo duae aliae diametri ejusdem circuli se secant. Vid. fig. 1.

Doctrinae de eo quod inest alteri, partem aliquam etiam demonstrationibus complexus est Aristoteles in prioribus Analyticis, notavit enim praedicatum inesse subjecto, scilicet notionem praedicati notioni subjecti, quanquam etiam contra individua subjecti insint individuis praedicati. Et plura adhuc demonstrari possint universalia de continente et contento seu inexistente, utilia futura tam in Logicis quam Geometricis.

fig. 2. fig. 3. fig. 4.

Quorum et specimen dedi, ubi demonstravi, si A sit in B et B sit in C, etiam A esse in C fig. 2; item si A sit in L et B sit in L, etiam compositum ex A et B fore in L fig. 3; item si A sit in B, et B sit in A, coincidere A et B fig 4. Problemata etiam solvi, ut plura invenire numero quotcunque talia ut nihil ex ipsis componi possit novum, quod fit si ea continue in se invicem insint, ut si A sit in B et B in C et C in D etc. nihil ex his componi potest novum; quod et aliis modis praestari potest, ut si sint quinque A, B, C, D, E, et $A \oplus B$ coincidat C, et A sit in D, et denique $B \oplus D$ coincidat E, tunc nihil ex iis componi potest novi, utcunque combinentur. Unde etiam ostendo, quomodo plura dati numeri quoad coincidentiam et inexistentiam sese habere debeant, ut inde institui possint combinationes utiles ad componendum aliquid novum. Et in his versatur pars Scientiae Combinatoriae generalis de formulis universe acceptis, cui non Geometriam tantum, sed et Logisticam seu Mathesin universalem de Magnitudinibus et Rationibus in genere tractantem subordinari alias ostensum est.

Sequitur doctrina de determinato et indeterminato, quando scilicet ex quibusdam datis quaesitum ita circumscriptum est, ut nonnisi unicum reperiri possit, quod his conditionibus satisfaciat. Datur et semideterminatum, cum non quidem unicum, sed plura, certi tamen numeri seu numero finita exhiberi possunt, quae satisfaciunt.

fig. 5

Sic datis duobus punctis A, B determinata est recta AB (fig. 5) seu via minima ab uno ad aliud; sed si in plano quaeratur punctum C, cujus distantiae a punctis A et B datis sint magnitudinis datae, problema est semideterminatum, nam duo puncta in eodem plano reperiri possunt, nempe C et (C) quae satisfaciunt quaesito. At non nisi unicus reperiri potest circulus cujus circumferentia per data tria puncta A, B, C transeat. Et proinde si duo circuli sint propositi, et inter ratiocinandum reperiatur, unumquemque eorum per tria proposita puncta transire, certum est circulos nomine tenus duos revera esse unum eundemque seu coincidere. Utrum putem conditiones datae sint determinantes, ex ipsismet cognosci potest, quando tales sunt, ut rei quasitae generationem sive productionem contineant, vel saltem ejus possibilitatem demonstrant, et inter generandum vel demonstrandum semper procedatur modo determinato, ita [ut] nihil uspiam relinquatur arbitrio sive electioni. Si enim ita procedendo nihilominus ad rei generationem vel possibilitatis ejus demonstrationem perveniatur, certum est problema esse penitus determinatum.

Hinc porro multa insignia Axiomata maximique usus deduxi, quae tamen non satis video observata. Ex his potissimum est, quod determinantia pro determinato aliud rursus determinante, in hac nova determinatione possunt substitui, determinatione hac salva.

fig. 6

Sic si rectam indefinitam per duo puncta A et B (fig. 6) transeuntem dicamus esse locum omnium punctorum determinate se habentium ad A et B seu sui A et B situs unicorum, demonstro inde duobus aliis punctis in eadem recta sumtis ut C et A (facilitatis nunc et brevitatis causa unum ex duobus prioribus hic rursus assumando) etiam eandem rectam ad haec duo puncta C et A esse determinatam, seu quodlibet punctum in eadem recta esse sui situs unicum ad A et C. Demonstratio est talis: Sit recta per A et B, cujus punctum quodcunque ut L est sui ad A et B situs unicum, ita ut non possit adhuc aliud punctum inveniri eodem modo se habens ad A et B (quod est proprietas recta), seu A. B. L. un. (sic enim scribere soleo determinationem) sumaturque in eadem recta aliud punctum C, dico quodlibet punctum rectae, ut L, etiam esse sui situs unicum ad A et C, seu A. C. L un. Nam A. B. L un. (ex hyp.) et A. B. C. un. (quia C est in recta per A, B); jam in determinatione posteriore tollatur B ope determinationis prioris, pro B substituendo A, L (per hoc praesens a x i o m a , quia B determinatur ex A. L); itaque in posteriori determinatione pro A. B. C. habebimus A. A. L. C. un. Sed repetitio ipsius A hic est inutilis, seu si A. A. L. C. est un., etiam A. L. C est un. seu L est sui situs unicum ad A et C, quod demonstrandum proponebatur.

Unde videmus ex hoc exemplo nasci novum genus calculi hactenus a nemine mortalium usurpati quem non ingrediuntur magnitudines, sed puncta, et ubi calculus non fit per aequationes, sed per determinationes seu congruitates et coincidentias. Determinatio enim resolvi potest ope congruitatis in coincidentiam hoc modo: A. B. L. un. id est si situs A. B. L congruat cum situ A. B. Y, coincident L et Y. Soleo auem concidentiam notare tali signo ∞, et congruitatem tantum tali signo $\propto$. Et proinde A. B. L un. idem valet quod propositio conditionalis sequens: Si sit A. B. $L \propto A$. B. Y, erit $L \infty Y$, ubi literam Y adhibeo pro puncto indefinito, ad imitationem Algebristarum quibus ultimae literae, ut x, y, significare solent magnitudines indefinitas. Nam quodcunque punctum assumas, ut Y, quod eodem modo se habeat ad puncta A et B, quo L se habet ad puncta A et B, id necesse est coincidere ipsi L, posito scilicet situm L ad A et B esse unicum, seu L esse in recta transeunte per A et B.

Transeamus igitur ad explicandas congruitates. Congrua sunt, quae nullo modo discerni possunt, si per se spectentur, ut in fig. 5 triangula duo ABC et $AB(C)$ quorum unum nihil prohibet alteri applicari, ut coincidant. Sola igitur nunc positione discernuntur seu relatione ad aliquod aliud jam positione datum ut aliquo puncto L dato, fieri potest, ut ABC aliter se habeat ad L. quam $AB(C)$ se habet ad L, verbi gratia si L sit propius ipsi C quam ipsi (C). Necesse est tamen, ut aliud (L) inveniri possit, quod eodem modo se habeat ad $AB(C)$ quo L se habet ad ABC, ita ut congrua sint $ABCL$ et $AB(C)(L)$, alioqui si tale quid fieri non posset pro $AB(C)$ quod fieri potest pro ABC (ita ut non posset (L) inveniri pro illo, ut L pro hoc), eo ipso discerni possent ABC et $AB(C)$. Designo autem ita (fig. 7) $A.B.C \propto L.M.N$, quod significat eodem modo inter se sita esse tria puncta A, B, C, quo tria puncta L, M, N. Hoc autem intelligendum est respective secundum ordinem praescriptum, ut scilicet cum congruere seu coincidere seu sibi applicari posse intelliguntur $A.B.C$ et $L.M.N$, coincidat A ipsi L, et B ipsi M, et C ipsi N. Hinc si sit $A.B.C \propto L.M.N$, sequitur etiam $A.B \propto L.M$, et ita in caeteris. At vero ut colligamus $A.B.C \propto L.M.N$, opus est prius probari $A.B \propto L.M$ et $A.C \propto L.N$ et $B.C \propto M.N$, tum demum enim licebit secure componendo dicere $A.B.C \propto L.M.N$. Ita videmus (fig. 8) licet triangula ABC et LMN duo latera aequalia habeant, AB ipsi LM, et AC ipsi LN, tamen quia tertia aequalia non habeant, AB ipsi LM et AC ipsi LN, tamen, quia tertia aequalia non habent, BC et MN, non esse congrua. Quomodo autem in universum congruitas combinationum gradus altioris possit colligi ex congruitatibus combinationum gradus inferioris, et quod non opus sit omnibus ternionibus ad inveniendam congruitatem quaternionis, sed tribus tantum, et ad colligendam congruitatem quinionum, quinque ternionibus; senionum, septem ternionibus, et ita porro in infinitum, infra apparebit, cum de similitudinibus dicemus.

Patet autem quoque generaliter ex respective congruis omnibus combinationibus unius gradus semper colligi posse congruas esse omnes combinationes alterius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus omnes terniones, quia ex omnibus combinationibus unius gradus, verbi gratia ex omnibus binionibus quatuor rerum congruis, colligi potest ipsa quatuor rerum combinatio totalis seu quaternio $A.B.C.D$ congrua cum $L.M.N.P$. Jam ex congruitate combinationum totalium sequitur quaelibet combinatio inferior seu quaevis ternio respondenti congrua, ergo ex omnibus binionibus omnes terniones.

Discimus ex his insigne discrimen congruitatum a coincidentiis et inexisteniis seu comprehensionibus. Nam (fig. 9) si recta AB coincidat cum recta LM, et simul recta AC

coincidat cum LN, etiam recta BC coincidet cum recta MN. Eo ipso dum coincidunt AB et LM, coincidunt etiam puncta A cum L, et B cum M; et eo ipso dum coincidunt AC et LN, coincidet etiam punctum C cum puncto N; cum ergo puncta A, B, C ipsis L, M, N respective coincidant, adeoque B, C cum L, M, etiam recta BC et MN coincident. Ex natura rectae quoad inexistentias alibi ostendi, si A insit ipsi L, et B ipsi M, etiam $A \oplus B$ inesse ipsi $L \oplus M$, et si $A \oplus B$ insit ipsi $L \oplus M$, et $A \oplus C$ ipsi $L \oplus N$, etiam $A \oplus B \oplus C$ inesse ipsi $L \oplus M \oplus N$, quem argumentandi modum in congruitatibus et similitudinibus imitari non licet.

Ex his jam quae diximus de discrimine inter coincidentias et congruitates, ratio porro profluit, cur congrua sint triangula ABC et $(L)(M)(N)$(fig. 9), si latera AB et $(L)(M)$ itemque AC et $(L)(N)$ congrua sint, licet de tertiis AC et $(M)(N)$ nulla fiat mentio, modo anguli ad A et (L) congrui sint. Nam si recta $(L)(M)$ sit congrua rectae AB, et recta $(L)(N)$ recta AC, et angulus quoque ad (L) angulo ad A, tunc possunt rectae $(L)(M)$ et $(L)(N)$ transferri in AB et AC, salvo suo situ, adeoque $(L)(M)(N)$ potest applicari ad ABC, ita ut coincidant AB et LM, item AC et LN; ergo ex natura coincidentiae coincident etiam BC et MN; itaque si tam rectae comprehendentes quam anguli earum sint congrui, etiam bases erunt congruae, totumque adeo triangulum triangulo.

Et ex hoc ipso exemplo insigne hoc Axioma magnique usus illustrari potest: quae ex congruis eodem modo determinantur, ea sunt congrua. Sic quia generaliter ex duabus rectis magnitudine datis, et angulo eorum positione et magnitudine dato, determinatum seu positione datum est triangulum, hinc si duo sint triangula ABC, $(L)(M)(N)$ data, habentia crura AB cum $(L)(M)$, et AC cum $(L)(N)$ congrua, itemque angulum quem comprehendunt congruum, angulum A angulo (L), congrua erunt triangula ipsa. Similiter quia ex tribus rectis magnitudine datis, trianguli etiam anguli magnitudine dati sunt, adeoque omnia determinata sunt, quae diversa congruentiam impediunt; hinc si duo triangula tres rectaes habeant respective aequales, ac proinde congruas (rectae enim aequales congruae sunt), ipsa triangula congrua erunt. Et haec attentius considerata deprehendetur coincidere cum methodo superpositionum Euclidea.

Sunt et alia axiomata huc pertinentia, ut quae congrua sunt eidem, congrua sunt inter se; et quae congrua sunt inter se, eorum unum si tertio incongruum sit, etiam alterum tertio incongruum erit, quae tamen corollaria sunt tantum axiomatum de eodem et diverso. In iis enim quae congrua sunt, omnia eadem sunt, praeter positionem, ita ut solo differant numero. Et in universum quicquid de uno congruorum fieri dicive potest, id de altero quoque fieri potest et dici, hoc uno excepto, quod ea quae in uno adhibentur, numero differunt seu positione ab iis quae in alio adhibentur. Ita congruere intelligemus non tantum duas ulnas seu duos pedes, sed et duas libras, abstracte sumtas, duas horas, duos aequales gradus velocitatis. Notandum est etiam si duorum corporum ambitus congrui sint, etiam ipsa corpora esse congrua, quia si termini actu congruant seu coincidant, etiam corpora coincident. At non necesse est superficies et lineas coincidere aut congruas esse, quarum extrema coincidunt aut congrua sunt. Illud tamen in universum dici potest, duo extensa coincidere aut congrua esse, si coincidant aut congrua sint ea in ipso quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum externo possunt esse communia. Hinc superficies et lineae cum ubique ab externo attingi possint, non vero solida, terminos earum congruos esse aut coincidentes non sufficit. In genere autem ea est natura spatii, extensi (adeoque et corporis quatenus nihil aliud quam spatium adesse in eo concipitur), ut in internis sit ubique congruum et indiscernibile (ut si in media aqua agam aut in mediis tenebris palpem nec quicquam offendam) tantumque per ea discerni possit, quae ab externo attingi possunt, seu ipsi cum alio (cum quo nullam licet partem communem habet) communia sunt. Hinc quoque si duae superficies reperiantur uniformes aut lineae, extremis congruis aut etiam actu congruentibus, ipsae congruae erunt vel actu coincident.

Ex congruis oriuntur aequalia. Nempe quae congrua sunt; aut transformatione si opus sit congrua reddi possunt, ea dicuntur aequalia. Sic in fig. 10 triangula BAD, BCD, BCE, BFE sunt congrua, ideoque aequalia; quia et triangulum EBD aequale est quadrato $ABCD$, licet enim congrua non sint triangulum et quadratum, tamen hoc casu ex triangulo transpositione partium fieri potest quadratum priori congruum, nam si trianguli EBD unam partem BCD transferas in congruam BFE, manente altera parte ECB, tunc ex BFE et ECB fit quadratum $BCEF$ congruum quadrato $ABCD$. Solemus autem aqualitatem designare signo =, hoc est $A = B$ significat A et B aequalia.

Aequalia etiam dici possunt quorum eadem est magnitudo. At magnitudo est attributum quoddam rerum, cujus certa species nulla definitione potest determinari nullisque certis notionibus, sed opus est fixa quadam mensura quam licet consulere, et proinde si Deus universum orbem cum omnibus partibus proportione eadem servata redderet majorem, nullum esset principium id notandi. Una tamen re fixa sumta, tanquam mensura, hujus applicatione ad alias res adhibitisque repetitionum numeris magnitudo quoque aliarum cognosci potest. Atque ita magnitudo determinatur per numerum partium, quae inter se sunt aequales, vel certa quadam regula inaequales. Et licet aliqua res sit incommensurabilis respectu mensurae vel respectu rerum, quibus mensura repetita exacte congruit, tamen continuata in infinitum subtractione quoties fieri rei ex mensura vel mensurae ex re, residuique ex eo quod subtractum est, tunc ex progressione numerorum repetitiones exprimentium cognoscitur rei quantitas respectu mensurae. Et proinde aequalia sunt quae eodem modo se habent ad eandem mensuram respectu repetitionis, eaque eo ipso patet fieri posse congrua, cum in partes congruentes singulas singulis eodem modo resolvantur.

Ex his etiam intelliguntur, quid Mathematici vocent rationem seu proportionem. Si enim duo sint A et B, et unum A accipiatur pro mensura, tunc alterius B magnitudo exprimetur per numerum aliquem (vel numerorum seriem certa lege procedentem) posito A exprimi per unitatem. Sed si neutra sit mensura, tunc numerus exprimens B per A, quasi A esset mensura seu unitas, exprimit rationem seu proportionem ipsius A ad B. Et in universum expressio unius rei per unam aliam homogeneam (seu in res congruas resolubilem) exprimit unius rationem ad aliam, ut proinde ratio sit simplicissima duorum quoad magnitudinem relatio, in qua scilicet nihil assumitur tertii ipsis homogenei ad magnitudinem unius ex magnitudine A et B (fig. 11) velimusque earum rationem ad se invicem determinare, ponamus A esse majus et B minus, igitur ab A detrahamus B quoties id fieri potest, verbi gratia 2 vicibus, et restare C; hoc C necessario minus est quam B, ideoque a B ipsum C rursus subtrahatur quoties fieri potest, ponamus autem subtrahi posse 1 vice et residuum esse D, et a C detrahi posse D rursus 1 vice et residuum esse E, denique a D posse detrahi E 2 vicibus et residuum esse Nihil. Patet fore $A = 2B + C$ (1) et $B = 1C + D$ (2); ergo pro B in aequ. 1. substituendo valorem expressum in aequ. 2. $A = 2C + 2D + 1C$ (3) seu $A = 3C + 2D$ (4). Rursus $C = 1D + E$ (5); ergo (ex aequ. 4 et 5) $A = 5D + 6E$ (6), et (ex aequ. 2 et 5) $B = 2D + E$ (7). Denique $D = 2E$ (8) Ergo (ex aequ. 6 et 8) fiet $A = 13E$ (9) et (ex aequ. 7 et 8) $B = 5E$ (10). Unde videmus E esse communem omnium mensuram maximam, et posita E unitate, fore $A = 13$ et $B = 5$. Quaecunque autem assumatur unitas, tamen A et B esse inter se ut 13 et 5 numeros, et A fore tredecim quintas ipsius B seu $A = \frac{13}{5}B$ (id est $A = \frac{13}{5}$ si B esset unitas) nempe A est $13E$, est autem E quinta ipsius B; contra B fore quinque decimas tertias ipsius A seu $B = \frac{5}{13}A$, nam $B = 5E$, at E est una tertia decima ipsius A. Patet autem quantitates homogeneas ipsis A et B hic provenientes ordine esse $\overset{\mathrm{A}}{13E}\ \overset{\mathrm{B}}{5E}\ \overset{\mathrm{C}}{3E}\ \overset{\mathrm{D}}{2E}\ \overset{\mathrm{E}}{1E}$, at numeros subtractionum seu quotientes esse 2, 1, 1, 2. Quodsi non possimus pervenire ad ultimum aliquod (ut E hoc loco) quod caetera omnia sua repetitione exacte metiatur, ita ut A et B in partes ipsi huic mensurae congruentes, atque adeo inter se, resolvi nequeat, tunc non quidem ad valores hujusmodi numeris expressos quos sola unitatum repetitio efficit, perveniemus, attamen ex ipsa progressione quotientium cognoscere possumus et determinare speciem rationis; ut enim hoc loco data serie quotientium 2, 1, 1, 2 datur ratio inter A et B ubi detractionibus factis talis quotientium series prodit, ita etiamsi series progrediatur in infinitum, quod fit in iis magnitudinibus quae inter se dicuntur incommensurabiles, tamen modo seriei progressio data sit, eo ipso ratio magnitudinum erit data, et quo longius continuabimus seriem, eo propius accedemus.

Sed tamen dantur infiniti alii modi exprimendi magnitudines sive per series sive per quasdam operationes aut quosdam motus. Sic a me inventum est quadrato diametri existente $\frac{1}{1}$, circulum esse $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. hoc est si quadratum diametri ponatur esse pes quadratus (diametro existente pede), Circulum esse quadratum diametri semel, demta (quia nimium sumsimus) ejus tertia parte, adjecta (quia nimium demsimus) ejus quinta parte, demta (quia nimium readjecimus) septima parte, et ita porro secundum seriem numerorum imparium continuatim intelligendo, series ista circuli magnitudine minus differt quam quaevis quantitas data, ac a proinde ei coincidit. Nam si dicamus $1 - \frac{1}{3}$, error minor est quam $\frac{1}{5}$, alioqui addita $\frac{1}{5}$ non adderemus nimium; et rursus si dicamus $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, error minor est quam $\frac{1}{7}$, alioqui detracto $\frac{1}{7}$ non detraheremus nimium, et ita porro. Semper ergo aliquousque continuando error minor est quam fractio proxime sequens; at si data sit quantitas quaevis utcunque parva, reperiri potest fractio aliqua exprimens adhuc minorem.

Sed inprimis ad usum communem calculandi in numeris et praxin confert expressio magnitudinum per numerum partium progressionis Geometricae, verbi gratia decimalis. Sed quia ipsa in exigua figura bene exprimi non potest, adhibeamus Bimalem, quae et naturaliter prima et simplicissima est. Nempe rectam AB in fig. 12 dividamus in duas partes aequales seu duas dimidias, et quamlibet dimidiam rursus in duas partes aequales, habebimus quatuor quartas, et quartas rursus bisecando habebimus octo octavas, et ita porro sedecim sedecimas etc. Eodem modo possimus rectam dividere in 10, 100, 1000, 10000 etc. partes. Sit jam quantitas CD aestimanda per scalam partium aequalium et geometrica progressione descendentium quam fecimus. Applicemus ipsam CD scalae AB et C quidem ipsi A, videamusque quorsum in scala nostra cadet altera extremitas D. Et primum conferamus D cum punctis majorum divisionum, inde gradatim progrediendo ad minores. Et cum CD sit minor quam scala AB (nam si major esset, prius ab ea detraxissemus scalam quoties id fieri potuisset) cadat D inter A et B; videmus autem esse $CD = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ et adhuc aliquid praeterea, minus tamen quam $\frac{1}{32}$; itaque si scala non sit ulterius subdivisa, expressio ista sufficiet saltem ad hoc, ut error sit minor quam $\frac{1}{32}$. Quodsi adhuc semel subdiviserimus, poterimus per scalam AB talem habere expressionem ipsius CD, ut error minor quam $\frac{1}{64}$. Et ita porro. Ita similiter, si scala divisa sit in partes 10, 100, 1000, 10000, et ita porro, efficere possumus ut error sit minor quam $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ etc.

Hac methodo insigne oritur commodum, ut omnes quantitates quae per fractas essent exprimendae, quantumlibet exacte in integris exprimantur. Sit enim septima pars pedis, aut quaecunque alia portio vel fractio. Sumamus 100000 etc. idque dividamus per 7 continuando quoad lubet, prodibit 1428571428571428 etc. seu $\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{8}{10000}$ etc. seu $1x + 4x^2 + 2x^3 + 8x^4$ etc. posito $x = \frac{1}{10}$. et x^2 esse $\frac{1}{100}$ seu quadratum de $\frac{1}{10}$, et x^3 esse cubum de $\frac{1}{10}$, et ita porro. Semperque error minor est quam una ex portionibus ultimis, ubi destitimus, hoc loco minor quam $\frac{1}{10000}$, ubi id praeterea summe notandum est, quod semper prodit periodus, cum quantitas unitati propositae est commensurabilis, ut hoc loco 142857 recurrit in infinitum. Unde perfecte cognoscitur natura progressionis. Patet autem haec locum habere, sive per calculum sive actuali applicatione ad scalam propositam magnitudinem aestimemus. Progressio autem Bimalis hoc habet insigne, quod coeifficientes seu numeri per quos potentiae x, x^2, x^3 etc. multiplicantur, sunt tantum 1 vel 0.

Sunt adhuc alii modi exprimendi magnitudineas, licet enim ipsae sint incommensurabiles unitati, fieri tamen potest, ut quaedam earum potentiae seu aliqua ex ipsis enata unitati seu scalae commensurari possint. Quod ut exemplo appareat, inspiciatur fig. 13, ubi recta est AB, verbi gratia pes, ejusque quadratum seu pes quadratus est $ABCD$. Sit alia recta BD aequalis ipsi AB, ita ut angulus ABD ad B sit rectus, et ducatur recta AD. Et super recta BD $(= AB)$ sit quadratum $BEFD$, aequale quadrato $ABCD$ (seu AC) ac denique super recta AD sit quadratum $ADGH$. Jam constat non tantum ex Euclideis Elementis, sed etiam ex ipsa inspectione figurae, quadratum $ADGH$ esse duplum quadrati AC seu aequari quadratis AC et BF simul sumtis. Ductis enim diagonalibus AG, DH, se secantibus in L, resolutum erit quadratum $ADGH$ in quatuor triangula ALD, DLG, GLH et HLA, aequalia et congrua inter se, at quadratum AC ducta diagonali DB resolvitur in duo hujusmodi triangula; est ergo quadratum $ADGH$ duplum quadrati AC, et proinde quadratum seu potentia rectae AB (nempe quadratum AC) quadrato seu potentiae rectae AD (nempe quadrato $ADGH$) commensurari potest. Sed videamus jam an ipsae rectae AB et AD communsurari possint, sive ambo per numeros exprimi, rationales scilicet numeros, qui per repetitionem unitatis seu certae alicujus portionis aliquotae ipsius unitatis (quae repetitione sua unitatem exhaurit) exprimi possunt. Ponamus ergo AB esse 1 (nempe unum pedem), quaeritur quid sit AD; is debet esse numerus qui multiplicatus per se ipsum (seu qudratus) producat 2, duplum scilicet ejus quod AB qudratus producit. Verum talis numerus non potest esse integer. Nam debet esse minor quam 2 (quia 2, 3 vel alii majores quadrati seu in se ducti producunt plus quam 2, nempe 2 in 2 dat 4, et 3 in 3 dat 9 etc.), sed tamen debet esse major quam 1 (quia 1 in 1 dat 1, non 2), cadit ergo inter 1 et 2, ideo non potest esse integer, sed fractus. Verum nec ullus numerus fractus id praestat. Quia omnis numeri fracti quadratum est numerus fractus, at vero 2 est integer qui debet esse qudratum ipsius AD, ideo AD neque est numerus integer neque fractus, adeoque nec rationalis, sed surdus. Et ideo vel exprimitur Geometrice ductu linearum, ut in figura, vel calculo et quidem vel mechanice per approximationem, vel exacte, ut si dicam esse $\frac{1414}{1000}$ seu 1414 millesimae pedis vel accuratius $\frac{14142136}{10000000}$ (seu 14142136 decimo-millesimo-millesimae), nam haec fractio in se ducta dabit $\frac{20000001}{10000000}$ et paulo plus, ita ut differentia ejus a 2 sit minor una millesimo-millesima. Exacte exprimitur AD vel in numeris communibus per seriem infinitam, vel in numeris surdis. Quomodo per seriem infinitam exprimatur AD ex AB, hic exponere prolixius foret. Algebraice vel in surdis exprimitur AD per notam faciendae extractionis radicis quadraticae ex 2, seu posita $AB = 1$, erit $AD = \sqrt[2]{2}$, hoc est radix quadratica de 2, seu numerus cujus quadratum est 2. Quae nota surda utilis est in calculo, quia per multiplicationem in se ipsam evanescit, quod de Nota Triscetionis Anguli vel aliqua alia cum calculo nihil commune habente dici non aeque potest.

Operae pretium autem hoc loco erit verum aperire fontem quantitatum incommensurabilium, unde scilicet ipsae in rerum natura oriantur. Horum igitur causa est a m b i g u i t a s , seu cum quaesitum ex datis est semideterminatum (de quo supra) ita ut plura (numero tamen finita) satisfaciant, nec datis aliqua ratio applicari possit unum ab altero discernendi. Quod in hoc ipso exemplo praecedentis paragraphi ostendamus, ubi quarebamus numerum qui in se ipsum ductus faciat 2. Sciendum autem est tales numeros semper esse binos, nam 4 tam ex $+2$ in $+2$, quam ex -2 in -2 ducto produci potest. Itaque $\sqrt[2]{4}$ est numerus ambiguus, significatque tam $+2$ quam -2; similiter $\sqrt[2]{9}$ est numerus ambiguus significatque tam $+3$ quam -3. Ergo $\sqrt[2]{2}$ est numerus ambiguus, tamque satisfacit $+\dfrac{1414}{1000}$ quam $-\dfrac{1414}{1000}$!. Sua natura igitur seu generaliter $\sqrt[2]{a}$ non potest reduci ad quiddam rationale quia omne rationale est determinatum; per accidens tamen, hoc est in quibusdam numeris qui scilicet per talem involutionem sunt orti, procedit extractio. In lineis etiam ostendi potest ambiguitas. Sit (fig. 14) circulus cujus diameter BM sit 3 et portio ejus AB sit 1. Ex puncto A educatur ad angulos rectos ipsa AD occurrens circulo in D, erit $AD = \sqrt[2]{2}$ seu quadrat. AD erit 2. Nam ex natura circuli quadratum ab AD aequatur rectangulo sub BA occurrens circulo in D, erit $AD = \sqrt[2]{2}$ seu quadrat. AD erit 2. Nam ex natura circuli quadratum ad AD aequatur rectangulo sub BA seu 1 et sub AM seu 2, quod rectangulum est 2. Verum haec ipsa constructio ostendit pari jure quo punctum D invenimus, potuisse etiam inveniri punctum (D) rectam ab A educendo via contraria, et ideo si AD est $+\dfrac{1414}{1000}$, erit $A(D)$ $-\dfrac{1414}{1000}$. Quae causa etiam est cur talia problemata non possint per solas rectas solvi, quia recta rectam tantum in uno puncto secat, at circulus a recta secatur in duobus punctis, ac proinde problemata hujusmodi ambigua solvit.

Imo hae surdae expressiones nobis etiam viam praebent quantitates impossibiles seu imaginarias calculo exprimendi. Nam recta quidem omnis aliam rectam ejusdem plani (nisi parallelae sint) secat; at circulus rectam cujus distantia a centro major est circuli radio, non secat, et problema quod per talem intersectionem solvi deberet, est imaginarium seu impossibile, scilicet in quantitatis quaesitae valore occurit $\sqrt[2]{-aa}$ (vel simile quid) cujus qudratum est $-aa$, quod ideo impossibile est quia talis numerus $\sqrt[2]{-aa}$ non est positivus neque privativus, seu linea quae quaeritur neque motu anirorsum neque motu retrorsum exhiberi potest. Sive enim positivus esset sive privativus, tamen quadratum ejus foret positivum, ut jam ante monuimus, cum tamen quadratum ejus negativum fiat. Inserviunt tamen etiam imaginariae istae quantitates ad reales exprimendas adeo ut reales quaedam calculo exprimi non possint, nisi interventu imaginariarum, ut alibi ostensum est, sed tunc imaginariae virtualiter destruuntur.

Sed nos explicata satis natura magnitudinis atque mensurae redeamus ad aequalitatis considerationem, ubi notandum est posse duo etiam ostendi aequalia, si ostendatur, unum neque minus neque majus esse altero, et tamen ea esse homogenea, seu unum transformari posse in aliud. Sic sphaerae Archimedes aequalem exhibet cylindrum quendam, parabolae aequale trinangulum; patet autem utique sphaeram transformari posse in cylindrum, si liquidum sphaeram implens in cylindrum effundatur. Parabolam in triangulum transformari posse, seu triangulum et parabolam homogenea esse ostendi potest, quia eorum ratio potest inveniri eadem quae rectae ad rectam. Hoc ita probo: Sint (fig. 15) prismata seu cylindriformia corpora duo AE et LQ, unius AE basis seu sectio horizonti parallela sit parabola ut CDE (vel aliae ei congruae), alterius LQ basis sit triangulum NPQ. Ponatur prius AE esse liquore plenum usque ad altitudinem AB, qui si inde effundatur in LQ, ponamus hoc impleri usque altitudinem LM; portionem ipsius LQ impletam LMR aequalem esse portioni ipsius AE eodem liquore prius impletae, nempe ABF. Jam quantitates talium cylindriformium portionum fiunt ex altitudine ducta in basin, seu sunt in composita ratione altitudinum et basium, ergo cum aequales sint portiones, erunt bases reciproce ut altitudines seu CDE parabola ad NPQ triangulum erit, ut recta LM ad rectam AB; quodsi ergo aliud fiat triangulum, quod etiam sit ad triangulum NPQ ut recta AB ad rectam LM, quod per communem Geometriam fieri posse constat (et primo etiam mentis obtutu intelligitur ex natura similium triangulorum, de qua mox), patet dari aequale triangulum huic parabolae, seu parabolam in triangulum posse transformari.

Etiam ex generatione seu motu cognoscimus magnitudines, ut hoc loco ex motu baseos per altitudinem, qua cylindriforme corpus generatur, datur ratio tale corpus aestimandi; sic ex ductu rectae in rectam aestimatur rectangulum sub duabus rectis comprehensum. Hac methodo superficies quoque et solida rotatione genita aestimantur, et huc pertinet pareclarum illud theorema, quod generatum motu alicujus extensi aequatur generato ex ipso extenso ducto in viam centri gravitatis, cujus ampliationes quasdam satis miras alibi dedi. Possunt tamen hae veritates demonstrari reductione ad absurdum, vel adhibita praecedenti methodo, dum ostenditur aliquid neque majus neque minus esse posse quam dicitur.

Methodus quoque per indivisibilia et infinita, seu potius per infinite parva, seu infinite magna, seu per infinitesima et infinitupla praeclari est usus. Continet enim resolutionem quandam quasi in communem mensuram, licet data quantitate quavis minorem, seu modum, quo ostenditur negligendo aliqua, quae errorem faciunt minorem quovis dato adeoque nullum, duorum quae comparanda sunt, unum in aliud esse transponendo transformabile. Sciendum est autem non componi lineam ex punctis, nec superficiem ex lineis, neque corpus ex superficiebus; sed lineam ex lineolis, superficiem ex superficieculis, corpus ex corpusculis indefinite parvis, hoc est ostenditur duo extensa posse comparari, resolvendo ipsa in particulas aequales vel inter se congruas, utcunque parvas, tanquam in communem mensuram, erroremque minorem esse semper una ex talibus particulis, vel saltem finitae ad ipsam rationis constantis aut decrescentis; unde patet errorem talis comparationis esse quovis dato minorem. Pertinet etiam huc Methodus Exhaustionum, nonnihil diversa a priore, quanquam tandem in radice conveniant. Ubi ostenditur quomodo series quaedam magnitudinum infinita sit, quarum haberi potest prima et ultima, quae continue ad quandam propositam accedunt, ita ut discrimen tandem fiat minus dato, adeoque in ultimo nullum, sive exhaustum sit. Itaque ultima seriei hujus magnitudo (quam haberi diximus) aequatur propositae Magnitudini; sed haec attingere tantum hoc loco visum est.

Nondum definivimus quid sit majus et minus, quod omnino faciendum est. Dico ergo, Minus aliquo esse quod parti ejus aequale est, seu (fig. 16) si duo sint A et B, et sit p pars ipsius A aequalis ipsi B, tunc A appellamus Majus, et B Minus. Hinc statim demonstratur celebre illud Axioma, totum esse majus sua parte, assumto tantum alio axiomate per se vero seu identice, quod nimirum unaquaeque res quantitate praedita tanta est quanta est, seu sibi ipsi aequalis est, seu quod omne tripedale est tripedale etc. Demonstratio uno syllogismo comprehensa talis est: Quicquid aequale est ipsi p parti totius A, id est minus est quam totum A (ex definitione minoris); jam p pars totius A aequalis est ipsi p parti totius A, nempe sibi ipsi (per Axioma identicum seu per se verum), ergo p pars totius A est minor quam totum A, seu totum est majus parte.

Sed hic jam opus est, ut nonnihil explicemus quid sit totum et pars. Equidem manifestum est partem toti inesse seu toto posito eo ipso partem immediate poni, seu parte posita cum quibusdam aliis partibus eo ipso totum poni, ita ut partes una cum sua positione sumtae tantum nomine tenus a toto different, ac nomen totius compendii causa pro ipsis tantum in rationes ponatur. Sunt tamen et aliqua quae insunt, etsi non sint partes, ut puncta quae sumi possunt in recta, diameter qui sumi potest in circulo; itaque pars debet esse Homogenea toti; et proinde si sint duo A et B homogenea et ipsa A insit B, erit A totum, et B pars, adeoque demonstrationes a me alibi datae de continente et contento seu inexistente possunt transferri ad totum et partem. Quid autem Homogeneum sit, partim attigimus, partim amplius explicabimus.

Ex his autem definitionibus aequalis, majoris, minoris, totius et partis complura axiomata demonstrari possunt, quae ab Euclide sunt assumta. Totum esse majus sua parte jam ostendimus. Totum aliquo modo ex partibus componi posse, seu assignari posse partes quae simul sumtae ipsis coincidant, patet ex dictis paragrapho praecedente, ex natura scilicet inexistentium. Minus minore est minus majore, seu si A sit minus B, et B minus C, erit A minus C, seu $A+L=B$ et $B+M=C$, ergo $A+L+M=C$. Axiomata autem illa, quod aequalibus addendo vel detrahendo aequalia, fiant aequalia, aliaque hujusmodi ex eo statim demonstrantur, quod Aequalia sunt quae sunt magnitudine eadem, seu quae sihi mutuo substitui possunt salva magnitudine, et si eodem modo respectu magnitudinis tractentur (secundum omnes modos tractandi determinatos, quibus unicum tantum producitur) aequalia prodeunt. Hinc statim apparet, aequalia aequalium additione, subtractione, multiplicatione fieri aequalia; verum si ab aequalibus radices ejusdem denominationis extrahantur, sive purae, sive afflictae, non necesse est statim prodire aequalia, quia problema extrahendi radices sua natura et absolute loquendo est ambiguum. Itaque non licet dicere, quae in se ducta vel cum iisdem producant aequalia eodem modo, ea esse aequalia. Ita duo possunt dari numeri inaequales (nempe 1 et 2) quorum cujusque residuum a ternario (2 vel 1) ductum in ipsum numerum (1 vel 2) faciat aequale nempe 2.

Nunc tempus est, ut postquam de magnitudine et aequalibus diximus, etiam de specie seu forma et similibus dicamus; maximus enim similitudinis in Geometria est usus, natura autem non satis explicata habetur, unde multa per ambages demonstrantur, quae primo statim intuitu recte consideranti patent. Constat ex Euclidis libro Datorum, quaedam esse data positione, quaedam magnitudine, quaedam denique specie. Si quid ex quibusdam datis p o s i t i o n e datur. tunc aliud quod ex iisdem eodem modo (determinato) datur, erit priori coincidens seu idem numero; si quid ex quibusdam m a g n i t u d i n e detur, et aliud ex iisdem vel aequalibus eodem modo (determinato) detur, erit priori aequale; si quid ex quibusdam s p e c i e detur, et aliud ex iisdem vel similibus eodem modo determinato datur, erit ejusdem speciei cum priore seu erit simile. Denique quae similia et aequalia sunt, ea congrua sunt. Et quae magnitudine periter et specie data sunt, ea dici potest e x e m p l o vel t y p o data esse, ita ut quae ejusdem typi vel exempli sunt, id est pariter qualitatis seu formae et quantitatis, ea congrua dicantur. Porro quae nullo modo discerni possunt, neque per se neque per alia, ea utique eadem seu coincidentia sunt, et talia in rebus quarum nihil aliud quam extensio consideratur, sunt quae eandem habent positionem seu quae eidem loco actu congruunt. At sunt aliqua quae per omnia conveniunt seu ejusdem typi sive exempli sunt, et tamen differunt numero, ut rectae aequales, duo ova per omnia similia, duo sigilla in ceram uniformem ex eodem typo expressa. Haec manifestum est si per se spectentur, nullo modo discerni posse, etsi conferantur inter se. Solo erga situ ad externa discernuntur. Ut si duo ova perfecte sint similia et aequalia, et juxta se locentur, saltem notari potest unum alio orientalius aut occidentalius, vel septentrionalius aut meridionalius, vel superius aut inferius esse, vel alteri alicui corpori extra ipsa posito esse propius. Et haec dicuntur congrua, quae talia sunt, ut nihil prorsus de uno affirmari possit, quod non possibile sit etiam circa aliud intelligi solo discrimine numeri seu individui, seu positionis quae certo aliquo tempore cuique est, quia nec plura eodem tempore sunt in eodem loco, nec idem in pluribus. At similia sunt, quorum species seu definitio est eadem, seu quae ejusdem sunt speciei infimae, ut quilibet circuli sunt ejusdem speciei, et eadem definitio cuilibet competit, nec subdividi potest circulus in diversas species, quae aliqua definitione differant. Etsi enim alius possit esse circulus pedalis, alius semipedalis etc., tamen pedis nulla dari potest definitio, sed opus est typo aliquo fixo et permanente, unde mensurae rerum ex durabili materia fieri solent, et ideo quidam proposuit ut pyramides Aegypti, quae tot jam seculis durarunt et diu adhuc verisimiliter duraturae sunt, adhiberentur. Sic quamdiu ponimus nec globum terrae, nec motum siderum notabiliter mutari, poterit eadem investigari a posteris quantitas gradus terreni, quae a nobis. Si quae species eandem toto orbe et multis seculis magnitudinem servarent, ut cellae apum facere quibusdam videntur, hinc quoque sumi posset constans mensura. Denique quamdiu ponimus in causa gravitatis nihil mutari notabiliter, nec in motu siderum, poterunt posteri ope penduli discere mensuras nostras. At si quemadmodum alibi jam dixi Deus omnia mutaret proportione eadem servata, perisset nobis omnis mensura, nec possemus scire quantum res mutatae sint, quoniam mensura nulla certa definitione comprehendi adeoque nec memoria retineri potest, sed opus est reali ejus conservatione. Ex quibus omnibus discrimen inter magnitudinem et speciem, seu inter quantitatem et qualitatem elucere arbitror.

Itaque si duo sint similia, ea per se sigillatim discerni non possunt. Exempli causa duo circuli inaequales non discernentur, quamdiu unusquisque eorum sigillatim spectatur. Omnia theoremata, omnes constructiones, omnes proprietates, proportiones, respectus, qui in uno circulo notari possunt, poterunt etiam in alio notari. Ut se habet diameter ad latus polygoni cujusdam regularis inscripti vel circumscripti in uno, ita etiam se habebit in altero; ut circulus unus se habet ad quadratum suum circumscriptum, ita etiam alius ad suum; unde statim patet permutando circulos esse ut quadrata diametrorum, nam quia A est ad D ut L ad M (fig. 17) erit permutando A ad L ut B ad M. Et generaliter hinc patet, superficies similes esse ut quadrata homologarum rectarum, et corpora similia ut cubos homologarum rectarum. Hinc et Archimedes assumsit, centra gravitatis similium figurarum similiter sita esse. Itaque ut duo similia, verbi gratia duo circuli, discernantur, non opus est eos tantum sigillatim spectari, et memoria rem geri, sed opus est ut simul spectentur sibique realiter admoveantur, vel communis aliqua realis mensura ab uno ad alterum delata ipsis applicetur, vel aliquid per applicationem realis mensurae jam mensuratum aut mensurandum. Atque ita demum apparebit utrum congrua sint vel non. Nam si duorum similium aliqua homologa sint congrua, v. g. diametri duorum circulorum, aut parametri duarum parabolarum, necesse est ipsa similia etiam plane congrua adeoque et aequalia esse. Illud verum non est, si similibus addantur similia aut detrahantur, provenire similia, nisi addantur aut detrahantur eodem modo utrobique. Et generaliter quae ex similibus similiter seu eodem modo determinantur, ea sunt similia; quod si semideterminentur, cum problema ambiguum est, saltem cuilibet semideterminatorum ab una parte respondebit unum ex semideterminatis ab alia, quod ipsi simile erit. Quod et de aequalibus, congruis et coincidentibus dici potest. Si duorum similium duo homologa coincidant, duo similia erunt congrua tantum, nam quae coincidunt, ea congrua sunt, at homologis similium congruis existentibus ipsa congrua sunt.

Porro similitudinem notare soleo hoc modo $\sim$ et $A \sim B$ significat A sim. B. Ex sigillatim autem similibus non licet ut dixi colligere etiam composita similia esse, et licet sit $AB \sim LM$ et $AC \sim LN$ et $BC \sim MN$, non tamen licet concludere $ABC \sim LMN$, alioqui cum quaevis recta cuivis sit similis, concludi posset quamlibet figuram cuivis esse similem, cum tamen in congruitatibus procedat talis argumentandi ratio. At in ternionibus et altioribus combinationibus talis argumentatio procedit, quod est notabile. Nempe si similes sint omnes terniones ab una parte omnibus ternionibus ab altera parte, etiam quaterniones, quiniones etc. inde conflatae erunt similes, seu si sit (fig. 18) $ABC \sim LMN$ et $ABD \sim LMP$ et $ACD \sim LNP$ et $BCD \sim MNP$, erit $ABCD \sim LMNP$. An autem una ternionum omitti possit seu ex caeteris concludatur, videamus, verb. gr. an omitti possit $BCD \sim MNP$. Sumamus triangulo ABC simile LMN et ipsi ABD simile LMP, patet dato $ABCD$ et LMN (quod specie datum est) assumto magnitudine et positione pro arbitrio dari et LMP specie et magnitudine, cumque LM habeatur et positione (ob assumtam LM in LMN) patet P cadere in circulum triangulo LMP circa LM tanquam axem moto descriptum. In plano tamen hoc non nisi bis assumi potest P manentibus L et M, nempe vel in P vel in π (quia circuli hujus circumferentia planum in duobus punctis perforat). Ex quibus tamen P eligi debere excluso π, ostendit tertia similitudo, nam $ACD \sim LNP$, neque enim est $ACD \sim LN\pi$. Itaque in plano hoc modo omnia sunt determinata, seu ex solis tribus similitudinibus ternionum respondentium colligitur etiam similitudo quartae ternionis adeoque et quaternionis totalis, cumque in figura ascripta A, B, C, D sint in eodem plano, erunt utique etiam L, M, N, P in eodem plano. Sed absolute, in spatio si A, B, C, D utcunque posita intelligantur, videamus quid sit futurum similitudinibus ternionum ad colligendam similitudinem totalium quaternionum. Itaque cum ex duabus prioribus similitudinibus duo habemus, LMN (assumtam positione et magnitudine, datam specie) et circulum axe LM puncto P axi firmiter cohaerente circa axem rotato descriptum, hinc ex $ACD \sim LNP$, cum habita jam LN, detur LP et NP, dabitur etiam circulus axe LN puncto P axi cohaerente circa ipsum rotato descriptus. Qui duo circuli non sunt in eodem plano, sunt tamen ambo in planis ad planum LMN rectis, seu sunt ipsi ambo recti ad planum LMN. Debent etiam necessario sibi occurrere, alioqui quaesitum esset impossibile, quod tamen esse possibile aliunde constat (ex generalibus postulatis, quod cuique ubique simile haberi possit), itaque hi duo circuli sibi occurrunt. Sed duo circuli ad planum in quo centra sua habent recti, eodem modo se habent respectu plani, tam supra hoc planum quam infra planum, ergo cum occurrunt sibi, occurrent sibi tam supra quam infra planum, adeoque in punctis duobus. Superest jam $BCD \sim MNP$, ubi cum MN detur positione, et MNP specie, utique dabitur MNP typo seu magnitudine et specie, seu iterum dabitur circulus axe MN a puncto P descriptus. Cumque quemlibet eorum secet in duobus punctis, et una minimum intersectio cum utroque coincidat, seu incidant in punctum ubi duo circuli priores sese ipsi secant, alioqui problema foret impossibile, necesse est ut ambae intersectiones coincidant cum duabus prioribus intersectionibus. Unde tertius circulus nihil exhibet novi, et sufficiunt proinde tres terniones ad concludendam quartam; sed problema est semideterminatum, et res eo recidit ac si propositum fuisset datis distantiis unius puncti a tribus punctis, invenire illud quartum, quod problema est semideterminatum. Modus autem quo id hoc loco demonstravimus, egregius est et mentalis, methodusque ipsa qua inde ratiocinationem ad similia instituimus, etiam egregia est, cum prius tria puncta partim assumimus, partim obtinemus qualia oportet, unde problema pro quarto est determinatum, ut quaternio sit quaternioni similis. Pro quinione alteri simili invenienda inveniatur primum quaternio una similis, quod fit tribus triangulis seu ternionibus. Superest ad hoc unum punctum, idque plane ex datis determinatum est, datis scilicet distantiis ejus ex his quatuor punctis; itaque tantum duabus adhuc opus est ternionibus seu triangulis, quas novum punctum ingrediatur. Nempe ut ostendimus,

$$\begin{array}{llllll} \text{sint ipsis } ABC & ABD & ACD, & & \text{erit } ABCD & \text{adeoque et } BCD \\ \text{similia } LMN & LMP & LNP, & \text{simili ipsi } LMNP & & \text{simil. } MNP. \end{array}$$

Quaeritur, ex quibus praetera concludatur $ABCDE$ simile ipsi $LMNPQ$. Invenimus prius aliquod $LMNP$ simile ipsi $ABCD$, hinc cum $LMNP$ detur positione, adeoque magnitudine multo magis, et $LMNPQ$ detur specie (quia datur ei simile $ABCDE$), necesse est $LMNPQ$ dari etiam magnitudine, seu rectas LQ, MQ, NQ, PQ magnitudine dari; ergo punctum Q datur positione, nam ostensum alias est, punctum dato suo ad quatuor puncta non in eodem plano posita situ esse determinatum seu unicum. Sed ad terniones nostras redeamus, sufficit prioribus tribus ternionum similitudinibus addi has

$$\begin{array}{lll} \text{ut sint ipsis } ABE, & CDE, & \text{ut fiat } ABCDE \\ \text{similia } LMQ, & NPQ, & \text{simile ipsi } LMNPQ, \end{array}$$

ita enim ob $ABE \sim LMQ$, quia datur ABE et LM, dabitur et LQ et MQ, et ob $CDE \sim NPQ$, quia datur CDE et NP, dabitur NQ et MQ. Pro duabus $ABE \sim LNQ$ et $CDE \sim NPQ$ potuissemus etiam adhibere $ACE \sim LNQ$ et $BDE \sim LPQ$, vel $ADE \sim LPQ$ et $BCE \sim MNQ$, observando semper ut in duabus similitudinibus quas conjungimus non nisi E et Q sint communia. Hinc patet etiam ex similitudine trium quaternionum dari similitudinem quinionis. Nam ex his quinque similitudinibus ternionum ita colligo tres quaterniones,

$$\begin{array}{rrrrrr} \text{ex} & \underline{ABC}, \underline{ABD}, \underline{ACD} & \text{ex} & \underline{ABE}, ACE, BCE & \text{ex} & ACE, \underline{ADE}, CDE \\ \text{simil.} & LMN, LMP, LNP & \text{simil.} & LMQ, LNQ, MNQ & \text{simil.} & LNQ, LPQ, NPQ \\ \text{colligit} & ABCD \sim LMNP & \text{coll.} & ABCE \sim LMNQ & \text{coll.} & ACDE \sim LNPQ. \end{array}$$

Nam tribus minimum quaternionibus opus est, ut quinque terniones ad quinionem sufficientes quas lineola subducta notavimus, obtineantur: Pro senionum similitudine si velimus ut $ABCDEF$ fit $\sim LMNPQR$, faciamus ipsi $ABCDE \sim LMNPQ$, ad quod opus est quinque ternionibus supra dictis. Deinde quia omne punctum ex situ suo ad quatuor alia dato satis determinatum est, tantum opus est ut inveniamus LR, MR, NR, PR, quod fiet eodem modo quo supra assumtis tantum binis ternionum similitudinibus, nihil praeter F et R commune habentibus, nempe ut sint ipsis $\underline{ABF}$, $\underline{CDF}$, unde
similia LMR, NPR
junctis quinque similitudinibus superioribus colligitur senio $ABCDEF \sim LMNPQR$. Itaque ex tribus ternionibus seu triangulis similibus colligi potest quaternionum duarum seu pyramidum ex ipsis conflatarum similitudo; ex quinque ternionibus seu triangulis similibus (vel ex tribus pyramidibus similibus) colligi potest duarum quinionum seu pentagonorum solidorum inde conflatorum similitudo; ex septem ternionibus seu triangulis

similibus colligitur duorum hexagonorum solidorum ex ipsis conflatorum similitudo, et ita porro in infinitum, supponendo plura quam tria ex punctis non esse in uno plano. Ex ternionibus seu triangulis similibus, semel, ter, quinquies, septies, novies etc. colligitur similitudo duarum ex ipsis conflatarum ternionum, quaternionum, quinionum, senionum, septenionum etc. seu solidorum tetragonorum sive pyramidum, pentagonorum, hexagonorum, septagonorum etc. ubi nota, ex numero angulorum solidorum non statim definiri numerum hedrarum. Operae pretium autem erit etiam progressionem indagare, qua ostendatur quomodo altiores combinationes ex quaternionibus seu pyramidibus, et ex quinionibus seu pentagonis solidis, et ita porro colligantur sufficienter quod ope ternionum sufficientium jam inventarum constituere nunc in proclivi est.

Verum illud hic potissimum notandum est, eadem quae de similitudinibus diximus circa altiorum combinationum similitudines colligendas ex ternionibus, quaternionibus, quinionibus etc. ea prorsus applicari posse ad congruitates. Eodem enim modo invenitur $LMPN$ congruum ipsi $ABCD$ (fig. 18) quo invenitur $LMPN$ simile ipsi $ABCD$, hoc solo discrimine quod cum ad simile inveniendum possit assumi primum recta LM pro arbitrio, pro congruo inveniendo debet assumi LM aequalis ipsi AB, habita jam ipsa LM, unde jam triangulum LMN habetur typo (quippe simile dato ABC) quod deinde assumi potest positione, et locari ubi placet. Unde jam cum distantiae puncti P a punctis L, M, N sint datae, haberi potest punctum P, fitque $LMNP$ (solidum pyramidale) simile, vel etiam congruum ipsi $ABCD$. Et notanda est haec methodus, quae enim sufficiunt ad aliquid construendum secundum praescriptam conditionem, hoc loco similitudinem vel congruitatem, ea etiam sufficiunt ad colligendam ex ipsis illam ipsam conditionem. Illud saltem privilegium habent congruitates, quod etiam ex congruitatibus binionum seu rectarum colligi possunt, at pro similitudinibus novis ex similitudine binionum seu rectarum nihil potest colligi, sunt enim omnes rectae similes inter se; at ex similitudinibus triangulorum seu ternionum colligi possunt similitudines aliorum polygonorum etiam solidorum. Et quia ad tetragonum in plano aut tetragonum in solido simile concludendum totidem similitudinibus triangulorum opus est, forte et in altioribus polygonis sive in plano sive in solido similibus colligendis, eodem numero similium triangulorum opus erit, quod nunc discutere non vacat.

Caeterum ut duae figurae similes sint, angulos earum congruos esse opus est, quod ita ostendo, quoniam alioqui si angulos respondentes seu homologos non haberent aequales adeoque congruos, tunc per se sigilitatim possent discerni, nam si (fig. 19) angulus A non congruat angulo (A), hinc in AC sumendo $AD = AB$ et jungendo DB, similiterque in $(A)(C)$ sumendo $(A)(D) = (A)(B)$ et jungendo $(D)(B)$, non erit eadem ratio DB ad AB quae $(D)(B)$ ad $(A)(B)$, ergo vel hinc discerni possunt ABC et $(A)(B)(C)$. Contra si anguli omnes sint iidem, triangula ipsa esse similia ita ostenditur, quia ex datis uno latere et omnibus angulis datur triangulum, sunt autem latus lateri simile (recta scilicet omnis omni rectae) et angulus angulo congruus, ergo triangula ex similibus et congruis eodem modo determinantur, adeoque similia sunt. Ad Tetragona, Pentagona etc. similia efficienda (sive in plano sive in solido) non tantum opus est omnes angulos esse aequales, quia ex dato uno latere et angulis omnibus non statim datur polygonum trigono altius, et ideo quot lateribus opus est ad tetragonum, pentagonum etc. cum omnibus angulis datis determinandum, eorum laterum etiam ratio eadem assumi potest quae in tetragono et polygono alio dato, atque inde angulis existentibus iisdem similis est figura, quoniam ex his lateribus et angulis etiam construi potest figura; et in universum sive omnia latera omnesque anguli, sive aliqua tantum latera et aliqui anguli modo data sufficientia sint ad construendam figuram, et problema ex ipsis vel penitus determinatum (vel ita semideterminatum ut plura satisfactientia sint congrua aut similia inter se), tunc sufficit in his datis nullam posse notari dissimilitudinem, atque adeo angulos utrobique esse aequales, latera autem respondentia data utrobique proportionalia, ut figurae utrobique similes oriri cognoscantur. Quodsi autem duarum figurarum similium homologa aliqua vel semel sint congrua, reliqua omnia esse congrua jam supra notatum est. Ex coincidentia autem una homologorum coincidentia omnimodo colligi non potest, sed pro natura figurarum pluribus paucioribusve homologorum coincidentiis est opus ad omnimodam coincidentiam colligendam.

Hac jam arte dum anguli similium figurarum respondentes necessario sunt aequales adeoque congrui, effecere Geometrae ut non opus habeant peculiaribus praeceptis de similitudine atque adeo ut omnia quae de similitudinibus asseri possunt in Geometria possint demonstrari per congruitates. Quod quidem ad demonstrationes quae intellcctum cogunt prodest, sed ita saepe opus est magnis ambagibus, cum tamen per considerationem ipsius similitudinis brevi manu, et simplici mentis intuitu eadem praenoscere liceat, analysi quadam mentali a figurarum inspectione atque imaginibus minus dependente.

Porro eodem fere modo quo ex congruis nascuntur aequalia, etiam ex similibus nascuntur Homogenea, quod notare operae pretium est, ut enim aequalia sunt quae vel sunt congrua vel transformando possunt reddi congrua, ita Homogenea sunt, quae vel sunt similia (quorum homogeneitas per se manifesta est, ut duorum quadratorum inter se, vel duorum circulorum inter se) vel saltem transformando possunt reddi similia; quae transformatio autem fit, si nihil auferatur nec addatur et tamen fiat aliud, ubi quaedam transformatio fit partibus quibusdam servatis, ut cum quadratum $ABCD$ (in fig. 10) secamus in duo triangula ABD et BCD, eaque aliter reconjungendo (verbi gratia ABD transferendo in BCE) inde formamus triangulum DBE; quaedam vero transformatio nullas servat partes, ut cum recta transformanda est in curvam, superficies gibba in planum, et omnino rectilineum in curvilineumm vel contra; tunc ergo sola minima servantur, et transformatio est cum ex uno fit aliud, saltem minimis iisdem manentibus idque in perfecta transformatione reali per flexile aut liquidum ita servatur. At in transformatione mentali pro minimis adhiberi possunt quasi minima, id est indefinite parva, ut fiat quasi transformatio, quoniam et pro curvilineo adhibetur quasi curvilineum, nempe polygonum rectilineum; numeri laterum quantumlibet magni quodsi igitur quasi transformatio quam quaerimus hoc modo succedat; vel error seu differentia inter quasi transformationem et veram semper minor atque minor prodeat, ut tandem fiat minor quovis dato, concludi potest vera transformatio. Et quoniam aequalia sunt, quorum unum ex alio fieri potest transformando, patet etiam Homogenea esse inter se quae ipsa sunt similia, vel quibus aequalia saltem sunt similia.

Patet etiam Homogenea esse quae ejusdem rei continuo incremento aut decremento generantur, exceptis saltem minimis et maximis seu extremis. Ita si ponamus motu puncti continue crescere viam seu lineam, lineae ab uno puncto descriptae sunt homogenea inter se, quin et lineae ab uno puncto descriptae sunt homogeneae inter se, quin et lineae a diversis punctis generatae, licet enim sint dissimiles, patet dissimilitudinem illam oriri a peculiaribus quibusdam impedimentis quae non possunt mutare homogeneitatem. Idemque est de his quae motu lineae aut superficiei describuntur. Intelligendus autem est motus, quo punctum unum describens non incedit per vestigia alterius puncti describentis. Quin et continue imaginari possumus homogenea ex se invicem fieri, ut circulus transmutatus continue in ellipses alias atque alias transire potest per ellipses infinitas omnium specierum possibilium. Et in universum in Homogeneis locum habet illud axioma, quod transit continue ab uno extremo ad aliud transire per omnia intermedia; quod tamen ad angulum contactus non pertinet, qui revera medius non est, sed alterius planeque heterogeneae naturae.

Euclides Homogenea aliter definit, quorum scilicet unum ab alio subtrahendo et residuum rursus a subtracto idque semper continuando restat vel nihil vel quantitas data minor. Verum quia ista quantitas data, qua minor restare debet, etiam prius compertae homogeneitatis esse debet, compertae autem erit homogeneitatis, si sit similis alterutri, vel sei alterutram repetendo metiatur. Itaque si duabus datis quantitatibus quasi mensura communis inveniri potest minor vera mensura alterutrius utcunque parva assumta tunc dici potest duo illa inter se esse homogenea, quae definitio vera quidem est, et utilis ad demonstrationes cogentes conficiendas, sed non aeque mentem illustrat, quam ea quae ex similitudinum consideratione sumitur. Et vero altera ex altera consequitur, tali enim quasi resolutione in mensuram quasi communem ostenditur posse unum in aliud transformari, vel saltem in aliquid ei simile ita ut error quovis dato minor. Nam omnia quae mensuram communem habent, ea utique ita transformari posse, ut alterum alteri simile fiat, manifestum est.

Caeterum et de Continuo aliquid dicendum est de Mutatione, antequam ad Extensum et Motum (quae eorum species sunt) explicandum veniamus. Continuum est totum, cujus duae quaevis partes cointegrantes (seu quae simul sumtae toti coincidunt) habent aliquid commune, et quidem si non sint redundantes seu nullam partem communem habeant, sive si aggregatum magnitudinis eorum aggregato totius aequale est, tunc saltem habent communem aliquem terminum. Et proinde si ab uno transeundum sit in aliud continue, non vero per saltum, necesse est ut transeatur per terminum illum communem, unde demonstratur, quod Euclides tacite sine demonstratione assumsit in prima primi, duos circulos ejusdem plani, quorum unus sit partim intra partim extra alterum, sese alicubi secare, ut si circulus unus (fig. 20) describatur radio AC, alter radio BC, sintque AC et BC aequales inter se et ipsi AB, manifestum est aliquid B quod in una circumferentia DCB est, cadere intra circulum alterum ACE, quia B est ejus centrum, sed vicissim patet D, ubi recta BA producta circumferentiae DCB occurrit, cadere extra circulum ACE, itaque circumferentia DCB, cum sit continua et partim reperiatur intra circulum ACE partim extra, ejus circumferentiam alicubi secabit. Et in genere, si linea aliqua continua sit in aliqua superficie, sitque partim intra partim extra ejus superficiei partem, hujus partis peripheriam alicubi secabit. Et si superficies aliqua continua sit partim intra solidum aliquod partim extra, necessario ambitum solidi alicubi secabit. Quodsi sit extra tantum, vel intra tantum, et tamen peripheriae vel termino alterius occurrat, tunc eum dicitur tangere, hoc est intersectiones inter se coincidunt.

Hoc autem aliquo calculi genere etiam exprimere possumus, ut si alicujus extensi pars si $\overline{Y}$ (fig. 21) et unumquodque punctum cadens in hac partem $\overline{Y}$ vocetur uno generali nomine Y, omne autem punctum ejusdem extensi cadens extra eam partem vocetur uno generali nomine Z, adeoque totum extensum extra illam partem $\overline{Y}$ sumtum vocetur $\overline{Z}$, patet puncta in ambitum partis $\overline{Y}$ cadentia esse communia ipsi $\overline{Y}$ et ipsi $\overline{Z}$ seu partim posse appellari Y et Z, hoc est dici posse aliqua Y esse Z et aliqua Z esse Y. Totum autem extensum utique ex ipsis $\overline{Y}$ et $\overline{Z}$ simul componitur seu est $Y \oplus Z$, ut omne ejus punctum sit vel Y vel Z, licet aliqua sint et Y et Z. Ponamus jam aliud dari extensum novum, verbi gratia AXB existens in extenso proposito $\overline{Y} \oplus \overline{Z}$, et extensum hoc novum vocemus generaliter $\overline{X}$, ita ut quodlibet ejus punctum sit X, patet ante omnia omne X esse vel Y vel Z. Si vero ex datis constet aliquod X esse Y (verbi gratia A quod cadit intra $\overline{Y}$) et rursus aliquod X esse Z (verbi gratia B quod cadit extra $\overline{Y}$ adeoque in $\overline{Z}$, sequitur aliquod X esse simul et Y et Z. Unde cum alias in genere ex particularibus hoc modo nihil sequatur, tamen in continuo ex iis tale quid colligitur ob peculiarem continuitatis naturam. Ut igitur consecutionem in pauca contrahamus: Si sint continua tria $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ et omne X sit vel Y vel Z, et quoddam X sit Y, et quoddam Y sit Z, tunc quoddam X erit simul Y et Z. Unde etiam colligitur, $\overline{X} \oplus \overline{Y}$ novum aliqud continuum componere, quia quoddam Y est Z seu quoddam Z est Y.

Possumus continuum aliquod intelligere non tantum in simul existentibus, imo non tantum in tempore et loco, sed et in mutatione aliqua et aggregato omnium statuum cujusdam continuae mutationis, v. g. si ponamus circulum continue transformari et per omnes Ellipsium species transire servata sua magnitudine, aggregatum omnium horum statuum seu omnium harum Ellipsium instar continui potest concipi, etsi omnes istae Ellipses non sibi apponantur, quandoquidem nec simul coexistunt, sed una fit ex alia. Possumus tamen pro ipsis assumere earum congruentes, seu componere aliquod solidum constans ex omnibus illis Ellipsibus, seu cujus sectiones basi parallelae sint omnes illae Ellipses ordine sumtae. Si tamen concipiamus sphaeram ordine transformari in aequales Sphaeroeides, tunc non possumus exhibere aliquod continuum reale ex omnibus istis sphaeroeidibus hoc modo conflatum, quia non habemus in sola extensione plures quam tres dimensiones. Si tamen velimus adhibere novam aliquam considerationem, verbi gratia ponderis, possumus quartam exhibere dimensionem, et ita reale solidum exhibere sed heterogeneum seu partium diversi ponderis, quod suis sectionibus eidem basi parallelis repraesentet omnes sphaeroeides. Verum ne opus quidem est ascendi ad quartam dimensionem aut pondera praeter extensiones adhiberi, tantum enim pro sphaeroeidibus sumamus figuras rectas ipsis proportionales, quod utique fieri potest, et planum inde conflari poterit, cujus sectiones basi parallelae erunt sphaeroeidibus ordine respondentes proportionales atque adeo repraesentabunt continuam sphaerae in sphaeroeides transmutationem. Nam sufficit nobis assumi posse aliquam rectam AX (fig. 22) quae percurratur a puncto aliquo mobili X, incipiendo ab A, et ponamus cuilibet portioni rectae seu abscissae ut AX respondentem exhiberi posse statum sphaerae continue in sphaeroeides transmutatae salva magnitudine, repraesentatum per rectam XY seu ut rectae ordinatae XY sint ordine sphaeroeidibus respondentes, seu ut sit ordine XY ad AB ut rationes axium conjugatorum (per quas data magnitudine quae hic semper eadem est ratio aequalitatis). Sic enim patet, quomodo per rectam AX et lineam BY seu per planam figuram $BAXYB$ repraesentetur mutatio continua, sed si non magnitudine retenta mutata fuisset species, sed retenta specie magnitudo, ipsae XY forent ipsis magnitudinibus seu statibus proportionales. Nunc vero ubi species mutatur, saltem proportionales sunt cuidam speciem determinanti. Verum re expensa sufficit sola recta AX, ita ut concipiamus cuilibet logarithmo rationis axium conjugatorum respondentem sumi posse portionem rectae, quae in A seu casu aequalitatis evanescit. Si vero non logarithmis, sed rationibus velimus respondentes sumere abscissas, tunc abscissa pro casu spaherae vel circuli assumi debet CA, repraesentans unitatem, quae continue crescet, dum rationes axium crescunt. Continue autem decrescit cum rationes decrescunt, evanescit autem in C, quando circulus in Ellipsin vel sphaera in sphaeroeidem transformatur longitudinis infinitae parvae. Atque haec si in transmutando fit mutatio secundum unam tantum considerationem, ut hoc loco, sola mutatur ratio axium, quia Ellipses servata magnitudine non nisi uno modo variari possunt, sed si variare jubeamur circulum, infinities infinitis modis, nempe tam secundum magnitudinem, quam secundum speciem, ita ut transire debeat per omnes Ellipsium typos, tunc mutatio ista repraesentanda erit non per rectam seu lineam, sed per aliquam superficiem; idem est si servanda fuisset magnitudo circuli, sed transformari debuisset in Ellipses secundi gradus, quarum non tantum infinitae sunt species, sed et infinita genera, et sub quovis genere infinitae species, adeoque species infinities infinitae. Quod si jubeas circulum non tantum per omnes Ellipsium secundi gradus species transmutari, sed et magnitudinem variare, adeoque transire per omnes typos Ellipsium secundi gradus, tunc status circuli erunt infinitis vicibus infinites infiniti, et mutationes omnes repraesentandae sunt per aliquod solidum. Quodsi circulus transire debeat per omnes typos Ellipsium sive Ovalium tertii gradus, non possunt exhiberi omnes variationes in uno continuo nisi per quartam dimensionem, adhibito verbi gratia pondere, vel alia heterogeneitate extensi. Et ita porro. Necesse est autem hoc modo uno momento infinitas, imo aliquando et infinities infinitas fieri mutationes, alioqui una aeternitas omnibus variationibus percurrendis non sufficeret.

Itaque ex his etiam mutationis continuae natura intelligitur, neque vero ad eam sufficit, ut inter status quoslibet possit reperiri intermedius; possunt enim progressiones aliquae excogitari in quibus perpetuo procedit talia interpolatio, ut tamen non possit inde conflari aliquod continuum, sed necesse est ut causa continua intelligi possit, quae quovis momento operetur, vel ut cuivis rectae alicujus indefinitae puncto respondens aliquis status assignari possit quemadmodum dictum est. Et tales mutationes intelligi possunt in respectu loci, speciei, magnitudinis, velocitatis, imo et aliarum qualitatum, quae hujus considerationis non sunt, ut caloris, lucis. Hinc etiam Angulus contactus nullo modo homogeneus est angulo communi, imo ne ei quidem est συγγενὴδ, ut punctum lineae, sed se habet ad eum quodammodo ut angulus ad lineam; neque enim aliqua continua generatio certae legis excogitari potest, quae aeque transeat per angulos contactus et angulos rectilineos. Idem est de angulo osculi a me invento, aliisque altioribus. Angulus nimirum sectionis duarum linearum se secantium idem est qui rectarum eas tangentium, angulus contactus duarum linearum se tangentium idem est qui angulus contactus duorum circulorum lineas osculantium, ut alibi ostendi.

Antequam hinc abeamus, etiam aliquid dicendum est de Relatione sive habitudine rerum inter se, quae multum a ratione seu proportione differt, quippe quae tantum una aliqua ejus species est simplicor. Sunt autem relationes perfectae seu determinantes, per quas unum ex aliis inveniri potest; sunt relationes indeterminatae, quando quid ita se habet ad aliud, ut tamen notitia ejus habitudinis ad unum ex alio data determinandum non sufficiat, nisi accedant novae res aut novae conditiones. Interdum autem tantum accedunt novae conditiones, interdum vero et novae res. Potest etiam in relationibus spectari homoeoptosis et heteroeoptosis. Nimirum si sit relatio quaedam inter res homogeneas A, B, C, et una quaeque harum trium rerum eodem modo se habeat, ita ut permutando eorum locum in formula, nihil aliud a priore relatione oriatur, tunc relatio erit absoluta quaedam Homoeoptosis; potest tamen et fieri, ut quaedam tantum rerum homogenearum in relationem cadentium se habeant homoeptote, verbi gratia A et B, licet C aliter quam A vel B se habeat. Atque haec Homoeptosis maximi est in ratiocinando momenti. Fieri etiam potest ut sit relatio quaedam inter A et B (ubi tamen oportet adhuc alia ipsis homogenea relationem ingredi) ubi ipsum A ex dato B sit determinatum, at vero B ex ipso A sit tantum semideterminatum, imo ut sit indeterminatum prorsus. Exemplo haec illustrare placet. Sit quadrans circuli $ABCYA$ (fig. 23) cujus radii AC vel CB vel CY magnitudo vocetur a, at sinus recti YX magnitudo vocetur y, sinus autem complementi CX magnitudo vocetur x. Patet quadratum ipsius CY aequari quadratis de CX et de YX simul, seu aequationem haberi $xx+yy=aa$, quae exprimit relationem inter has tres res homogeneas x, y, et a, cujus ope ex dato a et x seu ex dato radio et sinu complementi haberi potest y seu sinus rectus. In hac relatione patet x et y se habere homoeoptote, at a se habere modo ab ipsis diverso. Patet etiam relationem esse semideterminantem quoad positionem, etsi sit absolute determinans quoad molem; nam $y = \sqrt{aa - xx}$, quod est ambiguum et significat tam $y = +\sqrt{aa - xx}$ quam $y = -\sqrt{aa - xx}$, quorum priore significante XY, posterius significat $X(Y)$. Sunt tamen XY et $X(Y)$ congruae seu mole aequales. Patet etiam a seu magnitudinem radii esse constantem seu eodem modo se habere, et quaelibet x et y indefinita, quemadmodum enim ex dato CX et XY habetur radius (extrahendo radicem ex quadratorum ab his summis) ita ex C_2X et ${}_2X_2Y$ eodem modo habetur radius. Quales constantes magnitudines eodem modo se habentes ad alias indefinitas parametri solent appellari.

Quemadmodum vero hic exposuimus relationem punctorum quadrantis ut Y ad puncta recta X, seu modum quomodo data radii magnitudine et punctis A, B, C datis positione, ex puncto X rectae possit inveniri punctum respondens Y circuli (licet gemino modo seu semideterminatae), ita poterimus etiam relationem aliam dare simpliciorem, quomodo ex punctis unius rectae positione datae puncta respondentia alterius rectae, etiam positione datae, in eodem plano ordine determinari possint, quae relatio reperietur multo simplicior. In fig. 24 sint rectae $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ ejusdem plani sese secantes in puncto A, ita ut aliquod X sit A, et aliquod Y sit etiam A, eoque casu sit $X \infty Y$. Jam datis positione rectis X et $\overline{Y}$ et puncto communi A, dabitur et angulus quem faciunt, adeoque et ratio rectarum AX et XY posito XY esse ordinatam normalem ad AX; ea ratio exprimatur per numerum aliquem n eritque aequatio AX ad XY (seu x ad y) ut 1 ad n seu ut unitas ad hunc numerum fietque $y = nx$. Unde patet relationem istam inter x et y tam esse simplicem, ut non opus sit assumi tertium aliquod ipsis homogeneum, seu alia aliqua linea, multo minus extensio altior; nam n quod assumsimus est numerus tantum seu magnitudo nulla indigens positione, sed sola specie seu notione determinata nec rectis illis homogenea. Et haec simplex relatio duarum Homogenearum magnitudinum nihil aliud est quam ratio, hoc est data est relatio inter duas has rectas, in eodem plano dato existentes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, quia si una ex ipsis positione sit data, et datum sit punctum commune ipsis A, ratio denique inter XY et AX seu inter ordinatam y et abscissam x eadem quae inter n numerum et 1 unitatem; data erit positione etiam altera recta.

Omnem autem relationem inter duas homogeneas solas seu inter duas tantum res magnitudine praeditas homogeneas ita ut nihil aliud praetera accedat quam numeri, esse rationem sive proportionem, etsi aliquando involuta sit ut alterius naturae appareat, exemplo ostendam. Sit aequatio $x^2 + 2xy = yy$ (1), quam nulla alia magnitudo realis ingreditur, quam hae duae inter se homogeneae x et y, quas ponamus esse rectas, ergo scribamus $\dfrac{y}{x} = n$ (2) ita ut n sit ratio ipsius x ad y, vel saltem quotiens seu numerus relationem illam exprimens. Jam ex aequ. 1. divisa per xx prodibit: $1 + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{yy}{xx}$ (3) hoc est (per aequ. 2) $1 + 2n = nn$ (4); res ergo reducta est ad solam rationem, seu numerum eam exprimentem inveniendum; adeoque ex aequatione 1. nihil aliud datur, quam ratio inter y et x, licet illa hoc loco detur surde seu ambigue, fit enim $nn - 2n + 1 = 2$ (5) seu extrahendo radicem $-n + 1 = \sqrt[2]{2}$ seu $n = 1 \pm \sqrt{2}$ (6). Unde talis modus deduci potest, ex data x seu magnitudine ipsius CX (fig. 25) invenire y seu magnitudinem ipsius CY vel ipsius $C(Y)$. Fiat triangulum rectangulum isosceles CXA cujus basis sit $CX = x$, et centro A radio AX describatur circulus $X(Y)Y$ rectam CA productam bissecans, nempe in Y et in (Y), dico rectam CY vel $C(Y)$ esse quaesitam seu ejus magnitudinem exprimere y in aequatione $xx + 2xy = yy$. Si CX sit x, tunc CY vel $C(Y)$ fore y; est enim CY ad CX ut $\sqrt{2} + 1$ ad 1 et $C(Y)$ ad CX ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1, seu CX posita unitate sive 1 erit $CY = CA(\sqrt{2}) + AY$ (seu 1) $= \sqrt{2} + 1$ et $C(Y) = CA(\sqrt{2}) - A(Y)$ (seu $-1) = \sqrt{2} - 1$. Itaque posita x unitate, erit y summa vel differentia ex his duabus $\sqrt{2}$ et 1, ubi tamen notandum, radicem unam debere intelligi privativam seu falsam, id est etsi moles ipsius $C(Y)$ sit $\sqrt{2} - 1$, tamen huic praefigendum esse signum $-$, ut fiat $-\sqrt{2} + 1$. Unde y est vel $1 + \sqrt{2}$ vel $1 - \sqrt{2}$. Patet etiam hinc porro, locum omnium punctorum Y esse rectam CY, si locum omnium punctorum X sit recta CX, modo talis sit rectarum angulus, ut ducta quacunque parallela ipsi primae XY jam inventae ut ${}_2X_2Y$ semper sit etiam C_2X ad C_2Y, quemadmodum diximus, seu secundum rationem quam aequatio 1 vel ratio inventa in aequ. 6. exprimit. Possunt autem relationes diversarum linearum inter se non tantum exprimi per rectas parallelas ab una ad aliam ductas, sed et per rectas ad unum punctum convergentes, et una saepe relatio alia est simplicior. Ita si (fig. 26) sit Ellipsis, cujus duo foci sint A et B, sumaturque quodlibet in Ellipsi punctum Y, tunc ea proprietas est Ellipseos, ut semper $AY + BY$ sit aequalis constanti rectae, nempe CD axi majori Ellipseos, atque adeo ut $AY + BY$ et $A(Y) + B(Y)$ sint aequales inter se.

Porro ut lineae AYB (fig. 24) natura commode exprimi duabus rectis normalibus YX et YZ ex uno ejus puncto Y emissis ad duas quasdam rectas positione datas, inter se normales CA et CB, ita (fig. 27) lineae $Y(Y)$ in nullo certo plano manentis natura exprimi potest, si ex puncto ejus quocunque ut Y in sublimi posito tres rectae normales in tria plana CXA, CZB, CVD inter se normalia ducantur, nempe YX, YZ, YV, quas vocabimus x, z, v. Quodsi jam duae dentur aequationes, una verbi gratia inter x et z, altera inter x et v, satis determinata erit natura lineae $Y(Y)$. Prior aequatio exprimet naturam lineae $Z(Z)$ a linea $Y(Y)$ in planum CZB projectae, posterior naturam lineae $V(V)$ ab eadem linea $Y(Y)$ in planum CVD projectae. Possunt tamen tria plana esse non tantum normalia inter se, sed et qualiacunque anguli dati, unde si duo saltem assumantur plana normalia, tertium vero ut CVD anguli indefiniti, possumus invenire utrum non tota linea $Y(Y)$ cadat in aliquod planum, quod fiet si planum CVD arbitrarium tale sumi possit, ut linea $V(V)$ et linea $Y(Y)$ coincidant, seu ut rectae v fiant infinite parvae sive evanescant.

Hinc patet etiam natura locorum, nempe si punctum V (fig. 24) in plano positum sit denturque distantiae ejus YX et YZ a duabus rectis indefinitis CX et CZ in eodem plano positione datis, problema est determinatum, licet ambiguum, hoc est dantur certa puncta numero quatuor in eodem plano, quae satisfacere possunt. Si vero distantiae ipsae non sint datae, sed tantum relatio earum inter se invicem, cujus ope una ex alia data determinatur, tunc problema est indeterminatum, seu fit locus, verbi gratia in fig. 24. circulus, dicimusque puncta Y omnia esse ad circulum, si talis sint naturae, ut ductis a quocunque eorum ordinatis conjugatis normalibus YX et YZ ad duas rectas normales inter se CX et CZ, quadrata ordinatarum conjugatarum simul sumta semper tantundem possint seu eidem quadrato constanti aequentur, talium enim punctorum locus erit ad circulum, cujus centrum est C, radius vero est pontentiae seu quadrati constantis latus. Similiter in solido (fig. 27) si puncti Y distantiae YX, YZ, YV a tribus planix CXA, CZB, CVD sint datae, determinatum est problema, licet ambiguum, certa enim puncta numero finita (nempe quatuor) satisfaciunt. Sciendum autem est, datas esse magnitudines assumta aliqua unitate, si tot sint datae aequationes, quot sint quaesitae; itaque si pro tribus rectis x, z, v inveniendis tres etiam dentur aequationes (a se invicem independentes), ipsae datae intelligentur, problemaque erit determinatum; quodsi vero duae tantum dentur aequationes, problema est indeterminatum primi gradus seu punctum quaesitum Y determinate non habetur, sed $\overline{Y}$ seu locus omnium Y seu linea $Y(Y)$ cujus omnia puncta his conditionibus satisfacient. Si vero pro tribus illis magnitudinibus seu rectis inveniendis tantum data sit nobis una aequatio quam hae tres rectae ingrediuntur, tunc problema est infinities indeterminatum, seu est indeterminatum secundi gradus, et locus est ad superficiem seu superficies aliqua determinata habetur (vel semideterminata seu ambigua, nempe gemina, aut tergemina, aut quadrigemina etc.) cujus omnia puncta satisfaciunt huic conditioni sive relationi per hanc aequationem expressae. Unde jam intelligimus, quid sint loca ad punctum, lineam, superficiem, et quomodo datis aequationibus sive relationibus per aequationes expressis puncta, lineae, superficies determinentur.

Haec eadem per compositiones motuum rectilineorum quoque explicari possunt. Nam (fig. 28) si per rectam $\overline{X}$ incedat regula RX in eodem semper plano et eodem semper angulo servato et interea in ipsa regula moveatur punctum aliquod Y, ita ut si in puncto A seu X seu Y incipiat motus utriusque, et deinde regula perveniente in ${}_2X_3X$ etc. punctum perveniat in ${}_2Y$, ${}_3Y$, ${}_4Y$ (id est si in primo situ A_1R quievisset regula, in ${}_2Z$, ${}_3Z$, ${}_4Z$) linea aliqua $\overline{Y}$ seu ${}_1Y_2Y_3Y$ etc. composito hoc motu describetur, cujus data est natura ex data relatione inter AX et AZ respondentes; exempli causa si AZ sint ipsis AX proportionales seu si sit A_2X, ad A_2Z (seu ad ${}_2X_2Y$) ut A_3X ad A_3Z, et ita porro, seu si sint A_2X, A_3X, A_4X ut A_3Z, A_3Z, A_4Z, linea AYY seu $\overline{Y}$ erit recta; si AZ sint in duplicata ratione ipsarum AX seu ut earum quadrata, linea $\overline{Y}$ erit parabola quadratica, si in triplicata, erit parabola cubica etc. Si AZ sint reciproce ut AX seu A_2X ad A_3X ut A_3Z ad A_2Z, idque ubique, linea Y erit Hyperbola, cujus Asymptotae sunt $\overline{X}$ et $\overline{Z}$. Atque ita porro aliae atque aliae lineae oriri possunt, quae persequi hujus loci non est.

Illud in genere notare praestat, quomodo ex hoc motu intelligatur, ad quas partes linea cavitatem aut concavitatem vertat, utrum habeat flexum contrarium, verticem seu punctum reversionis, maximasque aut minimas ejus periodi abscissas vel ordinatas. Primum ponamus in fig. 29 velocitates regulae seu ipsa abscissarum AX incrementa momentanea ${}_2X_3X$, ${}_3X_4X$ etc. (quae indefinite parva sunt) ipsis velocitatibus respondentibus puncti seu abscissarum conjugatarum AZ (seu ordinatarum XY) incrementis momentaneis ${}_2Z_3Z$, ${}_3Z_4Z$ etc. proportionales, tunc AYY est recta; sin minus, linea erit curva. Quodsi jam (fig. 28) ponamus velocitate regulae manente uniformi seu abscissarum AX incrementis momentaneis ${}_2X_3X$, ${}_3X_4X$ etc. manentibus aequalibus velocitatem puncti crescere seu incrementa abscissarum conjugatarum seu ordinatarum AZ incrementa momentanea ${}_2Z_3Z$, ${}_3Z_4Z$ etc. crescere, vel velocitate regulae eadem faciet, magis crescere; seu incrementis momentaneis abscissarum crescentibus incrementa momentanea ordinatarum magis adhuc crescere, tunc linea AYY (fig. 28) convexitatem obvertit directrici AX, si ambo simul, tam abscissae scilicet quam abscissae conjugatae seu recessus a puncto fixo A tam regulae quam puncti mobilis in regula crescunt; quod ab initio supponendum est, si quidem initio tam regula quam punctum in ea mobile ad A recedere intelligantur. Itaque idem est si contra ambo tam regula quam punctum in regula continue accedere intelligantur ad A eaedem maneant, vel minus crescant quamm velocitates seu incrementa momentanea ipsius regulae seu appropinquationes momentaneae ad A et velocitas ipsius puncti in regula. Sed cum hoc modo punctum tantum priorem viam relegere intelligatur, hoc annotare nihil attinet imposterum. Quodsi contingat fig. 30 velocitatibus regulae seu incrementis momentaneis abscissarum, ipsis scilicet ${}_2X_3X$ etc. decrescentibus, velocitates puncti in regula seu incrementa momentanea ordinatarum ${}_2Z_3Z$ etc. uniformia manere, vel crescere, vel saltem minus decrescere quam ipsa ${}_2X_3X$ etc., tunc etiam curva AYY ipsi directrici AX obvertit convexitatem.

Ex his jam contra statim patet, si incrementa momentanea abscissarum magis crescant, vel minus decrescant, quam incrementa momentanea abscissarum conjugatarum seu ordinatarum, tunc curvam concavitatem obvertere directrici (seu rectae in qua abscissae sumuntur) si modo ponamus curvam tam a directrice AX quam directrice conjugata AZ recedere, seu ad eam accedere, hoc est tam in una directrice quam in altera recedere a communi eorum puncto A vel ad id accedere, patet hoc inquam ex praecedentibus, si modo in fig. 28 vel 30 mutemus directicem et abscissas ejus in directricem conjungatam et abscissas conjugatas vel contra; manifestum enim est si curva uni directrici obvertit concavitatem, conjugatae ejus obvertere convexitatem et contra, quando scilicet simul recedit ab ambabus.

Hinc patet porro, quomodo oriatur curvae flexus contrarius. Nam fig. 31 si X punctis directicis ab A recedentibus etiam respondentia Z puncta directricis conjugatae ab A recedant, et cum antea ${}_2Z_3Z$ etc. incrementa abscissarum conjugatarum magis crevissent vel minus decrevissent, quam abscissarum principalium incrementa ${}_2X_3X$ ab A usque ad ${}_3Y$, at in ${}_3Y$ incipiat fieri contrarium, ibi linea habet flexum contrarium et ex concava fit convexa, quoad easdem partes. Hoc est si ponamus rectangulum ${}_4X_4Z$ secari a linea A_3Y_4Y in duas partes $A_4X_4Y_3YA$ et $A_4Z_4Y_3YA$, tunc cum lineae secantis pars A_3Y concavitatem obverterit parti spatii posteriori, altera pars ${}_3Y_4Y$ convexitatem obvertet parti spatii priori, hoc est cum recta seu chorda quaevis in lineae parte A_3Y ut A_2Y, ${}_2Y_3Y$, ceciderit in spatii partem posteriorem, nunc chorda quaevis in lineae parte ${}_3Y_4Y$ cadit in partem spatii priorem.

Quodsi vero porro ponamus vel ambarum abscissarum, principalis scilicet et conjugatae, vel alterius saltem incrementa continue descrescere, sumamusque eam quae sola vel saltem magis descrescit, ejusque velocitatem ponemus tandem evanescere, atque ita porro continuata mutatione mutari in contrariam, hoc est lineam curvam respectu ejus abscissae non amplius recedere ab A, sed ad A potius accedere, ibi habemus puncta reversionum. Exempli causa fig. 32 velocitas ipsius X decrescit usque ad ${}_4X$, ubi evanescit, nempe ${}_1X_2$, ${}_2X_3X$, ${}_3X_4X$ quae velocitates repraesentant continue decrescunt, donec evanescant in ${}_4X$, ubi velocitas progrediendi mutatur in regressum, et X a ${}_4X$ tendit in ${}_5X$, ${}_6X$ rursusque accedit ad A, crecente rursus (aliquamdiu saltem) velocitate regressus, interea vero Z uniformi velocitate progreditur; ordinata autem ${}_4X_4Y$ ex loco reversionis puncti X, nempe ex ${}_4X$ ducta ad curvam, eam tangit in ${}_4Y$. Potest fieri ut puncta X et Z simul revertantur versus A, sed hoc singulare admodum est, eoque casu curva in puncto reversionis infinitas habet tangentes, ut fig. 33 patet, curvam AYH simul tangi a duabus rectis ad se invicem perpendicularibus XY et ZY; unde patet cum tota curva cadat intra rectangulum XZ, ideo omnem rectam per Y ductam extra triangulum cadentem, curvam tangere, et dubitari videtur posse, an sit una curva an potius duae AY et HY se secantes in H; verum cum tales generationes pro una curva excogitari possint, et exemplum habeamus in cycloidibus secundariis, nihil prohibet, quin totum AYH pro una curva habeatur. Quodsi autem curva non habeat infinitas tangentes, seu non X et Z simul revertantur, seu si in fig. 33 linea AY non tendat ad H, sed ad L, tunc patet, una ordinata ab X, nempe XY, curvam tangente in Y, alteram ZY, quae utique ipsis XY adeoque tangenti est perpendicularis, ipsi quoque curvae AYL esse perpendicularem, adeoque esse maximam vel minimam ordinatarum hujus periodi, maximam quidem quando curva in Y ipsi AZ directrici obvertit concavitatem, minimam vero cum ei obvertit convexitatem.

Jam porro inter se conjungamus ambas variationes lineae, unam quae est secundum convexum et concavum, alteram quae est secundum accessum et recessum respectu directricis. Equidem potest linea tam accedere quam recedere respectu directricis, cui concavitatem aut convexitatem obvertit, ut fig. 34 in (H) concava recedit, in (B) concava accedit, in (C) convexa recedit, in (D) convexa accedit; verum si duabus directricibus simul conferatur, tunc quando ab ambabus recedit, uni obvertit concavitatem, alteri convexitatem, ut in (H) et in (C); quando vero uni accedit, ab altera vero recedit, tunc ambabus concavitatem vel ambabus convexitatem obvertit, ut in (B) et (D). Atque ideo ad casum nunc veniendum est, quo linea ab una directrice recedit, ad alteram vero accedit, seu quo X quidem ab A recedit, at Z ad A accedit, ubi linea Y ambabus directricibus obvertit concavitatem vel convexitatem, convexitatem quidem ut in fig. 35 si ${}_2X_3X$ ad ${}_3X_4X$ recedendo ab A minorem rationem habeat, quam ${}_2Z_3Z$ ad ${}_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice aut crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in altera minus crescunt aut magis decrescunt. Contra in fig. 36 concavitatem linea utrique directrici obvertit, si ${}_2X_3X$ ad ${}_3X_4X$ recedendo ab A majorem rationem habet quam ${}_2Z_3Z$ ad ${}_3Z_4Z$ accedendo ad A, seu si velocitatibus recedendi in una directrice crescentibus aut manentibus aut decrescentibus, velocitates accedendi in alia magis crescunt aut minus decrescunt.

Hinc intelligitur, quomodo fieri possit, ut linea quae antea directrici obvertit convexitatem, nunc ei obvertat concavitatem, vel contra, licet non habeat flexum contrarium, sed maneat ad easdem partes cava, quando scilicet in ea directrice occurrit reversio ut fig. 37 si motus ipsius X sit ${}_3X_4X$ recedens ab A et ${}_4X_5X$ accedens ad A, ubi patet ex (H),(B),(C),(D),(E),(F),(G),(K), quam variis modis fieri possit reversio, ut eidem rectae AX, cui concavitas prius obversa fuerat, postea convexitas obvertatur, vel contra, ubi patet in (H) et (B) linea recedente ab AX et ab AZ et in reversionis puncto recedente adhuc ab AX, sed accedente jam ad AZ, prius convexitatem postea concavitatem ipsi AX obverti; idem est in (B), ubi linea prius accedit ad AX, deinde semper ab eo recedit, accedit in 1, recedit in (B) et in 2, et ab AZ recedit usque ad (B), deinde ab eo recedit. Verum in (C) ad 1 prius concavitas obvertitur ipsi AX, deinde ad 2 convexitas, et utrobique receditur quod obtinetur ope ventris, qui unum continet regressum respectu AZ, sed binos regressus respectu AX. Tale quid etiam in (D) inclinate posito. Caeterum venire in punctum evanescente ex (C) fit (E), et ex (D) fit (F), et ideo reversiones tam secundum AZ quam secundum AX ibi coincidunt, unde in puncto illo infinitae possunt esse tangentes, quale quid jam attigimus supra. At si idem venter simul contineat flexum contrarium, ut in (G) et (K), tunc ventre illo evanescente ut inde nascatur (L) vel (M) vel (N), atque ita flexu contrario coincidente cum punctum reversionis fit ut non obstante reversione linea convexitatem aut concavitatem ei obvertat cui prius, cum enim duplex concurrat causa mutandae obversionis, se mutuo tollunt et manet obversio qualis ante erat ad directricem AX, scilicet (L), (M), (N) ipsi tam ante quam post regressum obvertunt concavitatem; si inverterentur, iam ante quam post regressum obverterent ei convexitatem.

Caeterum hinc intelligitur, quod duplex causa est cur linea mutet obversionem, et quae ante concavitatem directrici AX obverterat, nunc obvertat convexitatem: una, regressus puncti X in ilaa directrice moti (ut fig. 38), linea YY a ${}_3Y$ ad ${}_4Y$ obvertit ipsi AX convexitatem, at post regressum in ${}_4Y$ obvertit ei concavitatem in ${}_5Y$, quia punctum X ab A recedit a ${}_3X$ ad ${}_4X$, sed ad A accedit item seu regreditur a ${}_4X$ ad ${}_5X$; altera vero causa est flexus contrarius, cum ipsa linea revera ex convexa fit concava, vel contra ut in fig. 39, ubi linea in ${}_4X$ habet flexum contrarium, ita ut recta tangens cum prius cecidisset ad unum latus curvae post ${}_4Y$ cadat in aliud latus, in ipso autem puncto ${}_4Y$ tangens est nulla vel petius tangens et una secans coincidunt, nam (fig. 40) recta tangens lineam flexu contrario praeditam in L secat eandem alibi in M, cumque continue magis magisque sibi admoveri possint L et M, fit ut tandem coincidant in N, ubi nulla est tangens, aut potius eadem simul est certo respectu tangens et secans, unde et in puncto flexus contrarii tria curvae puncta alioqui diversa in unum coincidunt duo ob tangentem (omnis enim tangens intelligitur secare lineam in duobus punctis coincidentibus), unum ob secantem. Et apparet in puncto flexus N duarum partium LN et MN coincidere, quemadmodum si duae curvae diversae LNS, MNR obversis convexitatibus se tangerent in N, unde transeundo ex una in alteram fieri potest flexa LNM vel flexa RNS.

Ex his autem duobus modis inter se diversis, quibus obversio lineae ad aliquam directricem mutatur, poterimus definire periodum intra quam intelligitur aliqua esse maxima aut minima, cum enim curva multos flexus contrarios multaque puncta reversionis habet, diversas habet maximas aut minimas pro sua quaque periodo. Nimirum (fig. 41) linea Y recedit a sua directrice AX usque ad B, inde rursus accedit, ordinata igitur ad B est maxima (si ibi curva directrici obvertit concavitatem); porro linea a B accedit directrici AX, simulque recedit a directrice AZ usque ad C, ubi est punctum reversionis, seu ubi accedit quidem adhuc ad AX, sed non amplius recedit ab AZ; sed a C (ubi ordinata ad AX tangit curvam) usque ad D accedit simul directrici AX et directrici AZ, ubi iterum incipit recedere a directrice AX, sed adhuc pergi accedere ad AZ usque in E, ubi tam ab AZ quam ab AX iterum recedit. Periodos igitur faciunt puncta reversionis, quae obversionem mutant. Sic prima periodus est ABC qua linea directrici AX obvertit concavitatem, cujus periodi maxima est ordinata ad B, altera periodus est CDE, ubi linea directrici AX obvertit convexitatem cujus minima est ordinata ad D. Porro linea CDE producta seipsam secare potest in F. Et si totus venter coincidere intelligatur in punctum, ibi coincidit duplex reversio respectu directrici AZ cum simplici respectu directricis AX. Atque ita quia duplices reversiones se mutuo tollunt, hoc modo fieri potest ut linea $(Y)(B)(F)(G)$ (in eadem fig. 41) quae a (B) usque ad (F) recessit ad directricem AX, post (F) rursus ab ea recedat, sine ullo flexu contrario pariter ac sine ulla reversione respectu alterius directricis conjugatae AZ, quorum tamen alternatio alias opus est, ut linea a directrice ad quam accessit iterum recedat. Sed redeamus ad priorem lineam $AYBCDEFG$, et post duas periodos ABC et CDE quaeramus tertiam EGH a puncto novissimo reversionis E ad punctum flexus contrarii proximi H, cujus periodi maxima est ordinata ad G. Quarta periodus est HJK a puncto flexus contrarii H ad novum punctum reversionis K, cujus periodi minima est ad punctum J. Ubi notandum est, etsi duae periodi sibi immediatae, quarum quaelibet suam habet maximam aut minimam respectu ejusdem directricis AX, inter se distingui debeant vel puncto aliquo reversionis respectu directricis conjugatae AZ vel puncto aliquo flexus contrarii in ipsa curva, tamen neque punctum reversionis directricis conjugatae neque punctum flexus contrarii statim periodum facere quae maxima vel minimam habeat, imo nec plura puncta flexus contrarii facere necessario periodum novam, ut patet ex serpentina KLM, verum plura nova puncta reversionis ad directicem conjugatam AZ necessario faciunt periodum novam aut periodos novas maximarum atu minimarum pro haec directrice AX, si flexus contrarii in curva absint. Quod ita demonstro, quoniam punctorum reversionis ad directricem conjugatam sunt ordinatae maximae et minimae ad directricem conjugatam, hinc si plura dentur puncta reversionis ad directricam conjugatam, dantur plures ordinatae tales ad directricem conjugatam, ergo et periodi maximarum aut minimarum pro directrice conjugata, quia quaevis maxima aut minima habet propriam periodum; hae autem periodi ad directricem conjugatam AZ necessario limitantur vel per puncta flexus contrarii vel per puncta reversionis ad directricem primam AX, absunt autem hic puncta flexus contrarii ex hypothesi, ergo adesse debent puncta reversionis respectu directricis AX, adeoque et maximae et minimae atque adeo et periodi respectu directricis AX, quod asserebatur. Denique notandum est, periodos (ad eandem directricem) regulariter tales esse ut maxima et minima sese alternis excipiant, exceptio tamen est in casibus quibusdam, ut in linea $(Y)(B)(F)(G)$ eadem figura 41 sese immediate excipiunt duae maximae, ordinata a B ad AX et ordinata a G ad AX (nisi ordinatam ex F simul velimus computare, quae tamen periodum propriam nullam habet, quippe quae evanuit), cujus ratio est quod ibi duo puncta reversionis tacita sunt seu sese mutuo supprimunt, quae si expressa intelligantur numerenturque, vera manet regula alternationis. Similiter fieri potest ut punctum reversionis et flexus contrarius coincidant, et ita alternatio. Ut si in eadem figura N nova sit periodus $KLMNP$ a puncto reversionis K ad punctum flexus contrarii P, ejusque periodi maxima sit ordinata ex N ad directricem AX, et rursus nova periodus PQR a P puncto flexus contrarii ad R punctum reversionis, cujus periodi maxima est ordinata ex puncto Q ad directricem AX, inde rursus nova periodus RST a puncto reversionis R ad punctum T (quod quale sit ex continuatione lineae patere deberet) cujus periodi maxima est ordinata ex S ad directicem AX. Et hactenus quidem semper servatur alternatio maximarum et minimarum; sed si totus venter $VPQRV$ evanescere ponatur in unum punctum V, tunc ordinata ex V ad AX non poterit dici maxima aut minima ordinatarum quia lineam $NVST$ non secat, sed tangit; ergo periodi MNV maximam ordinatam, nempe ex N in directricem AX, excipit statim periodi VST maxima ordinata, nempe ex S ad directricem eandem, scilicet quia R et Q puncta reversionis et flexus contrarii in unum coincidentia sese mutuo compensant et tollunt.

Atque ita hic semina quaedam jecimus, ex quibus generalia quaedam curvarum elementa enasci, curvaeque a sua forma in certas quasdam classes dispesci possint. Possunt multa alia ex his principiis demonstrari, ut quod eadem est directio puncti curvam describentis, quae rectae tangentis; possent etiam elementa explicari curvarum linearum quae in solido describuntur compositione trium motuum, dum scilicet (fig. 37) planum unum CD incedit in alio CB a CE versus BF, et in plano CG movetur regula CG, accedit ad ED vel inde recedit, et in regula CG movetur punctum C versus G vel recedit a G. Potest et ex his modus quoque duci curvarum ducendi tangentes inveniendique maximas aut minimas; sed non id hoc loco agimus, nec plenam tractationem, sed gustum quendam atque introductionem damus.

Tantum hac vice.