

Versuch: Passive und aktive Analogfilter

Einleitung

Filter finden vielfältige Anwendungen in der Nachrichtentechnik, sowie in fast allen anderen signalverarbeitenden Aufgabenfeldern. Ihre Anwendungsgebiete reichen vom einfachen Tiefpassfilter zur Bandbegrenzung, über selektive Filter zur Kanaltrennung, bis hin zum Verbessern von Signal-Stör-Verhältnissen durch signalangepasste Filter.

Die ersten Filter wurden ausschließlich aus passiven Elementen (Widerstände, Kondensatoren und Spulen) aufgebaut und gehen auf K.W. Wagner und G.A. Campbell in Jahr 1915 zurück, sowie auf Arbeiten von Butterworth in den dreißiger Jahren. Weitere wesentliche Beiträge lieferten W. Cauer und A.W. Bode. Diese Pioniere des Filterentwurfs sind heute immer noch namensgebend für die gängigen Analogfilter.

Mit der Entwicklung der Halbleiterelektronik gewinnen die **aktiven Filter** immer größere Bedeutung, da sie viele Nachteile der passiven Filter beseitigen. Heute werden überwiegend aktive Filter eingesetzt. Passive Filter finden jedoch Anwendung in speziellen Bereichen wie der Hochfrequenztechnik (schlechte Hochfrequenzeigenschaften der aktiven Bauelemente) oder in Sonderanwendungen wie Lautsprecherweichen. Das Verhalten von Analogfiltern lässt sich im Zeitbereich durch Differenzialgleichungen und im Frequenzbereich durch gebrochen rationale Funktionen beschreiben. Auch mittels digitaler Signalverarbeitung lassen sich Filter realisieren. **Digitalfilter** werden durch Differenzengleichungen beschrieben und beispielsweise mit Signalprozessoren realisiert.

Der erste Teil des Versuchs befasst sich mit Design und Aufbau von passiven Filtern. Aktive Filter werden im zweiten Teil des Versuchs behandelt. Digitalfilter sind Gegenstand eines Versuches des nachrichtentechnischen Vertiefungslabors.

Zur Bearbeitung einiger Aufgaben des Versuchs wird das Programm **MATLAB** benötigt. MATLAB ist eine Abkürzung von „MATrix LABoratory“. Hersteller ist die Firma MathWorks. Das Programm bietet umfangreiche Funktionen zur Akquisition, Verarbeitung und Darstellung von Daten. Seine große Bedeutung erlangt es vor allem durch eine integrierte, einfach zu erlernende Programmiersprache und umfangreiche Bibliotheken zu vielen technischen Problemstellungen. Im Rahmen des Versuchs soll auch der Umgang mit MATLAB erlernt werden. Ein Tutorial steht unter http://nt.eit.uni-kl.de/lehre/nt_lab.html zur Verfügung.

1 Passive frequenzselektive Filter

Bei Filterschaltungen unterscheidet man einen **Durchlassbereich** (DB) und einen **Sperrbereich** (SB). Wechselspannungen und -ströme, deren Frequenzen in den DB des Filters fallen, sollen durch das Filter möglichst wenig gedämpft werden. Im SB soll das Filter eine große Dämpfung haben. Je nach Lage des DB lassen sich die Filter in vier Gruppen einteilen. Zur Gruppe der **Tiefpassfilter** gehören solche, die niedere Frequenzen passieren lassen und höherer Frequenzen sperren. **Hochpassfilter** zeigen ein inverses Verhalten, d.h. hohe Frequenzen können das Filter kaum gedämpft passieren, niedrige Frequenzen werden dagegen stark gedämpft. Wird ein DB zu höheren und niedrigeren Frequenzen von einem SB abgelöst, spricht man von einem **Bandpassfilter**. Die letzte Gruppe sind **Bandsperren**. Sie haben ein inverses Verhalten zum Bandpass und sperren aus dem Gesamtspektrum ein bestimmtes Frequenzband.

Neben der Einteilung der Filter in Tiefpässe, Hochpässe, Bandpässe und Bandsperren, werden die Filter weiterhin nach der Dämpfungscharakteristik unterschieden. Es ist nicht möglich, Filter zu realisieren, deren DB sprunghaft in den SB übergeht, wie dies für den idealen Tiefpass der Fall ist. Die Impulsantwort des idealen Filters wäre unendlich lang. Der Übergang zwischen DB und SB hat daher immer einen kontinuierlichen Verlauf. Die realisierbaren Approximationen des idealen Filters sind die **Bessel-, Butterworth-, Tschebyscheff- und Cauer-Filter**. Die Bilder 1 bis 3 zeigen deren typische Dämpfungs- und Gruppenlaufzeitcharakteristik.

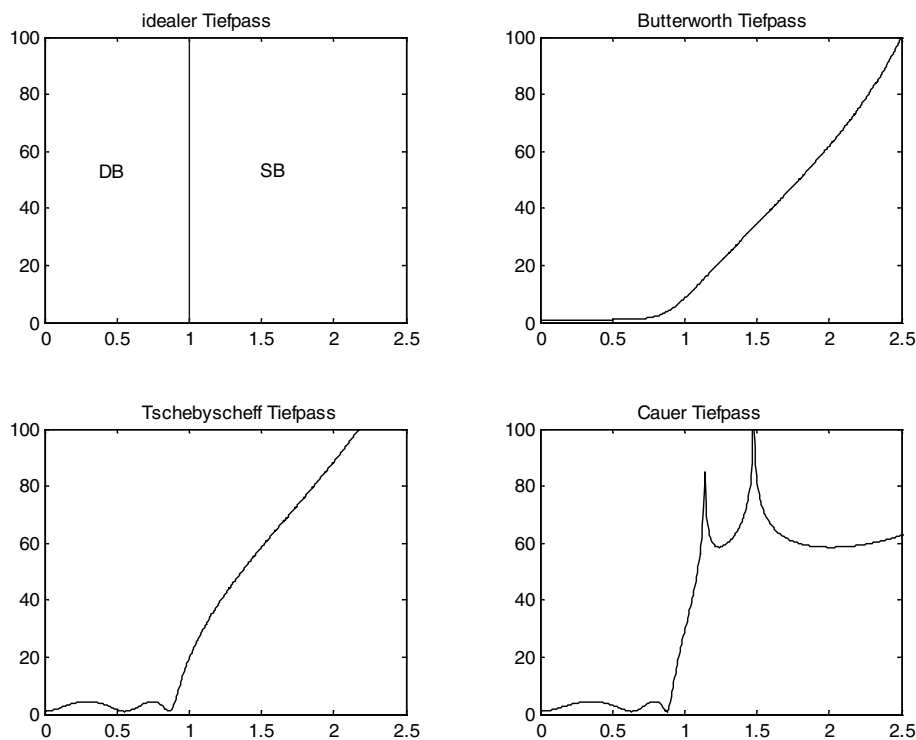


Bild 1 Charakteristische Dämpfungsverläufe der Standard-Tiefpassapproximationen über der normierten Frequenz Ω

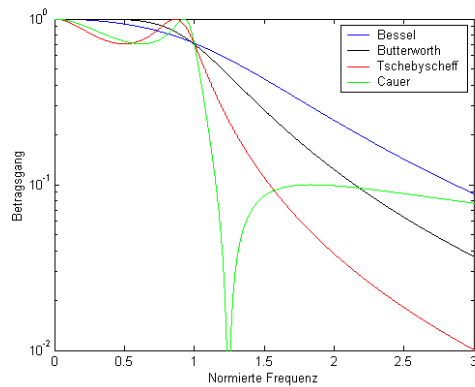


Bild 2 Betragsfrequenzgang der Standard- Tiefpassapproximationen

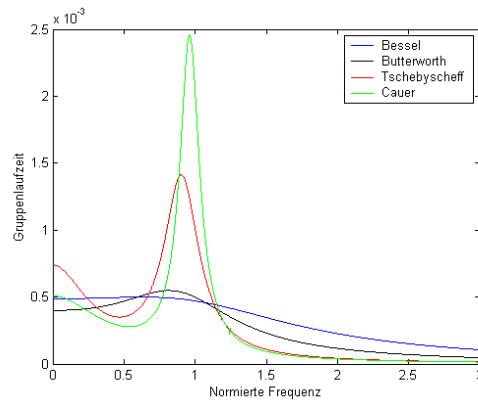


Bild 3 Gruppenlaufzeit der Standard- Tiefpassapproximationen

Die Dämpfungsverläufe sind über der normierten Frequenz

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_D} = \frac{f}{f_D} \quad (1.1)$$

dargestellt. Die Frequenz f_D bezeichnet die Grenze zwischen DB und SB.

Das Butterworth- oder auch Potenzfilter besitzt einen Frequenzgang, der über ein längeres Stück horizontal verläuft und dann erst kurz vor der Grenzfrequenz abknickt. Man spricht von einem maximal flachen Frequenzgang.

Das Bessel-Filter besitzt einen ähnlichen Dämpfungsverlauf wie das Butterworth-Filter aber mit deutlich schlechterer Selektivität. Der Vorteil des Bessel-Filters liegt im Phasengang. Die Phasenverschiebung $\phi(f)$ zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung ist im DB eine lineare Funktion der Frequenz, was zu einer konstanten Gruppenlaufzeit

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} \quad (1.2)$$

führt. Man bezeichnet Bessel-Filter deshalb auch als „maximum flat delay filter“.

Alle anderen Filtertypen weisen eine mehr oder weniger starke Gruppenlaufzeitverzerrung auf. Allgemein kann man sagen, dass eine bessere Selektivität mit einer stärker verzerrten Gruppenlaufzeit erkauft wird (s. Bild 3).

Mit gleichem Bauteileaufwand lassen sich auch Filter mit ausgeprägter Selektivität realisieren, die sogenannten Tschebyscheff-Filter. Allerdings muss man eine Welligkeit des Dämpfungsverlaufs im DB akzeptieren. Die Dämpfungen von Tschebyscheff- und Butterworth-Filter verlaufen für Frequenzen $f \gg f_g$ parallel mit einem konstanten Dämpfungsunterschied, der mit größerem Filtergrad anwächst.

Cauer-Filter erzeugen die steilsten Filterflanken, weshalb sich mit ihnen ein minimal schmales Übergangsband erreichen lässt. Neben der Welligkeit im Durchlassband

treten hierbei auch Dämpfungsminima im Sperrbereich auf. Die Anzahl an passiven Bauteilen ist etwas größer als bei den anderen Filtertypen. Cauer-Filter werden auch als elliptische Filter bezeichnet.

Wegen des sehr günstigen Übertragungsverhaltens der Tschebyscheff- und Cauer-Filter (geringe Durchlassdämpfung, hohe Sperrdämpfung, steile Flanke) sind dies weit verbreitete Filtertypen für frequenzselektive Filter. Jedoch ist zur Berechnung dieser Filter ein hoher mathematischer Aufwand erforderlich [1]. Man hatte daher diese Filter frequenz- und widerstandsnormiert in Katalogen zusammengestellt.

Heutige Filterentwurfsprogramme vermeiden die Benutzung eines Filterkatalogs. Die grundsätzlichen Entwurfsschritte sind jedoch vergleichbar, laufen aber für den Benutzer oft nicht erkennbar ab. Um einen besseren Einblick in den Entwurfprozess zu erlangen wird in diesem Versuch ein Filterkatalog benutzt [2].

1.1 Analogfilterentwurf mittels Filterkatalog [2]

Die Tabelleneingangsdaten eines Filters sind

- 1) Art des Filters (Hochpass, Tiefpass, Bandpass, Bandsperre)
- 2) Maximale Durchlassdämpfung a_{Dmax}
- 3) Minimale Sperrdämpfung a_{Smin}
- 4) Grenzfrequenz f_D (Überschreiten von a_{Dmax})
- 5) Sperrfrequenz f_S (Unterschreiten von a_{Smin})
- 6) Abschlusswiderstände $R1$ und $R2$

Zur Verdeutlichung der Tabelleneingangsdaten sind in Bild 4 Dämpfungen sowie Eckfrequenzen in einem Toleranzschema für Tiefpässe dargestellt. Das Toleranzschema gibt nicht vor, wie die Dämpfungskurve innerhalb der Toleranzschlauches auszusehen hat. Der eigentlich Verlauf kann wie beim Butterworth-Filter monoton sein oder wie beim Cauer-Filter Minima und Maxima aufweisen.

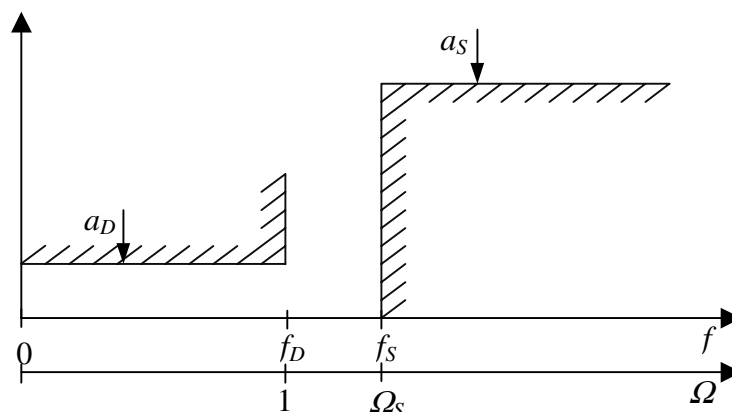


Bild 4 Toleranzschema Dämpfungsverlauf eines Tiefpass Filter

In Bild 5 ist die Beschaltung eines Filters, mit den Abschlusswiderständen R_1 und R_2 dargestellt.

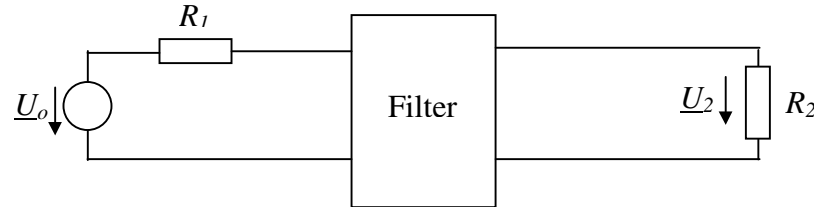


Bild 5 Filter mit Beschaltung

Die unter Punkt 2) und 3) angegebenen Dämpfungen sind Betriebsdämpfungen a_B und wie folgt definiert

$$a_B = 20\text{dB} \cdot \lg \left| \frac{\underline{U}_0}{2\underline{U}_2} \right| + 10\text{dB} \cdot \lg \left| \frac{R_2}{R_1} \right|. \quad (1.3)$$

Die Spannungsquelle \underline{U}_0 in Bild 5 mit dem Innenwiderstand R_1 kann dann die maximale Leistung an den Vierpol abgeben, wenn Anpassung vorliegt, d.h. wenn die Eingangsimpedanz Z_E der Filterschaltung die Größe von R_1 hat. Ist dies nicht der Fall, so vergrößert sich die Betriebsdämpfung a_B dieses Filters.

Tschebyscheff- und Cauer-Filter ändern im DB ihre Eingangsimpedanz frequenzabhängig derart, dass Welligkeiten der Durchlassdämpfung auftreten. Man definiert den Reflexionsfaktor zu

$$\underline{p}(f) = \frac{Z_E(f) - R_1}{Z_E(f) + R_1}. \quad (1.4)$$

Sein maximaler Betrag $|p|$ in [%] ergibt sich zu

$$|p| = \max_{f < f_D} \frac{|Z_E(f) - R_1| \cdot 100\%}{|Z_E(f) + R_1|}. \quad (1.5)$$

Im Filterkatalog sind die Filter mit einer vierstelligen Zahl und zwei weiteren Buchstaben bezeichnet, z.B. C0625b. Die letzten beiden Ziffern der Filterbezeichnung geben den Reflexionsfaktor in % an. Aus dem Reflexionsfaktor ist unmittelbar die Durchgangsdämpfung in Dezibel ableitbar:

$$a_D = -20 \lg \sqrt{1 - |p|^2} \text{ dB}. \quad (1.6)$$

Die ersten beiden Ziffern der Filterbezeichnung im Filterkatalog geben den Grad n des Filters an. Der Grad n ist ein Maß für den Aufwand, also die Anzahl der notwendigen Bauelemente. Bei Filtern mit geradem Grad n unterscheiden sich der Eingangswiderstand Z_E und der Ausgangswiderstand Z_A voneinander. Daher sind bei diesen Filtern R_1 und R_2 verschieden. Diese Filter sind im Filterkatalog mit **b** bezeichnet. Durch eine andere Berechnung und Vergrößerung von f_s kann man erreichen, dass Z_E und Z_A gleiche Werte annehmen. Auch diese Filter sind im Katalog aufgeführt und mit **c** bezeichnet.

Im Filterkatalog findet man ein Diagramm zur Aufwandsabschätzung bei Cauer-Filtern. Aus den Tabelleneingangsdaten ermittelt man die normierte Sperrfrequenz

$$\Omega_s = \frac{f_s}{f_D} \quad (1.7)$$

sowie $a_s + a(p)$. Hierbei ist $a(p)$ eine Größe, die sich in Abhängigkeit vom Reflexionsfaktor $|p|$ aus der Tabelle im Diagramm zur Aufwandsabschätzung ergibt. Hat man Ω_s und $a_s + a(p)$ ermittelt, geht man mit diesen Daten ins Diagramm zur Aufwandsabschätzung und findet oberhalb des Schnittpunktes Ω_s mit $a_s + a(p)$ eine Kurve, die den Grad n des gesuchten Filters angibt.

Ergibt sich z.B. der Grad 4b, und kann man ungleiche Abschlusswiderstände nicht vertreten, so wählt man den nächst höheren Grad. Die sich dadurch ergebende „Reserve“ kann genutzt werden, um Ω_s oder a_D zu verkleinern oder um a_s zu vergrößern. Mit der Wahl des Grades n liegt auch die Zahl der Bauelemente fest. Ein entsprechendes Diagramm zur Aufwandsabschätzung für Tschebyscheff-Filter findet man ebenfalls im Filterkatalog.

Der Katalog enthält die widerstands- und frequenznormierten Werte für die Bauelemente von Cauer- und Tschebyscheff-Filtern. Diese Größen kann man in solche für Hochpass, Bandpass und Bandsperre umrechnen. Bild 6 zeigt das Umrechnungsschema für die Umrechnung in einen Hochpass. Die Umrechnung in die noch verbleibenden Filtertypen findet man in [1] und [2].

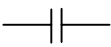


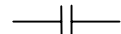
TP	→	HP
c' 	→	 $l' = \frac{1}{c'}$
l' 	→	 $c' = \frac{1}{l'}$
$\Omega_{(TP)}$	→	$\Omega_{(HP)} = \frac{1}{\Omega_{(TP)}}$
$\Omega_{D(TP)}$	→	$\Omega_{d(HP)} = \Omega_{D(TP)} = 1$

Bild 6 Umrechnung eines Tiefpasses in einen Hochpass

1.2 Umwandlung normierter Größen in physikalische Größen

Hat man die normierten Größen dem Katalog entnommen bzw. auf Hochpass, Bandpass oder Bandsperre umgerechnet, so ist die Umwandlung dieser Größen in physikalische Größen erforderlich.

Mit der Vorgabe für R_I und f_D ergibt sich für Hoch- und Tiefpässe

die Bezugsinduktivität
$$L_B = \frac{R_I}{2\pi \cdot f_D} \quad (1.8a)$$

Und die Bezugskapazität
$$C_B = \frac{1}{2\pi \cdot f_D \cdot R_I} . \quad (1.8a)$$

Daraus berechnen sich die Bauelemente zu

$$R_2 = R_I \cdot r_2 , \quad (1.9a)$$

$$L_v = L_B \cdot l_v , \quad (1.9a)$$

$$C_v = C_B \cdot c_v . \quad (1.9a)$$

Im Labor stehen eine begrenzte Anzahl an Induktivitäten zur Verfügung. Es ist daher L_B so zu bestimmen, dass eine passende Induktivität eingesetzt werden kann. L_B kann verändert werden, indem man entweder den Impedanzpegel (R_I und R_2) oder die Grenzfrequenz f_D verändert.

Näheres zur Normierung findet man auch in Abschnitt 2.1.1.

1.3 Versuchsdurchführung

1.3.1 Vorbereitende Aufgaben

Die folgenden Aufgaben müssen vor Versuchsbeginn bearbeitet werden!

Es sind die Filter aus den Versuchsaufgaben (Abschnitt 1.3.3) mit Hilfe des Filterkataloges [2] zu entwerfen. Anschließend muss R so angepasst werden, dass man die Induktivitätswerte mit vorhandenen Spulen (siehe Abschnitt 1.3.2) oder mit Kombinationen aus maximal zwei hintereinander geschalteten Spulen annähernd erreicht. Man gehe von einer spulensparenden Schaltung aus.

1.3.2 Messgeräte und Hilfsmittel zur Versuchsdurchführung

- 1 Kapazitäts-/Induktivitätsmessbrücke
- 1 Netzwerkanalysator (Rhode&Schwarz)
- 2 Dekadenwiderstände
- 1 Lötkolben
- 1 Filterkatalog
- Sortiment handelsüblicher Kondensatoren
- diverse Festinduktivitäten
(1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 40, 60, 80, 100 mH)

1.3.3 Versuchsaufgaben

Aufgabe 1

Es ist mit Hilfe des Filterkatalogs ein Cauer-Tiefpass mit den folgenden Eigenschaften zu projektieren:

Durchlassfrequenz	f_d	kHz
Reflexionsfaktor im Durchlassbereich	P	%
Sperrfrequenz	f_s	kHz
Betriebsdämpfung im Sperrbereich	a_s	dB
Eingangseitiger Abschlusswiderstand	R_1	Ω
Ausgangseitiger Abschlusswiderstand	R_2	Ω

Die bei der Bestimmung des Grad n entstehende „Reserve“ soll benutzt werden

zur Erweiterung des Durchlassbereichs	<input type="checkbox"/>
zur Verkleinerung von f_s	<input type="checkbox"/>
zur Vergrößerung von a_s	<input type="checkbox"/>
zur Verkleinerung des Reflexionsfaktors	<input type="checkbox"/>

a)

Die ermittelten Kapazitäten sind mit Hilfe einer Kapazitätsmessbrücke zusammenzustellen und auf Steckbrettchen aufzulöten. Man beachte das Temperaturverhalten der Kondensatoren.

Die Filterschaltung ist aufzubauen und mit den Widerständen R_1 und R_2 gemäß Bild 5 zu beschalten. Die Innenwiderstände des Netzwerkanalysators (50Ω) sind entsprechend zu berücksichtigen.

b)

Man bestimme den Frequenzgang des Filters mit dem Netzwerkanalysator. Der gefundenen Frequenzgang ist abzuspeichern und in MATLAB mit dem theoretischen Frequenzgang zu vergleichen. Zur Berechnung des theoretischen Frequenzgangs steht ein MATLAB Programm zur Verfügung.

Beide Filterkurven sind in einem Diagramm darzustellen und Abweichungen zu erklären. Das Diagramm und eine Detailansicht des Durchlassbandes ist zu drucken. In beide Diagramme soll das Toleranzschema des Entwurfs eingezeichnet werden. Ist das Toleranzschema erfüllt?

c)

Der Netzwerkanalysator kann die Übertragungsfunktion auch in der komplexen Ebene darstellen. Mit der Markerfunktion des Netzwerkanalysators ist f_d zu kennzeichnen. Die Darstellung in der komplexen Ebene ist zu drucken und zu interpretieren. Beschriften und kommentieren Sie die ausgezeichneten Punkte $f = 0, f_D, \infty$.

Aufgabe 2

Es sind der Frequenzgang und der Verlauf der Gruppenlaufzeit des Filters in Aufgabe 1 mit den entsprechenden Butterworth- und Tschebyscheff-Filtern gleichen Grades zu vergleichen.

a)

Die Filter sind analog zu Aufgabe 1 aufzubauen und die komplexen Messwerte der Übertragungsfunktion aufzuzeichnen.

Auswertung der aufgezeichneten Meßwerte (nach Versuchsdurchführung):

Unter MATLAB sollen die komplexen Messwerte eingelesen und daraus Betrag, Phase und Gruppenlaufzeit der Filter bestimmt werden. Es ist ein Diagramm mit den Beträgen und ein zweites Diagramm mit den Gruppenlaufzeiten der drei realisierten Approximationen zu erstellen. Zeichnen Sie das dem Entwurf zugrundeliegende Toleranzschema in den Betragsgang ein. Warum wird das Toleranzschema für die Butterworth- und Tschebyscheff-Approximation nicht erfüllt?

Erstellen Sie vom Betragsgang außerdem eine Detailansicht des Durchlassbandes.

b)

Mit dem Netzwerkanalysator sind die Übertragungsfunktionen in der komplexen Ebene zu drucken. Erläutern Sie die Unterschiede zum Cauer-Filter.

Aufgabe 3

Es ist mit Hilfe des Filterkatalogs ein Hochpassfilter mit den folgenden Daten zu entwerfen:

Durchlassfrequenz	f_d	kHz
Reflexionsfaktor im Durchlassbereich	P	%
Sperrfrequenz	f_s	kHz
Betriebsdämpfung im Sperrbereich	a_s	dB
Eingangseitiger Abschlusswiderstand	R_I	Ω
Ausgangseitiger Abschlusswiderstand	R_2	zu bestimmen	Ω

Die bei der Bestimmung von Grad n entstehende „Reserve“ soll benutzt werden

zur Erweiterung des Durchlassbereichs	<input type="checkbox"/>
zur Vergrößerung von f_s	<input type="checkbox"/>
zur Vergrößerung von a_s	<input type="checkbox"/>
zur Verkleinerung des Reflexionsfaktors	<input type="checkbox"/>

Mit Hilfe des Netzwerkanalysators ist der Frequenzgang zu bestimmen und auszu-drucken.

2 Aktive Filter

Seit der Verfügbarkeit von Operationsverstärkern dominieren aktive Filter. Sie besitzen gegenüber der passiven Variante vielfältigen Vorteile.

Besonders im niederfrequenten Bereich ist die Verwendung von Induktivitäten stets problematisch (groß, schwer, teuer, geringe Güte). Bei aktiven Filter kann man sich auf Kondensatoren und Widerständen beschränken. Schaltungen werden kompakter, billiger und einfacher zu implementieren.

Beim passiven Filter muss man Quell- und Lastimpedanzen im Entwurfsprozess berücksichtigen. Dies macht einerseits den Entwurfsprozess komplexer und andererseits führt es zu Problemen, wenn sich diese Impedanzen ändern. Aktive Filter kann man unabhängig von diesen Umgebungsparametern entwerfen. Damit ist aber auch die Kaskadierung von aktiven Filtern problemlos möglich. So kann man beispielsweise Filter höherer Ordnung oder Filter mit Bandpassverhalten auf recht einfache Weise realisieren.

Nachteile des aktiven Filters sind im Wesentlichen die zusätzlich benötigte Spannungsversorgung und die schlechteren Rauscheigenschaften. Vor allem bei kleinen Signalpegeln fällt das Eigenrauschen des Operationsverstärkers ins Gewicht, während passive Schaltungen auch bei kleinsten Signalpegeln gute Eigenschaften bieten.

In diesem Teil des Versuchs sollen aktive Schaltungen aufgebaut und deren Eigenschaften untersucht werden. Es gibt eine Vielzahl an Schaltungsmöglichkeiten für aktive Filter. In diesem Versuch wird das von Sallen und Key schon 1955 vorgeschlagene aktive Netzwerk verwendet.

2.1 Grundlagen der Netzwerke zweiter Ordnung

Die Übertragungsfunktion von Netzwerken zweiter Ordnung kann allgemein in der s -Ebene mit $s = \sigma + j\omega$ dargestellt werden als

$$H(s) = K \cdot \frac{s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = K \cdot \frac{(s - s_{01}) \cdot (s - s_{02})}{(s - s_{p1}) \cdot (s - s_{p2})}. \quad (2.1)$$

Das Netzwerk kann damit entweder durch die Parameter a_1 , a_0 , b_1 , b_0 oder durch die Nullstellen s_{01} , s_{02} und Pole s_{p1} , s_{p2} beschrieben werden. Die Konstante K hat nur Einfluss auf die Gesamtverstärkung des Netzwerkes und ist frequenzunabhängig. Beide Beschreibungsformen aus Gleichung (2.1) lassen sich ineinander umrechnen, wobei in Gleichung (2.2) nur die Parameter des Zählerpolynoms angegeben sind. Entsprechendes gilt für das Nennerpolynom.

$$\begin{aligned} a_1 &= -s_{01} - s_{02} \\ a_0 &= s_{01} \cdot s_{02} \\ s_{01,2} &= -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aus Gleichung (2.2) ergibt sich, dass die Null- bzw. Polstellen komplexe Werte annehmen, wenn $a_1^2 < 4a_0$ bzw. $b_1^2 < 4b_0$ gilt. Die Lage der Null- und Polstellen in der komplexen Ebene ($\sigma+j\omega$) errechnet sich zu:

$$\sigma_0 = -\frac{a_1}{2}, \omega_0 = \sqrt{a_0 - \left(\frac{a_1}{2}\right)^2}, \quad (2.3a)$$

$$\sigma_p = -\frac{b_1}{2}, \omega_p = \sqrt{b_0 - \left(\frac{b_1}{2}\right)^2}. \quad (2.3b)$$

Darüber hinaus definiert man noch die Null- bzw. Polstellenbeträge

$$\begin{aligned} |s_0| &= \sqrt{\sigma_0^2 + \omega_0^2} = \sqrt{a_0}, \\ |s_p| &= \sqrt{\sigma_p^2 + \omega_p^2} = \sqrt{b_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

sowie die Gütefaktoren

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{|s_0|}{-2\sigma_0} = \frac{\sqrt{a_0}}{a_1}, \\ Q_p &= \frac{|s_p|}{-2\sigma_p} = \frac{\sqrt{b_0}}{b_1} \end{aligned} \quad (2.5)$$

und Dämpfungsfaktoren

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{Q_0}, \\ d_p &= \frac{1}{Q_p}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.1 Normierung

In der Netzwerktheorie werden die Netzwerke mit normierten Netzwerkfunktionen beschreiben, weil dadurch die Netzwerke übersichtlicher dargestellt werden können. Hierbei werden die Bauelemente auf einen reellen Normwiderstand R_n und auf eine reelle Normfrequenz $s_n = j2\pi f_n$ bezogen. Mit dem Normwiderstand und der Normfrequenz werden aus den nichtnormierten Größen R_x (Widerstand) und $s = \sigma + j\omega f$ (Frequenz) die normierten Größen:

$$r_x = \frac{R_x}{R_n},$$

$$s' = \frac{s}{s_n}.$$
(2.7)

Damit erhält man dann wieder die normierte Kapazität c_x und die normierte Induktivität l_x zu:

$$c_x = \frac{C_x}{C_n} \quad \text{mit} \quad C_n = \frac{1}{s_n \cdot R_n},$$
(2.8a)

$$l_x = \frac{L_x}{L_n} \quad \text{mit} \quad L_n = \frac{R_n}{s_n}.$$
(2.8b)

Beispiel einer Normierung:

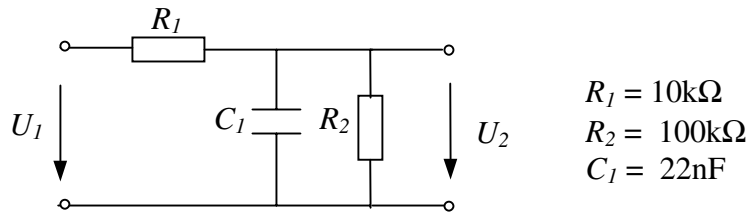


Bild 7 Schaltung zum Normierungsbeispiel

Die Übertragungsfunktion $H(s)$ der Schaltung in Bild 7 ergibt sich zu:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{sR_1C + (1 + R_1/R_2)}.$$
(2.10)

Mit Gl. (2.7) und Gl. (2.8a) kann man Gl. (2.10) normieren und erhält die normierte Wirkungsfunktion $H(s')$

$$H(s') = \frac{1}{\frac{R_n r_1}{R_n r_2} + s' \cdot s_n \cdot \frac{R_n r_1 C_1}{R_n s_n} + 1} = \frac{1}{s' r_1 c_1 + \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right)}.$$
(2.11)

Wählt man einen Normierungswiderstand $R_n = 10\text{k}\Omega$ und eine Normfrequenz $s_n = 2\pi f_n = 10\text{kHz}$, so ist die Normkapazität nach Gl. (2.8a) $c_n = 10\text{nF}$. Man erhält für $r_1 = 1$, $r_2 = 10$ und für $c_1 = 2,2$. Für die normierte Übertragungsfunktion aus Gl. (2.11) folgt:

$$H(s') = \frac{1}{s' \cdot 2,2 + 1,1} = \frac{1}{1,1} \cdot \frac{1}{2s' + 1}.$$

Es handelt sich also um einen Tiefpass erster Ordnung mit einer reellen Polstelle bei $s' = s/s_n = -0,5$. Der Polstellenbetrag $|s'_p| = \omega'_p$ ist die normierte Eckfrequenz ω'_p des Tiefpasses und ergibt nach der Entnormierung:

$$\begin{aligned} |s_p| &= \omega_p = s' \cdot 10\text{kHz} = 5\text{kHz}, \\ f_p &= \omega / 2\pi = 796\text{Hz}. \end{aligned}$$

Die Gleichspannungsverstärkung der Schaltung ist $K=1/1,1=0,909$.

2.1.2 Übertragungsfunktion für einen Tiefpass 2-ter Ordnung

Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 2-ter Ordnung wird durch ein Nennerpolynom zweiter Ordnung beschrieben:

$$H_{TP}(s) = K \frac{1}{s^2 + b_1 s + b_0} = K \frac{|s_p|^2}{s^2 + d_p |s_p| s + |s_p|^2}. \quad (2.12)$$

Durch Anwenden der Gl. (2.4), (2.5) und (2.6) wurde Gl. (2.12) so umgeformt, dass die Koeffizienten b_0 und b_1 durch den Polbetrag $|s_p|$ ersetzt werden konnten.

Nimmt man in Gl. (2.12) den Polbetrag $|s_p|$ auch als Normfrequenz s_n' , so vereinfacht sich die Darstellung und die Pole liegen auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene:

$$H_{TP}(s') = K \frac{1}{s'^2 + d_p s' + 1}. \quad (2.13)$$

Es ist interessant, dass die Tiefpasscharakteristik nur von dem Faktor d_p bestimmt wird. Bei Butterworth-Filtern wird der Polbetrag $|s_p|$, der in unserem Fall auch gleichzeitig Normfrequenz $s_n = \omega_n$ ist, als Grenzfrequenz definiert. Aus Gl. (2.12) erkennt man, dass bei dieser Frequenz $|H_{TP}(j |s_p|)| = \frac{K}{d_p}$ wird.

Für die wichtigsten Tiefpassapproximationen ergeben sich folgende Faktoren d_p :

Bessel	$d_p=1,72$	
Butterworth	$d_p=\sqrt{2}$	
Tschebyscheff	$d_p=0,77$	(3dB Welligkeit)

Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der Funktion H_{TP} aus Gleichung (2.13) vom Parameter d_p ist in Bild 8 der Betrag von H_{TP} für die obigen drei Fälle dargestellt. Das Bild enthält außerdem die dazugehörigen Impulsantworten. Man beachte, dass das Überschwingen der Impulsantwort mit steigender Selektivität zunimmt.

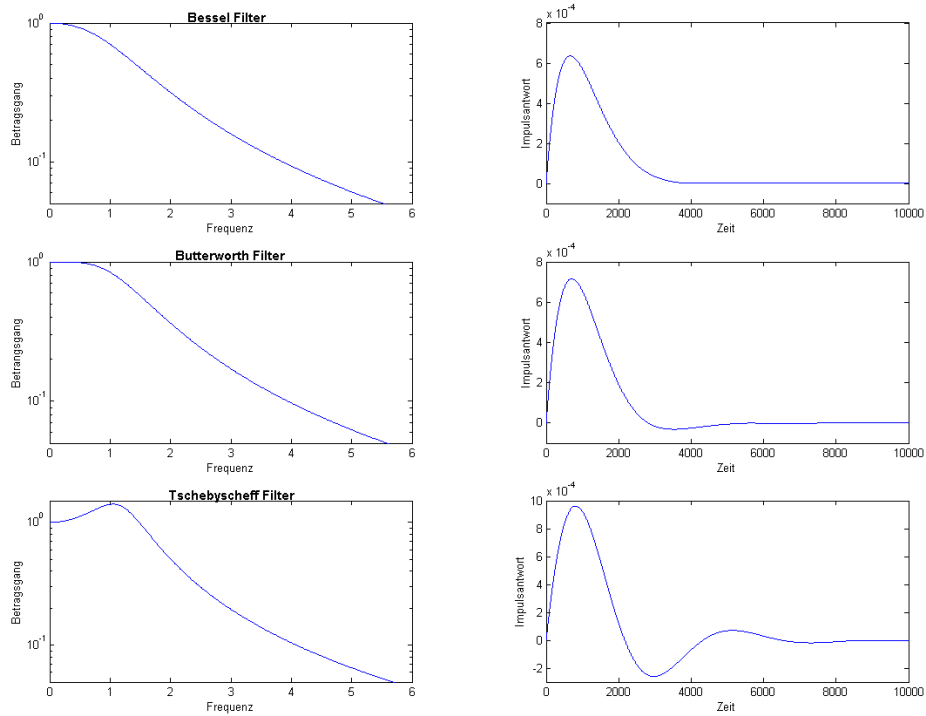


Bild 8 Betrag und Impulsantwort von H_{TP} aus Gleichung (2.13) für $d_p=1.72$, $d_p=1.414$ und $d_p=0.77$

2.1.3 Übertragungsfunktion für einen Hochpass 2-ter Ordnung

Es gilt:

$$H_{HP}(s) = K \frac{s^2}{s^2 + b_1 s + b_0} = K \frac{s^2}{s^2 + d_p |s_p| s + |s_p|^2}. \quad (2.14)$$

Durch Einsetzen der Normfrequenz $s_n = |s_p|$ erhält man:

$$H_{HP}(s') = K \frac{s'^2}{s'^2 + d_p s' + 1}. \quad (2.15)$$

Ebenso wie bei der Tiefpassfunktion wird

$$H_{HP}(s') = \frac{K}{d_p} = K \cdot Q_p. \quad (2.16)$$

Die Filtereigenschaften werden ebenfalls nur durch die Polgüte bzw. den Dämpfungsfaktor Q_p bestimmt. Dabei ergeben sich die gleichen Werte wie bei TP-Filtern für die einzelnen Approximationen.

2.1.4 Übertragungsfunktionen für einen Bandpass 2-ter Ordnung

Es gilt:

$$H_{BP}(s) = K \frac{sb_0}{s^2 + b_1s + b_0} = K \frac{s |s_p|}{s^2 + d_p |s_p| s + |s_p|^2} \quad (2.17)$$

und normiert

$$H_{BP}(s') = K \frac{s'}{s'^2 + d_p s' + 1} \quad (2.18)$$

Die Bandpassfunktion hat im Gegensatz zur Tiefpass- und Hochpassfunktion exakt ihr Maximum bei der Frequenz $s_n = |s_p|$. Dieses Maximum hat die Höhe

$$H_{BP}(s') = \frac{K}{d_p} = K \cdot Q_p \quad (2.19)$$

Bei den Grenzfrequenzen ω_1' und ω_2' ist die Funktion um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgesunken. Da die Bandpassfunktion einen geometrisch-symmetrischen Verlauf hat, gilt:

$$\omega_1' \cdot \omega_2' = 1 \text{ mit } \omega' = \frac{\omega}{s_n}, \quad (2.20)$$

$$\sqrt{\omega_1' \cdot \omega_2'} = |s_p|,$$

$$\frac{\omega_2' - \omega_1'}{|s_p|} = d_p \quad (2.21)$$

2.2 Realisierung durch Sallen-Key-Filter

In Bild 9 ist die allgemeine Struktur des Sallen-Key-Filters angegeben.

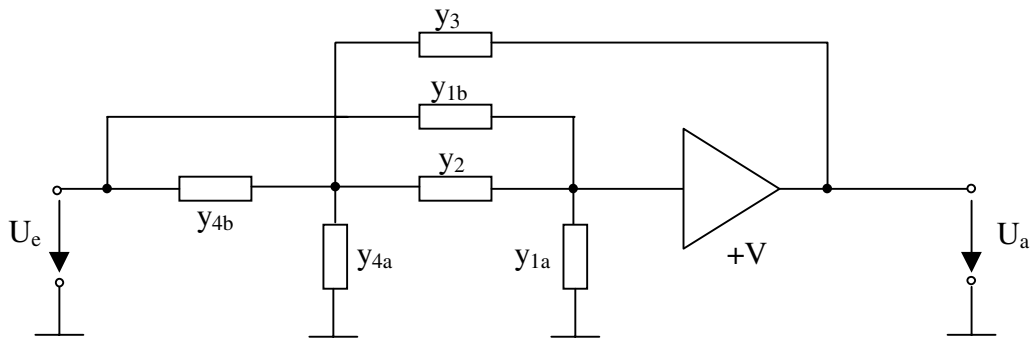


Bild 9 Allgemeines Sallen-Key-Filter

Der Verstärker ist beispielsweise ein Operationsverstärker in Elektrometer-Schaltung. Die Widerstände zur Einstellung der Verstärkung sind in Bild 9 und in den folgenden Schaltungen nicht dargestellt. Im Versuchsaufbau wird ein auf drei Stellen genau einstellbarer Verstärker eingesetzt. Es sind dabei nur Verstärkungen >1 einstellbar.

2.2.1 Sallen-Key-Tiefpass

Die Schaltungselemente Y_{1b} und Y_{4a} entfallen und die übrigen Zweipole werden durch Bauelemente gemäß Bild 10 ersetzt.

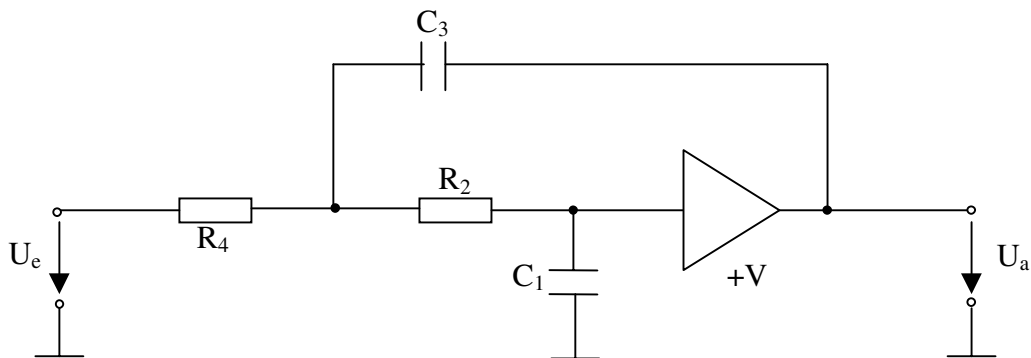


Bild 10 Sallen-Key-Tiefpass

Die Tiefpassfunktion nach Bild 10 lautet:

$$H(s) = \frac{V \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_4}}{s^2 C_1 C_3 + s \left[\frac{C_1}{R_2} + \frac{C_1}{R_4} + \frac{C_3(1-V)}{R_2} \right] + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_4}}$$

$$H(s) = \frac{V \cdot s_n^2}{s^2 + s \cdot s_n [\beta + \alpha^{-1} + \alpha(1-V)] + s_n^2}, \quad (2.22)$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_3 R_4}{C_1 R_2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{C_1 R_4}{C_3 R_2}}. \quad (2.23)$$

Führt man bei Gleichung (2.22) einen Koeffizientenvergleich mit (2.12) durch, so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$K = V, \quad |s_p| = s_n, \quad d_p = \frac{1}{Q_p} = \beta + \alpha^{-1} + \alpha(1-V). \quad (2.24)$$

Für den Filterentwurf sind die Größen Grenzfrequenz $|s_p|$, Polgüte Q_p sowie die Durchlassbereichsverstärkung K vorgegeben zur Verfügung. Die Verstärkung im Durchlassbereich kann aber durch Nachschalten eines Verstärkers auf nahezu beliebige Werte gebracht werden, so dass diese Größe nicht als Entwurfsanforderung für das Filter herangezogen werden sollte. Es bestehen nun mehrere Möglichkeiten, um die Filterparameter K , s_n , α und β nach Gleichung (2.24) zu bestimmen [3]. In diesem Versuch sollen die Kapazitäten und Widerstände gleich groß sein. Damit ergibt sich:

$$V = 3 - d_p, \quad \alpha = \beta = 1, \quad R_2 = R_4, \quad C_1 = C_3. \quad (2.25)$$

2.2.2 Sallen-Key-Hochpass

Eine Hochpassschaltung entsteht, wenn man in der Schaltung nach Bild 10 die Widerstände mit den Kondensatoren vertauscht, d.h. man führt eine RC-CR-Transformation durch. Danach werden die normierten RC-Bauelemente eines Tiefpasses in die normierten Elemente eines Hochpasses umgewandelt.

$$c_x = \frac{1}{r_x}, \quad r_y = \frac{1}{c_y}. \quad (2.26)$$

Es entsteht eine Hochpassfunktion:

$$H(s) = \frac{s^2 C_2 C_4 V}{s^2 C_2 C_4 + s \left[\frac{C_2}{R_1} + \frac{C_4}{R_1} + \frac{C_2(1-V)}{R_3} \right] + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3}}$$

$$H(s) = \frac{V \cdot s^2}{s^2 + s \cdot s_n [\beta + \alpha + \alpha(1-V)] + s_n^2}, \quad (2.27)$$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{R_2 R_4 C_1 C_3}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{C_4 R_3}{C_2 R_1}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{C_2 R_3}{C_4 R_1}}. \quad (2.28)$$

Der Zusammenhang zwischen Gleichung (2.14) und (2.27) lautet:

$$K = V, \quad |s_p| = s_n, \quad d_p = \frac{1}{Q_p} = \beta + \alpha + \alpha^{-1}(1-V). \quad (2.29)$$

Ebenso wie beim Tiefpassfilter gibt es mehrere Möglichkeiten des Entwurfs. Aus Gründen der Einfachheit beschränkt man sich hier wieder auf:

$$V = 3 - d_p, \quad \alpha = \beta = 1, \quad R_1 = R_3, \quad C_2 = C_4. \quad (2.30)$$

2.2.3 Bandpassfilter

Will man die allgemeine Schaltung aus Bild 9 für einen Bandpass verwenden, so muss man die Leitwerte durch RC-Bauelemente gemäß Bild 11 ersetzen.

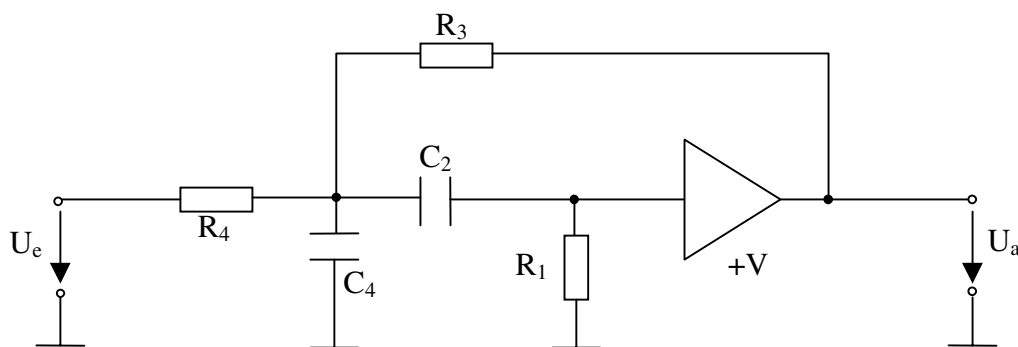


Bild 11 Sallen-Key-Bandpass 2. Ordnung

Die Schaltung nach Bild 11 hat folgendes Übertragungsverhalten:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{sV \frac{C_2}{r_4}}{s^2 C_2 C_4 + s \left[\frac{C_2}{R_1} + \frac{C_2}{R_4} + \frac{C_4}{R_1} + \frac{C_2(1-V)}{R_3} \right] + \frac{1}{R_1} \cdot \left(\frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \right)} \\
H(s) &= \frac{s \cdot s_n \alpha^{-1} \mathcal{W}}{s^2 + s \cdot s_n [\beta + \alpha + \alpha^{-1}(1-V + \mathcal{W})] + s_n^2}, \tag{2.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{\sqrt{R_1 C_2 C_4 \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}}, & \alpha &= \sqrt{\frac{C_4 \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}{C_2 R_1}}, \\
\beta &= \sqrt{\frac{C_2 \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}{C_4 R_1}}, & \gamma &= \frac{1}{R_4} \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ein Koeffizientenvergleich der Gleichungen (2.16) und (2.31) ergibt die Zusammenhänge:

$$K = V\gamma\alpha^{-1}, \quad |s_p| = s_n, \quad d_p = \frac{1}{Q_p} = \beta + \alpha + \alpha^{-1}[1 - V(1 - \gamma)]. \tag{2.32}$$

Ebenfalls aus Gründen des einfachen Laboraufbaus sollen hier beim Entwurf alle Widerstände und alle Kondensatoren gleich groß sein. Diese Vorgehensweise rechtfertigt nicht den Schluss, dass dieser Filterentwurf für alle Anwendungsfälle das Optimum darstellt.

Man erhält die Netzwerkparameter:

$$V = 4 - d_p \sqrt{2}, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad R_1 = R_3 = R_4, \quad C_2 = C_4, \quad \gamma = \frac{1}{2}. \tag{2.33}$$

2.3 Versuchsdurchführung

2.3.1 Geräte

- 1 Netzwerkanalysator
- 1 OpAmp - Labormodelle
- 2 Festkapazitäten (10nF)
- 3 Dekadenwiderstände

2.3.2 Vorbereitende Aufgaben

Die folgenden Aufgaben müssen vor Versuchsbeginn bearbeitet werden!

Man entwerfe entsprechend folgender Tabelle Tiefpass-, Hochpass- und Bandpaßfilter nach Sallen-Key. Alle Filter sollen eine Grenzfrequenz $|s_p|$ von $2\pi \cdot 1\text{kHz}$ aufweisen. Alle verwendeten Kapazitäten sollen einen Wert von 10nF besitzen. Die errechneten Werte für V und R sind in folgende Tabelle einzutragen.

Filtertyp	Approximation	V	R	C
TP	Bessel			10nF
	Butterworth			
	Tschebyscheff			
HP	Bessel			10nF
	Butterworth			
	Tschebyscheff			
BP	Bessel			10nF
	Butterworth			
	Tschebyscheff			

2.3.3 Versuchsaufgaben

Aufgabe 1

Die in der Vorbereitung entworfenen Filter sind aufzubauen. Mit dem Netzwerkanalysator sind die Frequenzgänge darzustellen und deren komplexe Werte abzuspeichern.

Auswertung unter MATLAB (nach Versuch):

- 1) Für die Tiefpassfilter sind jeweils Betragsfrequenzgang, Phase, Gruppenlaufzeit und Sprungantwort aus den abgespeicherten Werten der Übertragungsfunktion zu berechnen. Die für beide Filterapproximationen entstehenden Verläufe sind jeweils in ein Diagramm zu drucken (alle Phasenverläufe in ein Diagramm, alle Gruppenlaufzeiten in ein Diagramm...).
- 2) Für die Hochpass- und Bandpassfilter sind jeweils die beiden Betragsfrequenzgänge zu berechnen und in ein Diagramm zu drucken.

Aufgabe 2

a)

Man beschalte das Tschebyscheff-TP-Filter ausgangseitig mit einem zusätzlichen Widerstand von $10\text{ k}\Omega$ und beobachte die Auswirkung auf die Frequenzkennlinie. Welchen Vorteil aktiver Filter kann man gegenüber passiven aus diesem Ergebnis ableiten?

b)

Bei den verwendeten Sallen-Key-Filtern kann man einfach durch Verändern des Widerstand R die Grenzfrequenz verschieben. Bei dem Tschebyscheff-TP-Filter ist R zu variieren und das Verschieben der Grenzfrequenz zu beobachten.

Wie müsste man bei dem passiven Entwurfsverfahren vorgehen, um die Grenzfrequenz zu verändern?

c)

Von dem Tschebyscheff-TP-, -HP- und -BP-Filter sind Ausdrücke der komplexen Ebene zu erstellen. Welche Schlüsse kann man aus diesem Diagramm über Frequenzverhalten, Nennergrad und Zählergrad ziehen?

d)

Mit Hilfe eines Funktionsgenerators ist die Sprungantwort des Tschebyscheff-TP-Filters zu bestimmen. Welche Auswirkung hat das Erhöhen der Verstärkung auf die Filtercharakteristik, die Sprungantwort und die Stabilitätseigenschaft des Filters?

3 Literaturhinweise

- | | | |
|-----|----------------|--|
| [1] | W. Rupprecht | Netzwerksynthese
Springer-Verlag |
| [2] | R. Saal | Handbuch zum Filterentwurf,
AEG-Telefunken,
L: elt1098 |
| [3] | N. Fliege | Lineare Schaltungen mit Operationsverstärkern
Springer-Verlag |
| [4] | Tietze, Schenk | Halbleiterschaltungstechnik
Springer-Verlag |