Übungszettel 7 mit Lösungen
Audio-Applikationen

M 2.6 Grundlagen der Elektrotechnik 2 (GEL2)
Prof. Dr.-Ing. M. Meiners
SoSe 2024

Prof. Dr.-Ing. M. Meiners

Zur Auswertung und graphischen Darstellung der Aufgaben empfiehlt sich die Verwendung von Python und LTspice.

Aufgabe 7.1 Resonanztransformator

Berechnen Sie den Frequenzgang der komplexen Amplitude $\underline{H}_u(f) = \underline{U}_1(f)/\underline{U}_0(f)$ der folgenden Transformator-Schaltung eines dynamischen Mikrofons in **??**.

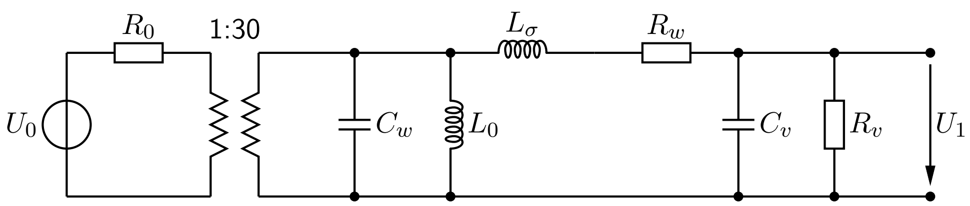


Figure 1: Ersatzschaltung eines dynamischen Mikrofons

$R_0 = 3\,\Omega$, Innenwiderstand des Mikrofons	
$L_0 = 25\,\mathrm{H}$, Hauptinduktivität	$L_\sigma = 1\,\mathrm{H}$, Streuinduktivität
$R_w = 100\,\Omega$, Wicklungswiderstand	$C_w = 800\,\mathrm{pF}$, Wicklungskapazität
$R_v = 100\,\mathrm{k\Omega}$, Verstärker-Eingangswiderstand	$C_v = 200\,\mathrm{pF}$, Verstärker- und Kabelkapazität

Stellen Sie die Ergebnisse als Funktion der Frequenz grafisch dar und kommentieren Sie sie

a) als Ortskurve in der komplexen H-Ebene

b) als Betrag $|H|$ und Phase ϕ_H über $\log(f/f_0)$

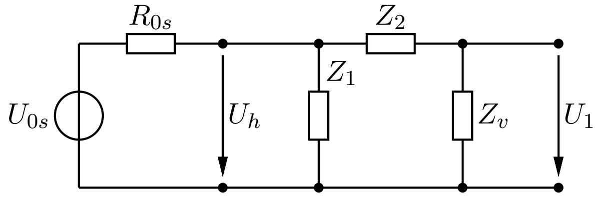
c) als Bode-Darstellung $\log|H|$ über $\log(f/f_0)$.

Es interessieren Grenzfrequenzen, Eckfrequenzen, Hochpass/Tiefpass-Verhalten, die Resonanz-Güte, die Rolle der einzelnen Komponenten im Hinblick auf die genannten Frequenzen.

Lösung

Um den idealen Tranformator aufzulösen muss man:

1. R_0 auf die Sekundärseite transformieren; erscheint dort als $R_{0s} = R_0/\text{ü}^2$ mit ü=1/30.
2. U_0 durch eine sekundärseitige Ersatzspannungsquelle $U_{0s} = U_0/\text{ü}$ ersetzen.



Neues Netzwerk:

$$\underline{U}_1 = \frac{Z_v}{Z_v + Z_2} U_h \qquad U_h = \frac{Z_1||(Z_2 + Z_v)}{R_{0s} + (Z_1||(Z_2 + Z_v))} U_{0s} \tag{1}$$

$$\underline{H}_u = \frac{U_1}{U_0} = \frac{U_1}{\text{ü}U_{0s}} = \frac{1}{\text{ü}} \frac{Z_v}{Z_v + Z_2} \frac{Z_p}{R_{0s} + Z_p} \tag{2}$$

mit

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} = j\omega C_w + \frac{1}{j\omega L_0}; \qquad Z_2 = R_w + j\omega L_\sigma \tag{3}$$

$$Y_v = \frac{1}{Z_v} = j\omega C_v + \frac{1}{R_v}; \qquad Z_p = Z_1||(Z_2 + Z_v) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_v)}{Z_1 + Z_2 + Z_v} \tag{4}$$

```python
#!/usr/bin/env python


""" Dynamisches Mikrofon """

# Fuer den Bild-Export mit TikZ
# __require__ = 'matplotlib==3.7.5'
# import pkg_resources
# pkg_resources.require("matplotlib==3.7.5")

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# import tikzplotlib as tikz

# %% Spezifikation
R0 = 3  # Innenwiderstand des Mikrofons
L0 = 25  # Hauptinduktivitaet
Ls = 1  # Streuinduktivitaet
Rw = 100  # Wicklungswiderstand
Cw = 800e-12  # Wicklungskapazitaet
Rv = 100e3  # Verstaerker-Eingangswiderstand
Cv = 200e-12  # Verstaerker- und Kabelkapazitaet
u = 1/30  # Uebertragungsfaktor u1/u2

# %% Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 5, 1000)
w = 2 * np.pi * f
f0 = 1

# %% Impedanzen/Admittanzen
Y1 = 1j*w*Cw + 1/(1j*w*L0)
Z1 = 1/Y1

Yv = 1j*w*Cv + 1/Rv
```

```python
Zv = 1/Yv

Z2 = Rw + 1j*w*Ls

Zp = Z1*(Z2 + Zv)/(Z1 + Z2 + Zv)

R0q = R0/u**2

# %% Uebertragungsfunktion
H = 1/u * Zv/(Z2 + Zv) * Zp/(R0q + Zp)


# %% Ortskurve von H(f)
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('H-Ebene')
plt.plot(np.real(H), np.imag(H))
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.legend(('H'))
plt.grid()
plt.show()
# tikz.save('hw7p1a.tikz', figurewidth='12cm', figureheight='8cm')


# %% Betrag und Phase von H(f)
fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Betrag und Phase')
plt.subplot(211)
plt.semilogx(f, np.abs(H))
# plt.xlabel(r'$\log(f/f_0)$')
plt.ylabel(r'|H|')
plt.grid()
plt.subplot(212)
plt.semilogx(f, np.angle(H))
plt.xlabel(r'$\log(f/f_0)$')
plt.ylabel(r'arg(H)')
plt.grid()
plt.show()
# tikz.save('hw7p1b.tikz', figurewidth='12cm', figureheight='8cm')


# %% Betragsfrequenzgang von H(f)
H_dB = 20*np.log10(np.abs(H))

fig3 = plt.figure(3)
plt.title('Betragsfrequenzgang')
plt.semilogx(f, H_dB)
plt.xlabel(r'$\log(f/f_0)$')
plt.ylabel(r'$|H|$ in dB')
plt.grid()
plt.show()
# tikz.save('hw7p1c.tikz', figurewidth='12cm', figureheight='8cm')
```

Aufgabe 7.2 Ersatzschaltbild eines Lautsprechers

Die dargestellte Schaltung in **??** ist ein vereinfachtes Ersatzschaltbild eines elektrodynamischen Lautsprechers. Dabei repräsentiert $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ die Impedanz der ruhenden Schwingspule, und $\underline{Z}_M$, die Parallelschaltung aus R_2, L_2 und C_2, repräsentiert die dynamisch-mechanischen Eigenschaften des Systems.

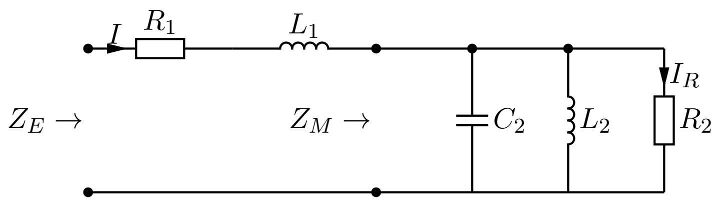


Figure 2: Ersatzschaltbild eines Lautsprechers

$$R_1 = 3\,\Omega \qquad L_1 = 200\,\mu\text{H}$$
$$C_2 = 1000\,\mu\text{F} \qquad L_2 = 4\,\text{mH}$$
$$R_2 = 30\,\Omega$$

Teilaufgabe 7.2.1

Drücken Sie die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E$ der Schaltung als Funktion der verwandten Bauteile (R_1, L_1, R_2, L_2, C_2) und der Kreisfrequenz ω aus.

Lösung

$$Y_M = \frac{1}{Z_M} = j\omega C_2 + \frac{1}{j\omega L_2} + \frac{1}{R_2} \tag{5}$$
$$= \frac{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\frac{\omega L}{R_2}}{j\omega L_2} \tag{6}$$
$$Z_E = R_1 + j\omega L_1 + Z_M \tag{7}$$
$$= R_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\frac{\omega L}{R_2}} \tag{8}$$

Teilaufgabe 7.2.2

Für niedrige Frequenzen ($0 \leq f \leq 100\,\text{Hz}$) kann der Beitrag ωL_1 der Induktivität L_1 zur Eingangsimpedanz vernachlässigt werden. Konstruieren Sie mit dieser Vereinfachung die Ortskurve der Eingangsimpedanz $\underline{Z}_{E0}$ als Funktion der Kreisfrequenz ω.

Lösung

$$Z_{E0} = R_1 + Z_M \tag{9}$$

Konstruktion der Ortskurve $Z_{E0}(\omega)$:

1. Y_M zeichnen: Gerade
2. Y_M invertieren $\rightarrow Z_M$: Kreis
3. R_1 addieren $\rightarrow Z_{E0}$: verschobener Kreis

Teilaufgabe 7.2.3

Berechnen Sie den Wert der Impedanz $\underline{Z}_{E0}$ bei der Frequenz $f = 100\,\text{Hz}$.

Lösung

$$Z_{E0}(f = 100\,\mathrm{Hz}) = (3.6 - j4.25)\Omega \tag{10}$$

Teilaufgabe 7.2.4

Geben Sie näherungsweise die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}_E$ als Funktion der Kreisfrequenz ω an, inklusive des Beitrags der Induktivität L_1.

Lösung

Für $f \leq 100\,\mathrm{Hz}$ ist $\omega L_1 \leq 0.125$, daraus folgt für $f \leq 100\,\mathrm{Hz}$ dass $Z_E \approx Z_{E0}$.
Für $f >> 100\,\mathrm{Hz}$ ist $Z_{E0} \approx R_1$ und $Z_E \approx R_1 + j\omega L_1$.

Teilaufgabe 7.2.5

Der Lautsprecher werde aus einer Sinusspannungsquelle mit $\hat{U}_0 = 10\,\mathrm{V}$ und Innenwiderstand $R_i = 0.5\,\Omega$ gespeist. Stellen Sie das Verhältnis der Effektivwerte von I_R und I sowie den Phasenwinkel von I_R zu I als Funktion der Frequenz graphisch dar (Bode-Diagramm).
Berechnen Sie die abgestrahlte Schallleistung $P_S = RI^2_{R,eff}$ als Funktion der normierten Verstimmung $\nu = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$, wobei $\omega_0 = (L_2C_2)^{-1/2}$ ist, und stellen Sie $P_S(\nu)$ graphisch dar. Wie groß ist die von der Schaltung aufgenommene Wirkleistung bei $\omega = \omega_0$?

Lösung

$$\frac{I_R}{I} = \frac{Z_M}{R_2} = \frac{j\omega L_2}{R_2(1-\omega^2 L_2 C_2) + j\omega L_2} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{1 + R_2\left(\frac{1}{j\omega L_2} + j\omega C_2\right)} \tag{12}$$

$$= \frac{1}{1 + jR_2\sqrt{\frac{C_2}{L_2}}\left(\omega\sqrt{L_2C_2} - \frac{1}{\omega\sqrt{L_2C_2}}\right)} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{1 + jQ\underbrace{\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}_{\nu}} \tag{14}$$

Die Güte $Q = \frac{R_2}{\sqrt{\frac{L_2}{C_2}}} = 15$.

$$\frac{I_{R,eff}}{I_{eff}} = \frac{|I_R|}{|I|} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\nu^2}} \tag{15}$$

Eine vernünftige Darstellung ist doppelt-logarithmisch (Bode-Diagramm).

$$\varphi = \arg\left(\frac{I_r}{I}\right) = -\arctan\left(Q\nu\right) \tag{16}$$

Die Schallleistung ergibt sich wie folgt:

$$P_S = R_2 I^2_{R,eff} = R_2 I^2_{eff}\frac{I^2_{R,eff}}{I^2_{eff}} \tag{17}$$

$$= R_2\frac{\frac{\hat{U}_0^2}{2}}{|Z_E + R_i|^2}\frac{1}{1+Q^2\nu^2} \tag{18}$$

Für die exakte Berechnung Z_E aus 7.2.1 einsetzen, genähert 7.2.4 benutzen.

Wenn $\omega = \omega_0$, dann $\nu = 0$:

$$P_S \approx R_2 \frac{\frac{\hat{U}_0^2}{2}}{(R_1 + R_i + R_2)^2} = 1.3\,\mathrm{W} \tag{19}$$

```python
#!/usr/bin/env python

""" Lautsprecher """

# Fuer den Bild-Export mit TikZ
# __require__ = 'matplotlib==3.7.5'
# import pkg_resources
# pkg_resources.require("matplotlib==3.7.5")

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# import tikzplotlib as tikz

# %% Spezifikation
L1 = 200e-6
R1 = 3
C2 = 1000e-6
L2 = 4e-3
R2 = 30

# %% Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 4, 2000)
w = 2 * np.pi * f

# %% Impedanzen/Admittanzen
YM = 1j*w*C2 + 1/(1j*w*L2) + 1/R2
ZM = 1/YM

ZE = R1 + 1j*w*L1 + ZM

ZE0 = R1 + ZM


# %% Ortskurve von ZE0(w)
fig1 = plt.figure(1)
plt.title('Ortskurve')
plt.plot(np.real(ZE0), np.imag(ZE0), label=r'$Z_{E0}$')
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
# tikz.save('hw7p1a.tikz', figurewidth='12cm', figureheight='8cm')

# %% Uebertragungsfunktion
Q = R2/(np.sqrt(L2/C2))  # Guete
print(Q)

w0 = 1/np.sqrt(L2*C2)
print(w0)

v = (w/w0 - w0/w)  # Verstimmung

HI = 1/(1 + 1j*Q*v)
HI_dB = 20*np.log10(np.abs(HI))
```

```python
w_w0 = w/w0

# %% Betrag und Phase von HI(w/w0)
fig2 = plt.figure(2)
plt.title('Betrag und Phase')
plt.subplot(211)
plt.semilogx(w_w0, HI_dB)
plt.ylabel(r'$|I_R/I|$ in dB' )
plt.grid()
plt.subplot(212)
plt.semilogx(w_w0, np.angle(HI))
plt.xlabel(r'$\log(\omega/\omega_0)$')
plt.ylabel(r'$\arg(I_R/I)$')
plt.grid()
plt.show()
# tikz.save('hw7p1b.tikz', figurewidth='12cm', figureheight='8cm')


# %% Schallleistung Ps
U0s = 10
Ri = 0.5

Ps = R2 * (U0s**2/2)/(np.abs(ZE + Ri)**2) * 1/(1 + Q**2 * v**2)

fig3 = plt.figure(3)
plt.title(r'Schallleistung')
plt.plot(v, Ps)
plt.xlabel(r'$\nu$')
plt.ylabel(r'$P_S$ in W')
plt.axis([-4, 4, 0, 1.5])
plt.grid()
plt.show()
# tikz.save('hw7p1c.tikz', figurewidth='12cm', figureheight='8cm')
```