

# **Grundlagen der Elektrotechnik 2**

Mirco Meiners      Alicia von Ahlen

2025-04-12



# Inhaltsverzeichnis

<b>Unsyllabus</b>	<b>1</b>
<b>I. Seminar</b>	<b>3</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1. Wissenschaftliches Rechnen / Datenwissenschaft . . . . .	5
1.2. Schaltungssimulation (SPICE) . . . . .	5
1.3. Betriebssystem (OS) - Werkzeuge (Tools) . . . . .	5
1.4. Code Editoren . . . . .	5
1.5. Datenverarbeitung / Data Sciences . . . . .	6
1.5.1. Dateisystem / Journaled File System . . . . .	6
1.5.2. Tabellenformate / Rectangular Data . . . . .	6
1.5.3. Serialisation . . . . .	6
1.5.4. Spezielle Formate / Data Frames . . . . .	6
1.5.5. Embedded DB-Engines . . . . .	6
1.6. Schreibst Du noch oder TeXst Du schon? . . . . .	7
1.7. LaTeX Editoren . . . . .	7
1.8. Literaturverwaltung und LaTeX . . . . .	7
1.9. Schöne neue Welt . . . . .	8
1.10. Halbleiterherstellung (Infineon, Dresden) . . . . .	8
1.11. FinFET (Intel) . . . . .	8
1.12. TSMC Fab (Next Gen 7/5 nm) . . . . .	8
1.13. Es war einmal ... . . . . .	9
1.14. Damals und heute . . . . .	9
1.15. Systemhierarchie . . . . .	11
1.16. Schnittstellen zur Aussenwelt . . . . .	12
1.17. Meeting mit einem System . . . . .	12
1.18. System in a Package (SiP) . . . . .	13
1.19. Sie werden unsere Experten . . . . .	13
1.20. Lernziele des Moduls . . . . .	14
1.21. Seminaristischer Unterricht . . . . .	14
1.22. Beschreibung elektrotechnischer Systeme . . . . .	14
1.23. Konzentrierte Schaltelemente . . . . .	15
1.24. Harmonische Signale ... . . . . .	15

## Inhaltsverzeichnis

<b>2. Netzwerkerregung</b>	<b>17</b>
2.1. Schaltzeichen . . . . .	17
2.2. Erregungsarten . . . . .	17
2.3. Sinusförmige Erregung, periodische Vorgänge . . . . .	17
2.4. Eigenschaften harmonischer Funktionen . . . . .	18
2.5. Mittelwerte periodischer Zeitfunktionen . . . . .	18
2.6. $u/i$ -Verhalten . . . . .	19
<b>3. Komplexe Wechselstromrechnung</b>	<b>21</b>
3.1. Beschreibung und Analyse im Frequenzbereich . . . . .	21
3.2. Symbolisches Verfahren . . . . .	21
3.3. Vorteile des Frequenzbereichs . . . . .	22
3.4. Funktionaltransformation . . . . .	22
3.4.1. Definitionen . . . . .	23
3.5. Zeigerdarstellung . . . . .	23
3.5.1. Grundschaltelemente . . . . .	23
3.5.2. Komplexe Zahlen . . . . .	25
3.5.3. Berechnung von Betrag und Phase . . . . .	25
3.5.4. Darstellung in der komplexen Ebene . . . . .	25
3.5.5. Kartesische Form . . . . .	26
3.5.6. Polare Form . . . . .	26
3.5.7. Kartesisch $\leftrightarrow$ Polar . . . . .	26
3.5.8. Euler's Formel . . . . .	26
3.5.9. Euler's inverse Formel . . . . .	26
3.5.10. Algebraische Regeln . . . . .	26
<b>4. Impedanz, Admittanz und Leistung</b>	<b>27</b>
4.1. Widerstandsoperator . . . . .	27
4.2. Leitwertoperator . . . . .	28
4.3. Vergleich von RLC-Netzwerken . . . . .	29
4.4. Leistung von Wechselsignalen . . . . .	29
<b>5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen im Frequenzbereich</b>	<b>31</b>
5.1. Bode-Diagramm . . . . .	31
5.2. Übertragungsfaktor . . . . .	31
5.3. Angaben in dB . . . . .	32
5.3.1. Bode-Diagramm einer RC-Schaltung (Hochpass) . . . . .	33
5.4. Nyquist-Diagramm . . . . .	34
5.4.1. Ortskurve einer RC-Schaltung . . . . .	35
5.4.2. Inversion von Ortskurven . . . . .	36
5.5. RC-Filter . . . . .	37
5.5.1. RC-Tiefpaß . . . . .	37
5.5.2. RC-Hochpaß . . . . .	37
5.5.3. RC-Bandpaß . . . . .	37
5.6. Elementtransformation . . . . .	38

5.7. Messbrücken . . . . .	38
5.7.1. Wheatstone-Messbrücke – Gleichstrommessbrücke . . . . .	38
5.7.2. Wechselstrommessbrücke . . . . .	39
5.7.3. Kapazitätsmessbrücke nach Wien – Wien-Brücke . . . . .	39
5.7.4. Wien-Robinson-Brücke – einfaches Frequenzmessgerät . . . . .	39
<b>6. Schwingkreise</b>	<b>41</b>
6.1. Zusammenfassung der physikalische Grundlagen . . . . .	42
6.2. RLC-Reihenschwingkreis (aktiver Zweipol) . . . . .	43
6.3. Grundeigenschaften von Reihen- und Parallelschwingkreis (passiver Zweipol) . . . . .	45
6.4. Vereinheitlichte Kennzeichnung . . . . .	46
6.5. Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise . . . . .	47
<b>7. Netzwerkanalyse</b>	<b>49</b>
7.1. Systemsimulation . . . . .	49
7.2. Makrotheorie . . . . .	49
7.3. Netzwerksimulation . . . . .	49
7.4. Netzwerk . . . . .	50
7.4.1. Transiente Analyse . . . . .	50
7.4.2. Differentialgleichungssystem . . . . .	51
7.5. Netzwerkanalyse zeitabhängiger Signale . . . . .	51
7.6. Lösung im Frequenzbereich . . . . .	52
7.7. Grundaufgabe der Netzwerkanalyse . . . . .	52
7.8. Netzwerkgleichungen – Kirchhoff'sche Gesetze . . . . .	52
7.9. Vollständiges Kirchhoff'sches Gleichungssystem . . . . .	52
7.10. Netzwerkstruktur . . . . .	53
7.10.1. Unabhängige Knoten und Maschen . . . . .	53
7.10.2. Netzwerkgraph . . . . .	53
7.11. Vollständiger Baum . . . . .	53
7.11.1. Merkmale . . . . .	53
7.12. Baumkomplement . . . . .	53
7.13. Maschenstromverfahren . . . . .	54
7.14. Wahl der unabhängigen Ströme $I_M$ . . . . .	54
7.15. 4 Maschengleichungen . . . . .	54
7.16. Knotenspannungsanalyse . . . . .	55
7.17. Knotenspannungs- vs Maschenstromanalyse . . . . .	55
<b>8. Spulen und Übertrager</b>	<b>57</b>
8.1. Physikalische Grundlagen . . . . .	57
8.2. Spulen . . . . .	61
8.2.1. Anwendungsbeispiele . . . . .	62
8.3. Transformatoren und Übertrager . . . . .	65
8.3.1. Der verlustlose Übertrager . . . . .	67
8.3.2. Realer (verlustbehafteter) Übertrager . . . . .	69
8.3.3. Übertragungsfaktor . . . . .	72

## *Inhaltsverzeichnis*

8.3.4. Leistungsübertrager, Transformatoren . . . . .	73
<b>II. Hörsaalübungen</b>	<b>75</b>
<b>9. Periodische Signale</b>	<b>77</b>
9.1. Darstellung von Signalen . . . . .	77
9.1.1. Lösung . . . . .	77
9.2. Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen . . . . .	78
9.2.1. Periodendauer . . . . .	78
9.2.2. Mittelwert . . . . .	78
9.2.3. Effektivwert . . . . .	79
9.2.4. Scheitelfaktor . . . . .	79
9.3. Schaltungsberechnung in reeller Schreibweise . . . . .	81
9.3.1. Amplitude und Phase . . . . .	81
9.3.2. Spannungsverläufe . . . . .	83
9.4. Phasenanschnittsteuerung . . . . .	84
9.4.1. Aufgabe . . . . .	84
<b>III. Tutorium</b>	<b>87</b>
<b>10. Einführung</b>	<b>89</b>
10.1. Organisatorisches . . . . .	89
10.2. Termine . . . . .	89
<b>11. Komplexe Zahlen</b>	<b>91</b>
11.1. Die imaginäre Einheit . . . . .	91
11.2. Aufbau komplexer Zahlen . . . . .	92
11.3. Rechenoperationen . . . . .	92
11.3.1. Addition von komplexen Zahlen . . . . .	92
11.3.2. Subtraktion von komplexen Zahlen . . . . .	92
11.3.3. Betrag einer komplexen Zahl . . . . .	92
11.3.4. Phasenwinkel einer komplexen Zahl . . . . .	93
11.3.5. Eulersche Identität und Polarkoordinaten . . . . .	93
11.3.6. Multiplikation komplexer Zahlen . . . . .	94
11.3.7. Division komplexer Zahlen . . . . .	94
11.3.8. Kehrwert einer komplexen Zahl . . . . .	95
11.3.9. Konjugiert-Komplex . . . . .	95
11.4. Übungen . . . . .	95
11.4.1. Aufgabe 2.1 . . . . .	95
11.4.2. Aufgabe 2.2 . . . . .	95
11.4.3. Aufgabe 2.3 . . . . .	96
11.4.4. Aufgabe 2.4 . . . . .	96
11.4.5. Aufgabe 2.5 . . . . .	96

11.4.6. Aufgabe 2.6 . . . . .	97
11.4.7. Aufgabe 2.7 . . . . .	97
11.4.8. Aufgabe 2.8 . . . . .	97
11.4.9. Aufgabe 2.9 . . . . .	98
11.4.10. Aufgabe 2.10 . . . . .	98
11.4.11. Aufgabe 2.11 . . . . .	99
<b>12. Periodische Signale</b>	<b>101</b>
12.1. Stromarten . . . . .	101
12.2. Kennwerte von Wechselgrößen . . . . .	104
12.2.1. Periodendauer und Frequenz . . . . .	104
12.2.2. Phasenlage . . . . .	104
12.2.3. Mittelwert . . . . .	105
12.2.4. Gleichrichtwert . . . . .	106
12.2.5. Effektivwert . . . . .	106
12.2.6. Effektivwert mit Gleichstromanteil . . . . .	107
12.3. Übungen . . . . .	107
12.3.1. Aufgabe Gleichrichtwert . . . . .	107
12.3.2. Aufgabe Zeitfunktion berechnen . . . . .	108
12.3.3. Aufgabe Mittelwerte aus Zeitverlauf bestimmen . . . . .	109
12.3.4. Aufgabe 3.4 . . . . .	111
12.3.5. Aufgabe 3.5 . . . . .	112
12.3.6. Aufgabe 3.6 . . . . .	112
12.3.7. Aufgabe 3.7 . . . . .	114
<b>Bibliography</b>	<b>117</b>



# **Unsyllabus**

Name	Beschreibung
Kursus	M 2.3 Grundlagen der Elektrotechnik 2 (GEL2)
Semester	SoSe25
Dozent	Prof. Dr.-Ing. M. Meiners
Seminar	Mo., 09:45 Uhr - 11:15 Uhr, E 509
Tutorin	B.Eng. Alicia von Ahlen
Tutorium	Mo., 08:00 Uhr - 09:30 Uhr, E 509



# **Teil I.**

# **Seminar**



# 1. Einleitung

## 1.1. Wissenschaftliches Rechnen / Datenwissenschaft

- Python
- Matlab
- Gnu Octave
- Command-line tools

## 1.2. Schaltungssimulation (SPICE)

- LTspice Linear Technology
- ngspice (open-source)
- ELDO (Siemens EDA)
- Spectre (cadence)
- PrimeSim HSPICE (SYNOPSIS)

## 1.3. Betriebssystem (OS) - Werkzeuge (Tools)

- SSH (Secure Shell)
- Microsoft-Terminal
- Microsoft-PowerShell
- MacOS-Terminal
- Linux/MacOS zsh-tools
- Linux/MacOS bash-it
- Git (Versionskontrolle)
- TortoiseGit – Windows Shell Interface to Git

## 1.4. Code Editoren

- Visual Studio Code
- Notepad++ (Windows)
- Emacs

## *1. Einleitung*

- Vim

## **1.5. Datenverarbeitung / Data Sciences**

### **1.5.1. Dateisystem / Journaled File System**

- Ordner / Directories
- Dateien / Files

### **1.5.2. Tabellenformate / Rectangular Data**

- Comma-Separated-Values (CSV), Tab-Separated-Values (TSV)
- [wireservice/csvkit](#): A suite of utilities for converting to and working with CSV, the king of tabular file formats.
- [johnkerl/miller](#): Miller is like awk, sed, cut, join, and sort for name-indexed data such as CSV, TSV, and tabular JSON
- Spreadsheet (.xlsx, .ods)
- [apache/iceberg](#): Apache Iceberg
- [apache/iceberg-python](#): Apache Pylceberg

### **1.5.3. Serialisation**

- [Data Serialization — The Hitchhiker's Guide to Python](#)
- [JSON](#)
- [MessagePack](#): It's like JSON. but fast and small.

### **1.5.4. Spezielle Formate / Data Frames**

- [Mastering Python Dictionaries: Efficient Data Storage and Retrieval - Adventures in Machine Learning](#)
- [MAT-File Versions - MATLAB & Simulink - MathWorks Deutschland](#)
- [HDF5 Or How I Learned To Love Data Compression And Partial I/O](#)
- [Was ist Apache Parquet?](#)
- [Feather File Format](#)
- [pola-rs/polars](#): Dataframes powered by a multithreaded, vectorized query engine
- [ibis-project/ibis](#): Portable Python dataframe library

### **1.5.5. Embedded DB-Engines**

- [SQL](#), z.B. [SQLite](#)
- [OLAP](#), z.B. [DuckDB](#)

## 1.6. Schreibst Du noch oder TeXst Du schon?

- MikTeX (Windows, MacOS, Linux)
- MacTeX (MacOS)
- TeXLive (Linux)

## 1.7. LaTeX Editoren

- IDE's
  - [TeXStudio](#)
  - [TeXMaker](#)
  - [TeXWorks](#)
- Kollaborative Frameworks
  - [ShareLaTeX, Online LaTeX](#)
  - [CoCalc - Online LaTeX](#)

## 1.8. Literaturverwaltung und LaTeX

- Citavi im Detail > Titel exportieren > Export nach BibTeX
- RefWorks - Library Guide Univ. Melbourne
- Benutzerdefinierte BibTex-Keys mit Zotero | nerdpause
- JabRef - Library Guide Univ. Melbourne
- EndNote - Library Guide Univ. Melbourne

*1. Einleitung*

## **1.9. Schöne neue Welt**

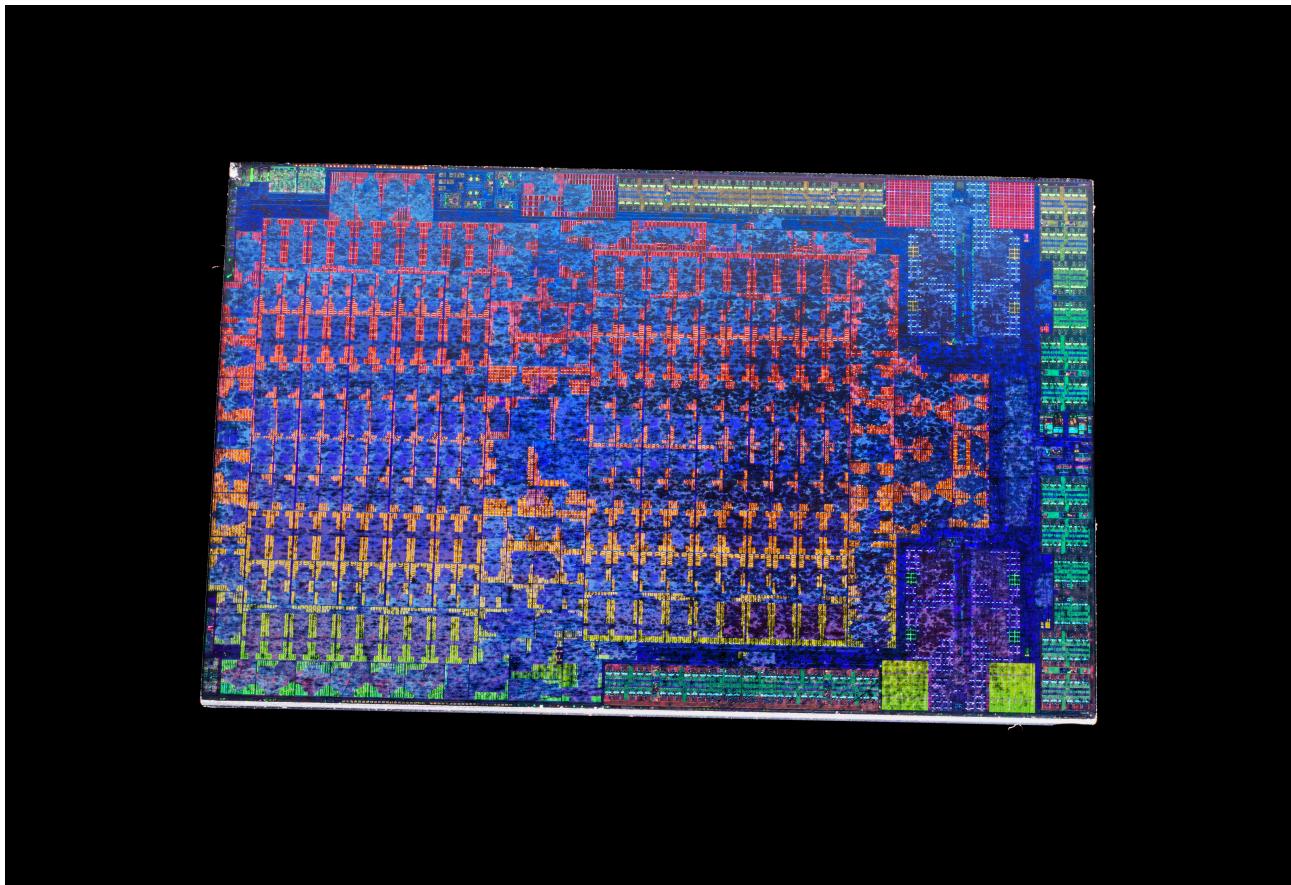


Abbildung 1.1.: AMD Jaguar APU (CPU/GPU), 16 nm, 325 qmm, 2016

## **1.10. Halbleiterherstellung (Infineon, Dresden)**

[https://www.youtube.com/embed/\\_Kj58yQ67KI](https://www.youtube.com/embed/_Kj58yQ67KI)

## **1.11. FinFET (Intel)**

[https://www.youtube.com/embed/\\_VMYPLXnd7E](https://www.youtube.com/embed/_VMYPLXnd7E)

## **1.12. TSMC Fab (Next Gen 7/5 nm)**

<https://www.youtube.com/embed/Hb1WDxSoSec>

### 1.13. Es war einmal ...



Abbildung 1.2.: 1906 die Elektronenröhre

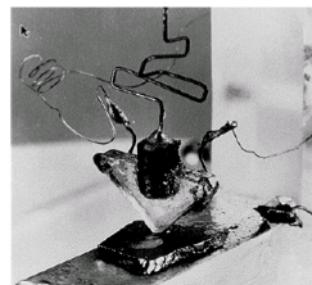


Abbildung 1.3.: 1947 der erste Transistor, Bell Labs Foto

### 1.14. Damals und heute

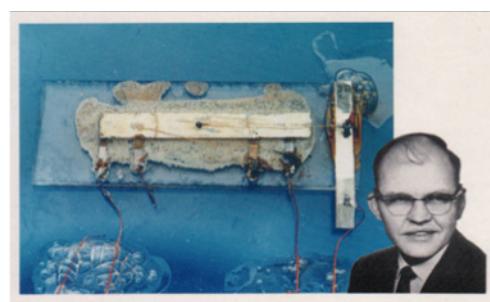


Abbildung 1.4.: 1958 Jack Kilby's erster IC

## *1. Einleitung*

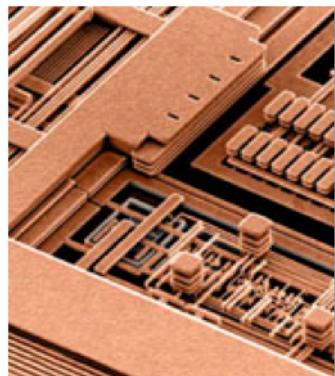


Abbildung 1.5.: Moderner IC

## 1.15. Systemhierarchie

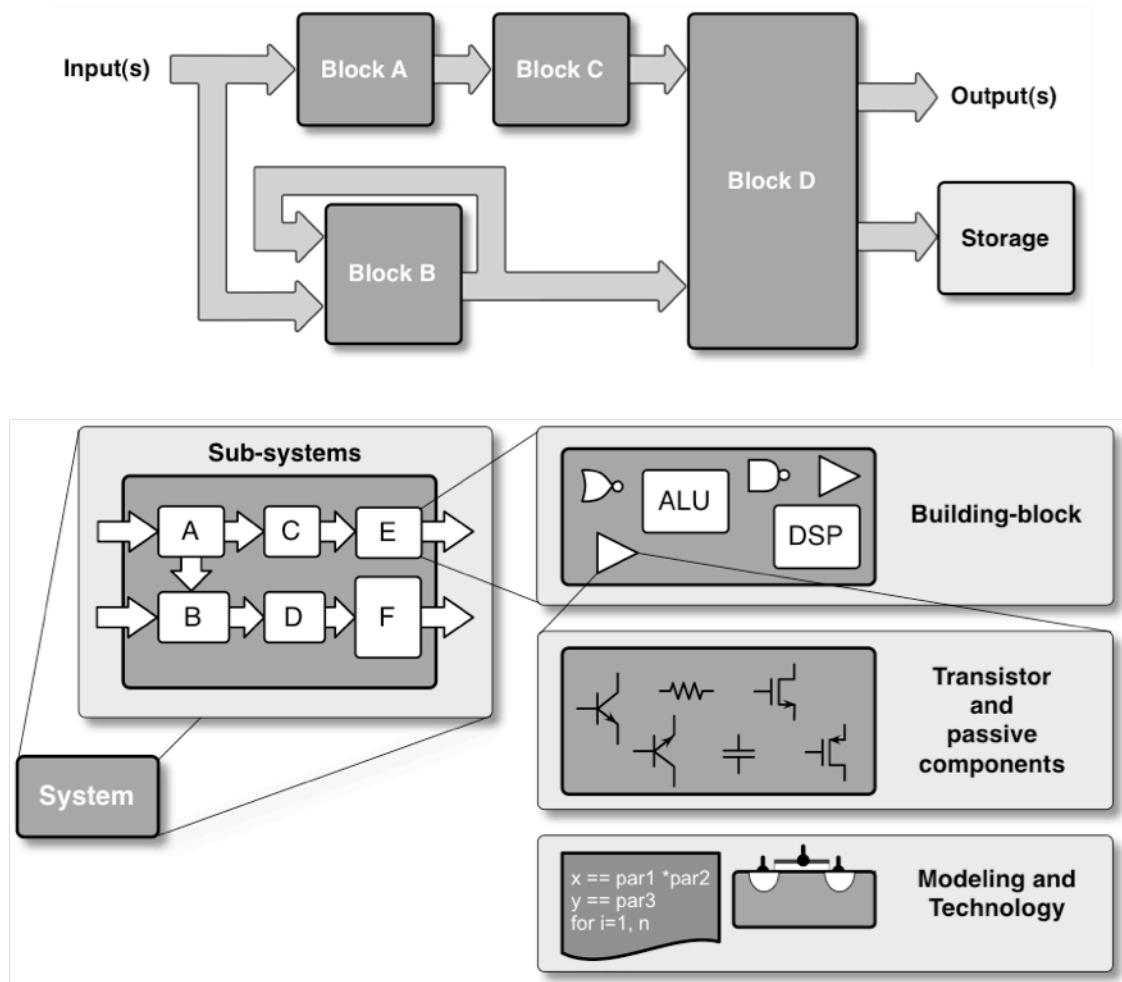
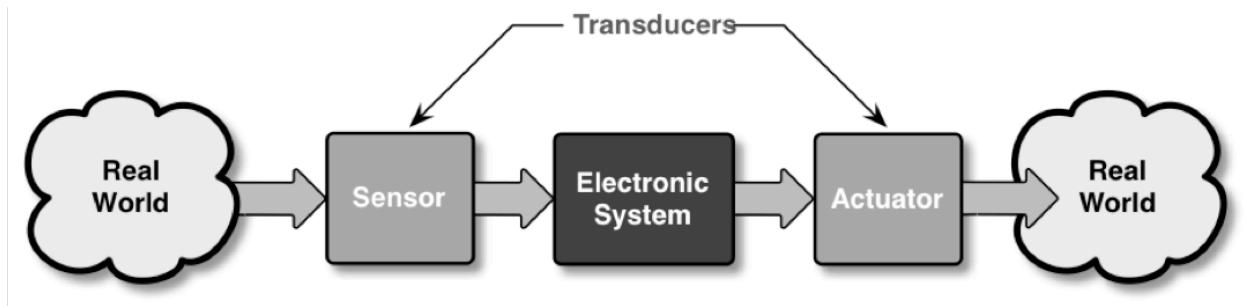


Abbildung 1.6.: Funktionsblöcke eines elektronischen Systems

- Nutzen Sie Hierarchien zur Beschreibung komplexer Systeme
- Teile und herrsche

## 1. Einleitung

### 1.16. Schnittstellen zur Aussenwelt



Entire system involving signals of real world.

Abbildung 1.7.: Interfacing

### 1.17. Meeting mit einem System

Block diagram of a wireless communication system

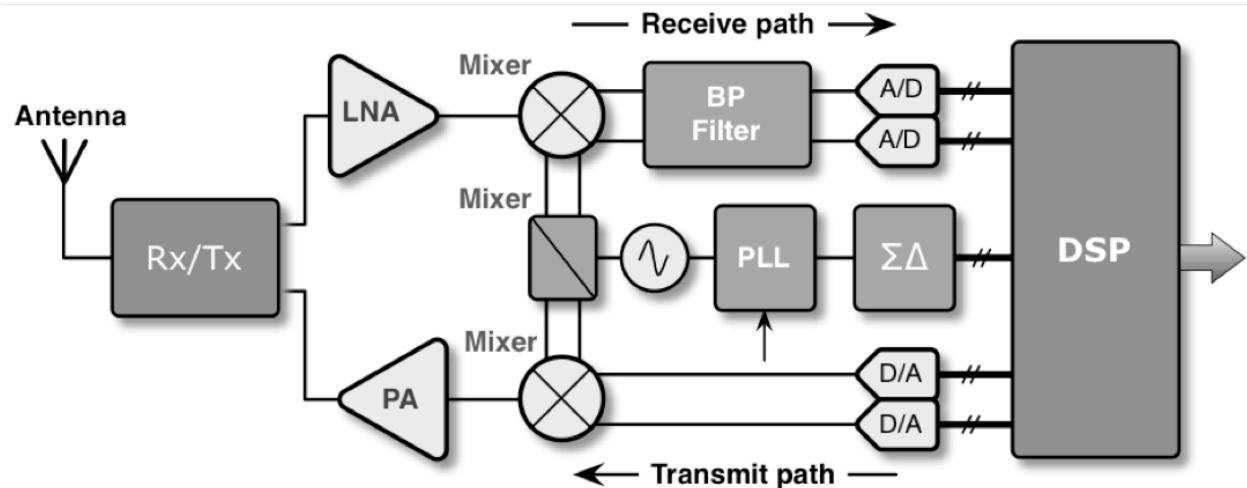
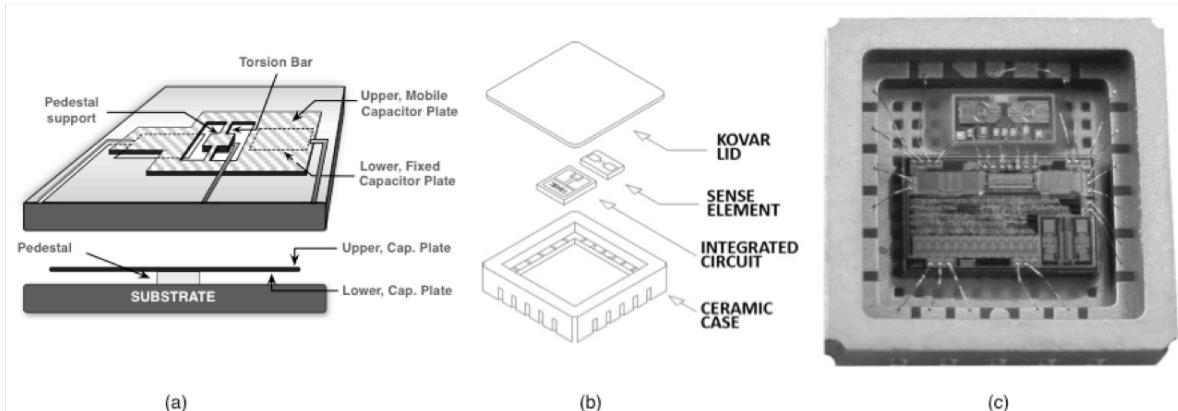


Abbildung 1.8.: Drahtloses Kommunikationssystem

## 1.18. System in a Package (SiP)



- (a) Micro structure of an accelerometer.
- (b) Assembling diagram of the system-on- package.
- (c) Microphotograph. (*Courtesy of Silicon Designs, Inc.*).

Abbildung 1.9.: Beschleunigungssensor

## 1.19. Sie werden unsere Experten

- Hintergrundwissen
  - Systemverständnis, Architektur, Herstellungsverfahren, Implementation
- Unterbewusste Kompetenz
  - Abgespeicherte Erfahrungen aus Erfolgsgeschichten und Misserfolgen
- Spezialwissen
  - Berufsspezifisches Wissen
- Teamwork Haltung
  - Kommunikationsfähigkeit, Berichtswesen und technische Präsentation
- Kreativität
- Tool-Kenntnisse

## 1. Einleitung

### 1.20. Lernziele des Moduls

- Elektrische Systeme mathematisch und graphisch im Zeit- und Frequenzbereich beschreiben
- Netzwerkanalyse mit RLC-Gliedern
- Spezielle Netzwerke, wie Messbrücken, Schwingkreise und ideale Transformatoren, dimensionieren.

### 1.21. Seminaristischer Unterricht

- Komplexe Wechselstromrechnung
- Diskrete Bauelemente und ihre Modellierung (RLC)
- Methodik der Netzwerkanalyse
- Anwendungsbeispiele mit EDA-Werkzeugen und wissenschaftliches Rechnen (Scientific Computing)

### 1.22. Beschreibung elektrotechnischer Systeme

- verschiedene Stufen der Vereinfachung
- Felder / Wellen / Optik / HF-Technik
  - Maxwell-Gleichungen

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = \iint \mathbf{J} + \dot{D} d\mathbf{A} \quad (1.1)$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \iint \dot{B} d\mathbf{A} \quad (1.2)$$

- bei lokaler Konzentration der Feldenergie  $\Rightarrow$  quasi-statische Näherung
- Mikrowellentechnik / Leitungstechnik
  - verteilte Schaltungen  $l, c, \rho$
  - Kopplung, Laufzeit  $\tau = a/v$
- *kleine* Systeme mit  $a \ll \lambda$  bzw. *kurze* Laufzeiten mit  $\tau \ll T$
- Regelungstechnik / Impulstechnik
  - Ersatzschaltungen
  - (Block-)Schaltbilder
- eingeschwungener Zustand

- NF-Technik
  - stationär-periodische Signale
- Sinussignale
- Energietechnik
  - monofrequente Signale  $U = Z \cdot I$
- Frequenz  $f \rightarrow 0$
- Gleichstromtechnik
  - Ohmsches Gesetz  $U = R \cdot I$

## 1.23. Konzentrierte Schaltelemente

### **i** Stromdichte

$$\frac{\int E(r, t) ds}{\iint J(r, t) dA} = \frac{u(t)}{i(t)} \Rightarrow R$$

### **i** Verschiebungsdichte

$$\frac{\iint D(r, t) dA}{\int E(r, t) ds} = \frac{q(t)}{u(t)} \Rightarrow C$$

### **i** Flußdichte

$$\frac{\iint B(r, t) dA}{\oint H(r, t) ds} = \frac{u(t)}{i(t)} \Rightarrow L$$

## 1.24. Harmonische Signale ...

### **i** als Zeitfunktion

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \phi)$$

## 1. Einleitung

**i** als Zeiger / komplexe Grösse (Phasor)

$$U = |\hat{U}|e^{j\phi}$$

## 2. Netzwerkerregung

### 2.1. Schaltzeichen

“In Deutschland sind elektrische Schaltzeichen durch DIN EN 60617 Graphische Symbole für Schaltpläne bzw. IEC 60617 genormt. Sie ersetzen seit 1996–1998 die DIN 40700 / DIN 40900.”

[Schaltzeichen nach DIN EN 60617](#)

### 2.2. Erregungsarten

- Gleichvorgänge
- Nichtperiodische Vorgänge
- Periodische Vorgänge, Spezialfall sind harmonische (sinus-, cosinusförmige) Vorgänge mit der Periodendauer  $T$
- Gleichgrößen mit  $f(t) = \text{const.}$  werden mit großen lateinischen Buchstaben gekennzeichnet, Gleichspannung  $U$  und Gleichstrom  $I$
- Zeitveränderliche Größen, hierbei ändert die Erregergröße  $f(t)$  ihre Amplitude und/oder ihre Richtung zeitlich. Der Wert von  $f(t)$  zum momentanen Zeitpunkt heißt Augenblicks- oder Momentanwert  $f(t)$  der physikalischen Größe. Momentanwerte erhalten kleine lateinische Buchstaben, Spannung  $u$  und Strom  $i$ .

### 2.3. Sinusförmige Erregung, periodische Vorgänge

#### **i** Definitionen

- $f(t) = f(t + nT)$  mit  $n = 0, 1, \dots$
- Frequenz  $f = 1/T$
- Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
- Periodendauer  $T$
- Wechselgröße allgem.  $a(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{A} \sin(\omega t + \omega t_0)$

## 2. Netzwerkerregung

- Scheitelwert, Maximalwert der Amplitude  $\hat{A} = \max A = A_{max}$
- Nullphasenwinkel bzw. Nullzeitpunkt  $\varphi = \omega t_0$
- Erregergröße wird aufgetragen mit  $\omega t$  und nicht  $t$ ;  $\psi(t) = \omega t + \varphi = \omega t + \omega t_0$
- Bogenmaß  $\psi$ /Bogenmaß  $= \frac{2\pi}{360} \psi$ /Grad

## 2.4. Eigenschaften harmonischer Funktionen

- Differentiation, Integration und Addition, Subtraktion mithilfe von Additionstheoremen
- Aufspaltung einer harmonischen Schwingung und Koeffizientenvergleich

### i Zusammengefasst

Bei Addition, Differentiation und Integration von harmonischen Funktionen der Kreisfrequenz  $\omega$  entstehen wieder harmonische Funktionen der gleichen Frequenz, aber veränderter Amplitude und Phase. Bei der Überlagerung zweier harmonischer Größen mit verschiedener Frequenz entsteht zwar eine periodische Schwingung, aber keine Sinusschwingung (harmonische).

## 2.5. Mittelwerte periodischer Zeitfunktionen

### i Arithmetischer Mittelwert - linearer Mittelwert - Gleichwert

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

### i Gleichrichtmittelwert

$$\overline{|u(t)|} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |u(\tau)| d\tau \quad (2.2)$$

**i** Quadratischer Mittelwert - Effektivwert

$$U_{eff} = \sqrt{u^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau} \quad (2.3)$$

## 2.6. $u/i$ -Verhalten

**i** Widerstand  $R$  - Einheit:  $1 \Omega$

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (2.4)$$

$$= R \cdot \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (2.5)$$

$$= \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (2.6)$$

**i** Induktivität  $L$  - Einheit:  $1 \text{ H} = 1 \text{ Vs/A}$

$$u(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \quad (2.7)$$

$$= \omega L \cdot \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (2.8)$$

$$= \omega L \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) \quad (2.9)$$

**i** Kapazität  $C$  - Einheit:  $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ As/V}$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad (2.10)$$

$$= \omega C \cdot \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (2.11)$$

$$= \omega C \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) \quad (2.12)$$



# 3. Komplexe Wechselstromrechnung

## 3.1. Beschreibung und Analyse im Frequenzbereich

### i Problemstellung

Bei zukünftigen Schaltungen ist es nicht mehr möglich, direkt mit den Zeitfunktionen für Spannungen und Ströme zu arbeiten.

Die von den Gleichstromnetzen bekannten Lösungsverfahren aus dem ersten Semester, die von linearen algebraischen Gleichungssystemen ausgehen (Maschen-, Knoten- und andere Verfahren) können nicht übernommen werden.

### i Symbolische Verfahren/Methoden

- komplexe Darstellung (analytisches Verfahren)
- Zeigerdarstellung (graphisches Verfahren)
- Wechselstromanalyse
- Betrachtungen beruhen auf der Verwendung sinusförmiger Eingangsgrößen
- Zeitbereich ist physikalische Realität mit gew. und partiellen Differentialgleichung (ODE, PDE)
- Frequenzbereich hat mathematisch-formale Bedeutung

## 3.2. Symbolisches Verfahren

- Man ordnet nach einer gewissen Regel jeder Sinusgröße eine symbolische Größe zu (z.B. einen Vektor oder eine komplexe Zahl);
- Man schreibt die Differentialgleichungen des Netzwerkes mit den symbolischen Größen;
- Statt die Differentialgleichungen zu lösen, löst man die Gleichungen für die Symbole und bestimmt die unbekannten Größen.
- Man transformiert die gefundenen Symbolgrößen zurück in die gesuchten Sinusgrößen.
- entn. (Marinescu und Marinescu 2016)

### 3.3. Vorteile des Frequenzbereichs

- zeitl. Differentiation und Integration geht über in Multiplikation und Division mit dem Differentialoperator  $s = \sigma + j\omega$  (komplexe Frequenz); häufig genügt es sich auf die imaginäre Frequenz  $s = j\omega$  zu beschränken.
- u-i-Zusammenhänge des Zeitbereichs  $\rightarrow$  ohmsche Form im Frequenzbereich durch komplexen Widerstands-/Leitwertbegriff
- ODE's gehen über in algebraische Gleichungen
- gleichwertige Darstellung harmonischer Funktionen durch komplexe Größen  $\rightarrow$  Zeiger

### 3.4. Funktionaltransformation

#### i Euler'sche Formel

$$\sigma + j\omega = ae^{j\varphi} = a(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$$

$$a = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

#### i Exponentiendarstellung

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}(e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{j2}(e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

**i Transformation**

$$f(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \varphi_a) \quad (3.3)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\hat{A} e^{j\varphi_a}}_{\text{Phasor}} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \underbrace{\hat{A} e^{-j\varphi_a}}_{\text{Phasor}} e^{-j\omega t} \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{A} e^{j\omega t} + \frac{1}{2} \hat{A}^* e^{-j\omega t} \quad (3.5)$$

$$= \Re \left\{ \hat{A} e^{j\omega t} \right\} \quad (3.6)$$

$$= \Re \left\{ \hat{A} e^{j\varphi_a} e^{j\omega t} \right\} \quad (3.7)$$

$$= \Re \left\{ \hat{A} (\cos(\omega t + \varphi_a) + j \sin(\omega t + \varphi_a)) \right\} \quad (3.8)$$

**3.4.1. Definitionen****i rotierender Zeiger, komplexer Momentanwert**

$$\underline{f}(t) = \hat{A} e^{j\omega t} = \hat{A} e^{j\varphi_a} e^{j\omega t}$$

**i ruhender Zeiger, komplexer Scheitelwert, Phasor**

$$\underline{f}(0) = \hat{A} = \hat{A} e^{j\varphi_a}$$

**i komplexer Effektivwert**

$$\underline{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{A} e^{j\varphi_a}$$

**3.5. Zeigerdarstellung****3.5.1. Grundschaltelemente**

- Sinusgröße  $i(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$
- da alle in einer Schaltung vorkommenen Sinusgrößen (meist) dieselbe Kreisfrequenz  $\omega$  aufweisen, kann man diese außer Acht lassen und die Zeiger als stehend betrachten;

### 3. Komplexe Wechselstromrechnung

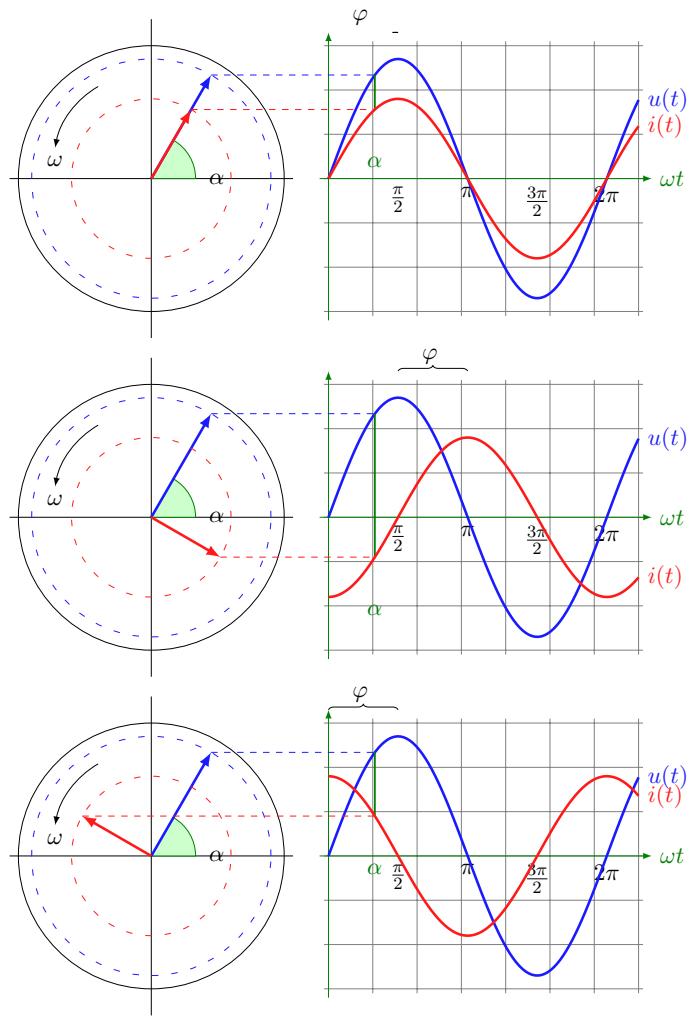


Abbildung 3.1.: Phasor-Diagramm

- Der Faktor 2 in den Scheitelwerten aller Sinusgrößen wird nicht berücksichtigt und man arbeitet mit Effektivwerten, [...], vor allem zur Bestimmung von Leistungen. Man reduziert also die Zeigerlängen im Maßstab  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### 3.5.2. Komplexe Zahlen

- Eingabe als Literal

```
z = 3 + 2j
```

- Eingabe als Funktion

```
z = complex(3, 2)
```

- Für mathematische Operationen benötigt man eine Bibliothek:

```
import cmath, math, numpy
```

```
z = 4 + 4j
```

### 3.5.3. Berechnung von Betrag und Phase

```
z_abs = abs(z)
z_ph = cmath.phase(z)
print('Betrag =', z_abs)
print('Phase in rad =', z_ph)
print('Phase in Grad =', numpy.degrees(z_ph))
```

### 3.5.4. Darstellung in der komplexen Ebene

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(z.real, z.imag, 'x')
```

*3. Komplexe Wechselstromrechnung*

**3.5.5. Kartesische Form**

**3.5.6. Polare Form**

**3.5.7. Kartesisch <-> Polar**

**3.5.8. Euler's Formel**

**3.5.9. Euler's inverse Formel**

**3.5.10. Algebraische Regeln**

## 4. Impedanz, Admittanz und Leistung

### 4.1. Widerstandsoperator

#### u/i-Verhalten

$$\frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{U}e^{j\omega t}}{\hat{I}e^{j\omega t}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \underline{Z}$$

#### Impedanz

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\hat{U}e^{j\omega t}}{\hat{I}e^{j\omega t}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} e^{\varphi_u - \varphi_i} \quad (4.1)$$

$$= Z e^{j\varphi_z} = Z (\cos(\varphi_z) + j \sin(\varphi_z)) \quad (4.2)$$

$$= \operatorname{Re} \underline{Z} + j \operatorname{Im} \underline{Z} \quad (4.3)$$

$$= R + jX \quad (4.4)$$

#### Eigenschaften

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{Scheinwiderstand} \quad (4.5)$$

$$R = \operatorname{Re} \underline{Z} \quad \text{Wirkwiderstand (Resistanz)} \quad (4.6)$$

$$X = \operatorname{Im} \underline{Z} \quad \text{Blindwiderstand (Reaktanz)} \quad (4.7)$$

$$\tan(\varphi_z) = \frac{\operatorname{Im} \underline{Z}}{\operatorname{Re} \underline{Z}} = \frac{X_r}{R_r} \quad (4.8)$$

$$\varphi_z = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \left( \frac{X_r}{R_r} \right) \quad (4.9)$$

## 4. Impedanz, Admittanz und Leistung

**4.2. Leitwertoperator****i Eigenschaften**

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \text{Scheinleitwert} \quad (4.16)$$

$$G = \operatorname{Re} \underline{Y} \quad \text{Wirkleitwert (Konduktanz)} \quad (4.17)$$

$$B = \operatorname{Im} \underline{Y} \quad \text{Blindleitwert (Suszeptanz)} \quad (4.18)$$

$$\tan(\varphi_y) = \frac{\operatorname{Im} \underline{Y}}{\operatorname{Re} \underline{Y}} = \frac{B}{G} \quad (4.19)$$

$$\varphi_y = \varphi_i - \varphi_u = \arctan\left(\frac{B}{G}\right) \quad (4.20)$$

## 4.3. Vergleich von RLC-Netzwerken

Zeitbereich :  $u = iR \quad u = \frac{1}{C} \int i dt \quad u = L \frac{di}{dt}$  (4.21)

Frequenzbereich :  $\underline{u} = iR \quad \underline{u} = \frac{1}{j\omega C} i \quad \underline{u} = j\omega L \underline{i}$  (4.22)

Impedanz :  $\underline{Z} = R \quad \underline{Z} = jX_C = -\frac{j}{\omega C} \quad \underline{Z} = jX_L = j\omega L$  (4.23)

Phase :  $\varphi_Z = 0 \quad \varphi_Z = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_Z = \frac{\pi}{2}$  (4.24)

## 4.4. Leistung von Wechselsignalen

### i Harmonische Anregung

$$u(t) = \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (4.25)$$

$$= \frac{1}{2} (\underline{U} e^{j\omega t} + \underline{U}^* e^{-j\omega t}) \quad = \frac{1}{2} (\underline{I} e^{j\omega t} + \underline{I}^* e^{-j\omega t}) \quad (4.26)$$

$$= \operatorname{Re} \underline{U} e^{j\omega t} \quad = \operatorname{Re} \underline{I} e^{j\omega t} \quad (4.27)$$

### i Komplexe Leistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (4.28)$$

$$= \frac{1}{4} (\underline{U} e^{j\omega t} + \underline{U}^* e^{-j\omega t}) (\underline{I} e^{j\omega t} + \underline{I}^* e^{-j\omega t}) \quad (4.29)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} (\underline{U} \underline{I}^* + \underline{U}^* \underline{I})}_{\text{zeitunabh. Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{4} (\underline{U} \underline{I} e^{2j\omega t} + \underline{U}^* \underline{I}^* e^{-2j\omega t})}_{\text{zeitabh. Anteil}} \quad (4.30)$$

#### 4. Impedanz, Admittanz und Leistung

##### i Definitionen

$$\underline{P} = \frac{1}{4} (\hat{U} \hat{I}^* + \hat{U}^* \hat{I}), \quad \text{Momentanwert, konstanter Anteil bzw. linearer Mittelwert, Momentanleistung} \quad (4.31)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \hat{U} \hat{I}^* \quad (4.32)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \hat{U} \hat{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\varphi_u - \varphi_i) \quad (4.34)$$

##### i Eigenschaften

$$S = |\underline{P}| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{Scheinleistung} \quad (4.35)$$

$$P = \operatorname{Re} \underline{P} \quad \text{Wirkleistung} \quad (4.36)$$

$$Q = \operatorname{Im} \underline{P} \quad \text{Blindleistung} \quad (4.37)$$

# 5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen im Frequenzbereich

## 5.1. Bode-Diagramm

“Unter Bode-Diagramm (engl. Bode plot) versteht man eine Darstellung von zwei Funktionsgraphen: Ein Graph zeigt den Betrag (Amplitudenverstärkung), der andere das Argument (die Phasenverschiebung) einer komplexwertigen Funktion in Abhängigkeit von der Frequenz. Diese Art der Darstellung ist nach Hendrik Wade Bode benannt, welcher diese Diagramme bei seinen Arbeiten in den Bell Laboratories in den 1930er Jahren benutzte.” (Wikipedia 2021)

## 5.2. Übertragungsfaktor

Ist die Eingangsgröße  $x(t)$  eines linearen Netzwerks eine sinusförmige Wechselgröße der Kreisfrequenz  $\omega$ , in komplexer Schreibweise

$$x(t) = \operatorname{Re}(\hat{X}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{X}),$$

so gilt dies auch für die Ausgangsgröße

$$y(t) = \operatorname{Re}(\hat{Y}e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(\underline{Y}).$$

Das Verhältnis

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$$

der komplexen Zeiger  $\underline{Y}$  und  $\underline{X}$  wird als *Übertragungsfaktor* des Netzwerks bezeichnet.

Bezeichnet  $\underline{H}(j\omega)$  ein Spannungsverhältnis, so spricht man auch von einem Spannungsübertragungsfaktor; dieser wird durch den Index  $v$  bzw.  $u$  kenntlich gemacht. Der Betrag von  $\underline{H}_v(j\omega)$  bei der Frequenz  $f = \omega/2\pi$

$$A_v(f) = |\underline{H}_v(j2\pi f)|$$

wird als Spannungsverstärkung bezeichnet.

## 5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen im Frequenzbereich

Ein Stromübertragungsfaktor – kenntlich gemacht durch den Index  $i$  – bezeichnet entsprechend ein Verhältnis (komplexer) Stromamplituden, während ein Leistungsübertragungsfaktor (Index  $p$ ) ein Verhältnis zweier (komplexer) Leistungsamplituden bestimmt.

Die Phase  $\varphi$  des Übertragungsfaktors ist frequenzabhängig und errechnet sich aus Real- und Imaginärteil von  $\underline{H}$  gemäß

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{\text{Im}(\underline{H}(j\omega))}{\text{Re}(\underline{H}(j\omega))} \right).$$

Aus der Phasenverschiebung folgt die *Phasenlaufzeit*

$$t_{\varphi(\omega)} = \frac{\varphi(\omega)}{\omega};$$

diese bestimmt die *Verzögerung*, die ein unendlich ausgedehntes sinusförmiges Signal der Kreisfrequenz  $\omega$  beim Durchgang durch das lineare System erfährt. Die Einhüllende eines endlichen Wellenzugs wird dagegen um die *Gruppenlaufzeit*

$$t_g(\omega) = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

verzögert.

### 5.3. Angaben in dB

Der Wert von Spannungs-, Strom- und Leistungsverstärkungen wird häufig als sog. Verstärkungsmaß  $a$  in (dezi-Bel) dB angegeben. Bei Spannungs- und Stromverstärkungen wird hierzu der (Zehner-)Logarithmus von  $A(f)$  mit 20 dB multipliziert. Dies führt im Fall der *Spannungsverstärkung* auf

$$a_v(f) = 20 \text{ dB} \cdot \log(A_v(f))$$

bzw. im Fall der *Stromverstärkung*  $A_i(f) = |H_i(j2\pi f)|$  auf

$$a_i(f) = 20 \text{ dB} \cdot \log(A_i(f)).$$

Da  $\log(1) = 0$  gilt, liegt allgemein für  $a(f) > 0$  dB Verstärkung vor, für  $a(f) < 0$  dB Abschwächung.

Soll eine Leistungsverstärkung in dB ausgedrückt werden, so ist der Logarithmus der Leistungsverstärkung  $G_p(f) = P_2/P_1$  mit 10 dB zu multiplizieren.

$$a_p(f) = 10 \text{ dB} \cdot \log(G_p(f)).$$

Dabei bezeichnen  $P_1$  und  $P_2$  die Effektivwerte der vom System aufgenommenen bzw. abgegebenen Wirkleistung. Der Hintergrund für den gegenüber  $a_v$  und  $a_i$  halbierten "Vorfaktor" von 10 dB ist, daß die Leistung proportional zum Quadrat von Spannungs- bzw. Stromamplitude ist.

Die "Einheit" dB wird für relative Pegelangaben verwendet, d.h. für die Angabe von Verhältnissen. Daneben werden aber auch absolute Pegelangaben in dB vorgenommen, wobei eine feste Bezugsgröße vorgegeben wird. Erwähnt werden soll hier die gebräuchliche "Einheit" dBm, die für Leistungsangaben verwendet wird und den Effektivwert  $P$  der Leistung bezogen auf 1 mW angibt  $P$  in dBm =  $10 \log(P/1 \text{ mW})$ .

### 5.3.1. Bode-Diagramm einer RC-Schaltung (Hochpass)

Ermitteln Sie den Betrags- und Phasengang der einfachen RC-Schaltung mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung (KWR). Nutzen Sie Python und SPICE zur Darstellung des Bode-Diagramms.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Spezifikation der Impedanz/Admittanz
R = 2e3
C = 156e-9

# Frequenzvektor
f = np.logspace(0, 5, 100)
w = 2*np.pi*f

# Bestimmung der Impedanzen
Z1 = R
Z2 = 1/(1j*w*C)

# Spannungsübertragungsfunktion
H_u = Z1 / (Z1 + Z2)

# Bode-Diagramm
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, 20*np.log10(np.abs(H_u)))
plt.ylabel(r'$\log |H_u|/\text{dB}$')
plt.grid()
plt.title('Bode-Diagramm einer RC-Schaltung')

plt.subplot(2, 1, 2)
plt.semilogx(f, np.angle(H_u))
plt.xlabel(r'Frequenz f/Hz')
plt.ylabel(r'$\arg(H_u)/\text{rad}$')
plt.grid()
```

## 5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen im Frequenzbereich

```
plt.show()
```

### 5.4. Nyquist-Diagramm

“Ein Nyquist-Diagramm, auch als Nyquist-Graph oder Nyquist-Plot bezeichnet, stellt die Ortskurve der Ausgangsgröße eines Regelkreises mit der Frequenz als Parameter dar. Es wird in der Regelungstechnik, Verstärkerkonstruktion und Signalaufbereitung verwendet, um die Stabilität eines Systems mit Rückkopplung zu beschreiben. Benannt ist es nach dem schwedisch-amerikanischen Physiker Harry Nyquist.” (Wikipedia 2023)

“Passive lineare Schaltungen mit R, L und C an sinusförmigen Signalen sind durch ihre Impedanz, dem Wechselstromwiderstand oder seinem Leitwert, der Admittanz charakterisierbar. Die Schaltungen bilden von der Frequenz abhängige Spannungsteiler, deren Spannungsverlauf im Amplitudenfrequenzgang grafisch darstellbar ist. Die Phasenlage des Ausgangssignals bezogen auf das Eingangssignal kann grafisch im Phasenfrequenzgang gezeigt werden. Beide Darstellungen bilden das komplette Bodediagramm.

Bei gegebenen Bauteilwerten kann für jede Frequenz die Impedanz Z berechnet und als Zeiger in ein Polarkoordinatensystem mit reeller und imaginärer Achse gezeichnet werden. Entsprechend den Achsenparametern gibt die Zeigerlänge dann die Impedanz, Admittanz, Ausgangsspannung oder den Ausgangsstrom an. Die Phasenlage ist durch den Winkel des Zeigers mit der reellen Achse bestimmt.

In der Elektronik beschreibt die Systemtheorie unter anderem das Übertragungsverhalten von Signalen. Eine hilfreiche Voraussetzung ist das Rechnen mit komplexen Größen sowie deren Darstellungen im Polarkoordinatensystem oder der [Einführung in die komplexe Gaußschen Zahlenebene]. Die oben genannten komplexen Größen sind von den Bauteilwerten abhängig. Die Impedanz Z einer dimensionierten RC- oder RL-Reihenschaltung ist frequenzabhängig. Die Ortskurve ist die Verbindung der errechneten Impedanzwerte in der komplexen Ebene durch einen Kurvenzug mit der Frequenz als Parameter. Die Zeigerlänge vom Nullpunkt zum Kurvenpunkt auf der Ortskurve entspricht dem skalaren Impedanzwert der aktuellen Frequenz. Der Phasenwinkel bezogen auf die Re-Achse zählt linksdrehend positiv und rechtsdrehend negativ. Die Lote vom Zeigerendpunkt auf die Koordinatenachsen ergeben für die jeweilige Frequenz als Achsenabschnitte die Wirk- und Blindkomponente des Systems.”

Entnommen aus Elektrophysik – Spezielle Grundlagen, [Ortskurve](#) (Mietke 2024)

#### Vergleich zum Zeigerdiagramm

- Zeigerdiagramm nur für konstante Parameter
- Im Zeigerdiagramm keine Aussagen über Auswirkungen von Änderungen der Frequenz oder Schaltelemente
- “Für jeden Wert der Zweipole  $R$ ,  $L$ , und  $C$  oder jede Frequenz müssten gesonderte Zeigerdiagramme erstellt werden.”
- “Man verzichtet auf die Darstellung der Zeiger und trägt in der komplexen Zahlenebene nur die Kurve auf.”

### 5.4.1. Ortskurve einer RC-Schaltung

Mit den Bauteilen  $R = 2 \text{ k}\Omega$  und  $C = 159 \text{ nF}$  kann eine Reihen- oder Parallelschaltung gebildet werden. Die komplexe Impedanz der Reihenschaltung ist von der Frequenz abhängig und grafisch in der komplexen Ebene als Ortskurve mit der Frequenz als Parameter dargestellt. Die Blindwiderstandswerte wurden für einen bestimmten Frequenzbereich errechnet und im Polarkoordinatensystem eingetragen. Alle Werte liegen im 4. Quadranten auf einer Geraden. Da der ohmsche Widerstand ist von der Frequenz unabhängig ist, verläuft sie parallel zur imaginären Achse im Abstand von  $2 \text{ k}\Omega$ . Auf die reelle (Re) Achse bezogen ist der Phasenwinkel der Impedanz negativ. Das Diagramm ist mit den angegebenen gerundeten Rechenwerten des Blindwiderstands, der Impedanz und des Phasenwinkels erstellt.

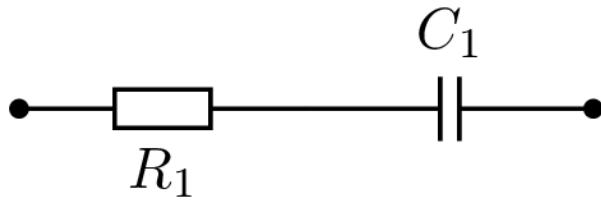


Abbildung 5.1.: RC-Schaltung für eine Ortskurve

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Spezifikation der Impedanz/Admittanz
R = 2e3
C = 156e-9

f = np.linspace(0.2e3, 5e3, 5)
w = 2*np.pi*f

Z = R + 1/(1j*w*C)

# Ortskurve der Impedanz
plt.plot(Z.real, Z.imag, '-x')
plt.grid()
plt.xlabel(r'Re{Z}')
plt.ylabel(r'Im{Z}')

plt.show()

```

“Die Ortskurve kann auch für die Parallelschaltung von R und C mit der Frequenz als Parameter gezeichnet werden. Im Polardiagramm wird sie durch die Zeiger aller Gesamtleitwerte oder Admittanzen gebildet und

## 5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen im Frequenzbereich

verläuft im 1. Quadranten parallel zur imaginären Achse. Die Achsenbezeichnungen der Leitwerte werden in Siemens (S) angeben. Die Phasenwinkel sind auf die reelle (Re) Achse bezogen positiv." (Mietke 2024)

### 5.4.2. Inversion von Ortskurven

"Bei der Konstruktion einer Ortskurve ist es oft notwendig von der Widerstandsform  $\underline{Z}(\omega)$  auf die Leitwertsform  $\underline{Y}(\omega)$  überzugehen und umgekehrt. Beide Funktionen gehen jeweils aus der Kehrwertbildung der anderen hervor, man nennt sie zueinander inverse Funktionen und die Kehrwertbildung selbst Inversion." Kap. 5, (Büttner 2014)

Die Inversion der Ortskurve hat als Ergebnis die zur Ausgangsschaltung äquivalente Schaltung. Diese Umrechnung ist immer dann notwendig, wenn es sich um gemischte Reihen- und Parallelschaltungen wie bei T- und II-Filtern, belasteten Filtern und Schwingkreisen handelt.

Die Ortskurven einfacher RC- und RL-Schaltungen verhalten sich wie folgt:

- Verläuft die Ortskurve der Impedanz oder Admittanz im 1. Quadranten, so befindet sich die dazu invertierte Ortskurve im 4. Quadranten.
- Die Ortskurve der Impedanz einer Reihenschaltung ist eine Parallele zur imaginären Achse im Abstand des ohmschen Widerstandswerts. Die invertierte Ortskurve der Admittanz ist ein im Nullpunkt endender Halbkreis mit dem Durchmesser des reellen Leitwerts.
- Die Ortskurve der Admittanz einer Parallelschaltung ist eine Parallele zur imaginären Achse im Abstand des reellen Leitwerts. Die invertierte Ortskurve der Impedanz ist ein im Nullpunkt endender Halbkreis mit dem Durchmesser des ohmschen Widerstandswerts.
- Inversion eines Punktes (Widerstandsform/Impedanz):  $\underline{Z}(5 + 5j)\Omega$
- Maßstäbe  $M_Z = 2\Omega/cm$  und  $M_Y = 0.1S/cm$
- Leitwertform/Admittanz:  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{(5 + 5j)\Omega} = \frac{(5 - 5j)S}{50} = (0.1 - 0.1j)S$$

- Inversion von Ortskurven durch Inversion einzelner Punkte:

1. In die komplexe Zahlenebene wird der Zeiger  $Z$  eingetragen, dessen Spitze invertiert werden soll.
2. Um den Ursprung des Koordinatensystems wird ein Inversionskreis mit beliebigem Radius  $r$  geschlagen.
3. Von der Spitze des Zeigers  $Z$  aus werden Tangenten an den Kreis gelegt, sie ergeben die Berührungs punkte  $T_1$  und  $T_2$ . Die Tangentenpunkte kann man auch finden, wenn man um die Mitte des Zeigers einen Kreis mit dem Radius  $Z/2$ , d.h. einen Thaleskreis, schlägt (siehe [Höhensatz](#)).
4. Die beiden Punkte  $T_1$  und  $T_2$  werden miteinander verbunden.
5. Wo die Verbindungslinie den Zeiger  $Z$  schneidet, liegt die Spitze des konjugiert komplexen Zeigers  $Y^*$ .

6. Spiegelt man den Zeiger  $Y^*$  an der reellen Achse, so erhält man  $Y$ . Die Spitze dieses Zeigers entspricht also der invertierten Spitze von  $Z$ .
7. Bezeichnet man die Maßstäbe für den komplexen Scheinwiderstand mit  $M_Z$  und den Scheinleitwert mit  $M_Y$  sowie die Länge des Zeigers  $Z$  mit  $L_Z$  und die der Zeiger  $Y$  bzw.  $Y^*$  mit  $L_Y^*$  bzw.  $L_Y$ , so ist – da das Dreieck OT1P rechtwinklig ist – nach dem [Kathetensatz](#)

## 5.5. RC-Filter

### 5.5.1. RC-Tiefpaß

### 5.5.2. RC-Hochpaß

### 5.5.3. RC-Bandpaß

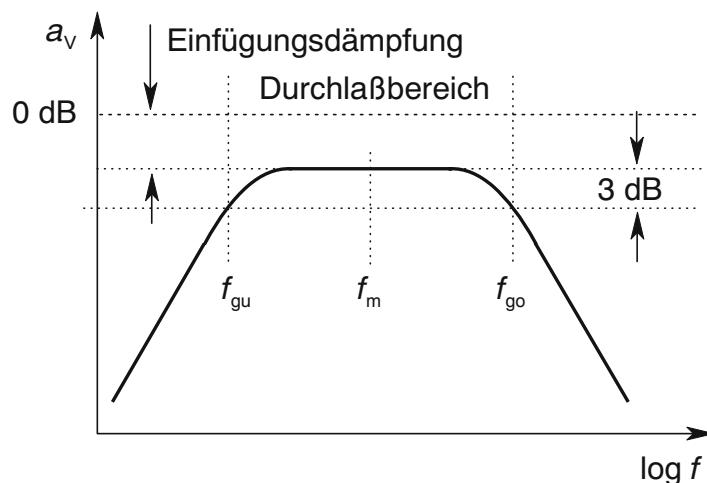


Abbildung 5.2.: Bode-Diagramm eines Bandpasses

“Besitzt ein Netzwerk sowohl bei hohen als auch bei tiefen Frequenzen einen Sperrbereich und bei mittleren Frequenzen einen Durchlaßbereich, so liegt ein Bandpaß vor. Der prinzipielle Verlauf der Spannungsverstärkung  $a_v$  ist im Bode-Diagramm {numref}fig:1ec5bp skizziert. Die Grenzen des Durchlaßbereichs werden nach unten durch die untere Grenzfrequenz  $f_{gu}$  und nach oben durch die obere Grenzfrequenz  $f_{go}$  bestimmt. Die Differenz  $B = f_{go} - f_{gu}$  heißt Bandbreite (engl. bandwidth) des Bandpasses; das geometrische Mittel

$$f_m = \sqrt{f_{gu} f_{go}}$$

der beiden Grenzfrequenzen wird als Bandmittelfrequenz bezeichnet. Bei logarithmisch unterteilter Frequenzskala liegt  $f_m$  genau in der Mitte zwischen  $f_{gu}$  und  $f_{go}$ . Ein Bandpaß heißt schmalbandig, falls  $B \ll f_m$  gilt;

## 5. Grafische Analysemethoden / Darstellungen im Frequenzbereich

als Maß gilt die relative Bandbreite  $B/f_m$ . Die Abschwächung des Signals bei der Bandmittenfrequenz wird als Einfügungsdämpfung bezeichnet." (Reisch 2007)

"Die als **Wien-Glied** bezeichnete Schaltung ist ein spezieller RC-Bandpass. Im Wien-Robinson-Generator bestimmt dieses Filter die Ausgangsfrequenz. Er generiert Sinusfrequenzen mit sehr geringem Klirrfaktor. Im durchstimmbaren Sinusgenerator sind die beiden Widerstände durch gemeinsam einstellbare Potentiometer ersetzt. Diese Anordnung gibt es auch in Wechselstrom-Brückenschaltungen." {cite}mietke2024

## 5.6. Elementtransformation

Elements of lowpass filter	Corresponding elements of the denormalized		
	Highpass	Bandpass	Bandstop
$L_n$ 	$C = 1/(L_n \omega_c)$ 	$L = L_n/B$ 	$L = L_n B / \omega_o^2$ 
$C_n$ 	$L = 1/(C_n \omega_c)$ 	$L = B / (\omega_o^2 C_n)$ 	$L = 1 / (B C_n)$ 

Abbildung 5.3.: Tabelle der Elementtransformationen TP zu HP, zu BP und zu BS

Entn. aus (Deliyannis, Sun, und Fidler 1998)

## 5.7. Messbrücken

### 5.7.1. Wheatstone-Messbrücke – Gleichstrommessbrücke

Zwei mögliche Messverfahren:

1. Ausschlagverfahren Brückenspannung  $U_D$  wird mit hochohmigem Messinstrument gemessen.
2. Abgleich- oder Nullverfahren Brückenspannung  $U_D$  wird zu Null abgeglichen.

### 5.7.2. Wechselstrommessbrücke

- Abgleichbedingung

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \underline{Z}_3$$

- Zerlegung in Betrag und Phase

$$|\underline{Z}_1||\underline{Z}_4| = |\underline{Z}_2||\underline{Z}_3| \quad (5.1)$$

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \quad (5.2)$$

- Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$R_1 R_4 - X_1 X_4 = R_2 R_3 - X_2 X_3 \quad (5.3)$$

$$X_1 R_4 + R_1 X_4 = X_2 R_3 + R_2 X_3 \quad (5.4)$$

- zwei Bedingungen  $\Rightarrow$  zwei abgleichbare Elemente

### 5.7.3. Kapazitätsmessbrücke nach Wien – Wien-Brücke

#### 5.7.4. Wien-Robinson-Brücke – einfaches Frequenzmessgerät

(Wikipedia 2019) (Hewlett 1942)



# 6. Schwingkreise

## **i** Schwingungen (phys.)

“Schwingungen begleiten uns im Alltag wörtlich auf Schritt und Tritt: In jeder Uhr findet eine Schwingung statt, die zur Zeitmessung verwendet wird. Das fängt bei dem Pendel der altmodischen Pendeluhr an und endet nicht bei der modernen Quarzuhr, in der ein kleines Quarzplättchen mechanische Schwingungen vollführt. Der Prozessor Ihres Smartphones erhält seinen elektrischen Takt ebenfalls von einem solchen Schwingquarz. Wenn wir sprechen, schwingen die Stimmlippen in unserem Kehlkopf und verursachen so den primären Schall, der unsere Stimme formt. Mechanische Konstruktionen und Bauwerke können ebenfalls in Schwingungen geraten, wenn eine äußere Kraft auf sie einwirkt, was in vielen Fällen unerwünscht ist. Auch in elektronischen Systemen finden Schwingungen statt. Hier ändert sich nicht eine mechanische Auslenkung als Funktion der Zeit, sondern eine elektrische Spannung oder ein elektrischer Strom.

Sehr viele Phänomene, die bei schwingenden Systemen auftreten, kann man exemplarisch an einfachen mechanischen Systemen studieren. In den einführenden Physikbüchern wird sich dabei meist auf lineare Systeme beschränkt, die zu harmonischen Schwingungen führen. Eine Schwingung bezeichnet man als harmonisch, wenn sie sich durch eine reine Sinus- oder Kosinusfunktion beschreiben lässt. Die Auslenkung  $x(t)$  bei einer harmonischen Schwingung lässt sich durch

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

beschreiben. Dabei bezeichnet  $\hat{x}$  die Amplitude der Schwingung,  $\varphi$  ist der Phasenwinkel und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung, die mit der Frequenz  $f$  über den Faktor  $2\pi$  verknüpft ist.

Für die Beschränkung auf harmonische Schwingungen gibt es zwei Gründe: Zum einen lassen sich solche linearen Systeme gut analytisch behandeln, und zum anderen lassen sich viele nichtlineare Systeme für hinreichend kleine Auslenkungen gut durch entsprechende lineare Systeme annähern. Für die Behandlung von schwingungsfähigen Systemen mit dem Computer bieten sich zwei Aspekte besonders an: Wir können die Effekte der linearen Schwingungsphysik visualisieren und zum Teil auch hörbar machen, um damit ein intuitiveres Verständnis dieser Phänomene zu gewinnen. Darüber hinaus bieten uns die in diesem Buch bereits besprochenen Verfahren die Möglichkeit, auch nichtlineare Schwingungen zu untersuchen.” Entn. (Natt 2020)

## **i** Schwingkreise (elek.)

“Eine physikalische Anordnung ist schwingungsfähig, wenn sie mindestens zwei Energiespeicher unterschiedlichen physikalischen Charakters enthält, die miteinander Energie austauschen können. Eine solche Anordnung wird als Schwingkreis bezeichnet.

## 6. Schwingkreise

In elektrischen Schaltungen sind diese unterschiedlichen Typen von Energiespeichern Induktivitäten, die magnetische Feldenergie speichern und Kapazitäten zur Speicherung elektrischer Feldenergie.

Die in einer Kapazität gespeicherte Energie wird durch den Wert C der Kapazität und die Spannung u an der Kapazität bestimmt, die in einer Induktivität gespeicherte Energie durch den Wert L der Induktivität und den Strom i durch die Induktivität.

Zu unterscheiden ist zwischen freien und erzwungenen Schwingungen. Bei freien Schwingungen [...] wird einer physikalischen Anordnung einmalig Energie zugeführt und sie sich dann selbst überlassen. Durch unvermeidliche Verlustmechanismen, die dazu führen, dass im Schwingkreis pendelnde Energie in Wärme umgesetzt wird, klingt die Schwingung zeitlich ab. Bei erzwungenen Schwingungen [...] wird einer zunächst energielosen Anordnung periodisch von außen Energie zugeführt. Ein Teil dieser Energie wird zur Kompensation der mit der Schwingungsintensität ansteigenden Verluste benötigt, der Rest pendelt zwischen den Energiespeichern. Ändert sich die Art der periodischen Energiezufuhr nicht, so stellt sich nach einem Einschwingvorgang in der Anordnung eine stationäre Schwingung (eingeschwungener Zustand) ein.“ Entn. (Harriehausen und Schwarzenau 2020)

### 6.1. Zusammenfassung der physikalische Grundlagen

- periodische Zustandsänderung in einem physikalischen System
- periodischer Energieaustausch zw. zwei unterschiedlichen Energiespeichern (potentiellen und kinetischen), z.B. Feder und Masse, Induktivität und Kapazität
- maßgebende Zustandsgröße  $x(t)$ , z.B. Auslenkung, Spannung oder Ladung, folgen einer gewöhnlichen Differenzialgleichung (DGL)  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$
- harmonische Schwingung,  $x(t + T_0) = x(t)$ , wobei  $T_0$  Periode,  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \frac{1}{T_0}$  Eigenfrequenz und  $f_0$  Resonanzfrequenz
- DGL gehorcht dem Energieerhaltungssatz

$$W_{ges}(x) = W_{pot}(x) + W_{kin}(x) = const. \quad (6.1)$$

$$\frac{dW_{ges}}{dt} = \frac{dW_{pot}}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dW_{kin}}{dx} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (6.2)$$

$$x(t) = x_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (6.3)$$

- Zusammenschaltung von Induktivität  $L$  und Kapazität  $C$  heißt (idealer) Schwing- oder Resonanzkreis

$$W_{pot} := \text{Kondensator} \quad (6.4)$$

$$W_{kin} := \text{Induktivität} \quad (6.5)$$

- freie und erzwungene Schwingung
- ungedämpfte und gedämpfte Schwingung

## 6.2. RLC-Reihenschwingkreis (aktiver Zweipol)

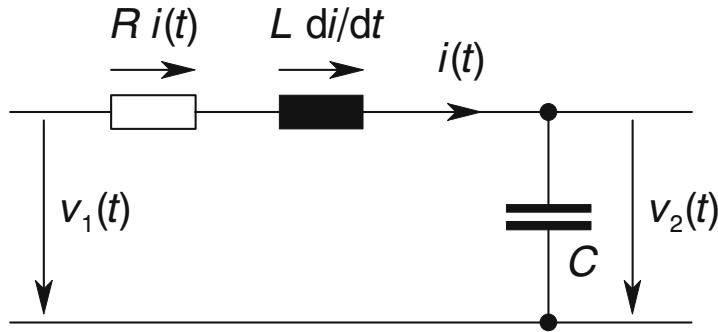


Abbildung 6.1.: RLC-Reihenschwingkreis

### **i** Maschengleichung (Zeitbereich)

$$u_1(0) = L \frac{di}{dt} + i R + \frac{1}{C} \int i dt \quad (6.6)$$

$$0 = \frac{di}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i \quad (6.7)$$

### **i** Lösung der Differentialgleichung

$$i(t) = \underbrace{I_0 e^{-d\omega_0 t}}_{Dmpfung} \underbrace{\sin(\sqrt{1-d^2}\omega_0 t)}_{harm.Schwingung}$$

### **i** Spannungsübertragungsfaktor

Entn. (Reisch 2007)

$$\underline{H}_u(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC + \omega^2 LC} \quad (6.8)$$

$$= \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (6.9)$$

- Eigenfrequenz / Resonanzfrequenz  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

## 6. Schwingkreise

- Abklingkonstante  $\delta = \frac{R}{\omega_0 L}$
- Dämpfung / Verlustfaktor  $d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{2\delta}{\omega_0}$
- Güte  $Q = \frac{|Q(\omega_0)|}{P(\omega_0)} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{\omega_0}{2\delta}$ 
  - $|Q(\omega_0)|$  ist der Betrag der Blindleistung
  - $P(\omega_0)$  ist die Wirkleistung
- Analyse mit LTspice und Python [GitHub](#) Installation mit Anaconda-Shell oder Windows-Shell (CMD/PowerShell)

```
$ pip install -U ltspice
```

```
import ltspice
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# %% Laden der RAW LTspice Daten in den Python-Workspace
file = "../files/spice/kap137_reisch.raw"
data = ltspice.Ltspice(file)
data.parse()

# %% Zuweisen der Simulationdaten an lokale Variablen
Hu = data.get_data("v(vo)")
freq = data.get_data("frequency")

# %% Daten werden als Numpy-Array geladen, Typ complex
Hu_dB = 20*np.log10(np.abs(Hu))
Hu_arg = 180 / np.pi * np.angle(Hu)
f = freq.real

# %% Erzeugen des Bode-Diagramms (Plot)
fig1 = plt.figure(1)
plt.subplot(2, 1, 1)
plt.semilogx(f, Hu_dB)
plt.grid()
plt.ylabel(r'$H_u(f)/dB$')
plt.subplot(2, 1, 2)
plt.grid()
plt.semilogx(f, Hu_arg)
plt.ylabel(r'$arg(H_u(f))/deg$')
plt.xlabel('Frequenz f/Hz')
plt.show()
```

### 6.3. Grundeigenschaften von Reihen- und Parallelschwingkreis (passiver Zweipol)

#### i Resonanzfrequenz

- Thomsonsche Formel  $\omega_0 = \frac{1}{L_r C_r} = \frac{1}{L_p C_p}$
- bei Resonanz erreichen Impedanz und Admittanz ein Minimum

$$\underline{Z}|_{\omega_0} \Rightarrow |\underline{Z}| = R_r \quad (6.10)$$

$$\underline{Y}|_{\omega_0} \Rightarrow |\underline{Y}| = G_p \quad (6.11)$$

	$X(\omega)$	$B(\omega)$
$\omega < \omega_0$	kapazitiv	induktiv
$\omega > \omega_0$	induktiv	kapazitiv

#### i Reihenkreis (Impedanz)

$$\underline{Z} = R_r + j \left( \omega L_r - \frac{1}{\omega C_r} \right) \quad (6.12)$$

$$= R_r + jX(\omega) \quad (6.13)$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R_r^2 + X^2(\omega)} \quad (6.14)$$

$$\arg \underline{Z} = \arctan \frac{X(\omega)}{R_r} Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.15)$$

#### i Parallelkreis (Admittanz)

$$\underline{Y} = G_p + j \left( \omega C_p - \frac{1}{\omega L_p} \right) \quad (6.16)$$

$$= G_r + jB(\omega) \quad (6.17)$$

$$|\underline{Y}| = \sqrt{G_p^2 + B^2(\omega)} \quad (6.18)$$

$$\arg \underline{Y} = \arctan \frac{B(\omega)}{G_p} Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (6.19)$$

## 6. Schwingkreise

### 6.4. Vereinheitlichte Kennzeichnung

**i** Verstimmung  $v$ , relative Frequenzabweichung

$$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad (6.20)$$

**i** Normierte Darstellung

$$\underline{Z} = R \left( 1 + j \frac{1}{R} \left( \frac{\omega \omega_0 \omega L}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 \omega C} \right) \right) \quad (6.21)$$

$$= R(1 + Qv) \quad (6.22)$$

$$\underline{Y} = G(1 + jQv) \quad (6.23)$$

**i** Betrag und Phase

$$\frac{|\underline{Z}|}{R} = \frac{|\underline{Y}|}{G} = \sqrt{1 + (Qv)} \quad (6.24)$$

$$\varphi_Z = \varphi_Y = \arctan(Qv) \quad (6.25)$$

**i**  $45^\circ$ -,  $\frac{\pi}{4}$ - oder 3dB-Frequenz

Der Phasenwinkel  $\varphi$  ist gleich  $45^\circ$  und Betrag der Blindkomponente ist gleich der Wirkkomponente.

$$|X(\omega_{\pm 45})| = \pm R \quad |B(\omega_{\pm 45})| = \pm G \quad (6.26)$$

$$\omega_{\pm 45} L - \frac{1}{\omega_{\pm 45} C} = \pm R \quad \omega_{\pm 45} C - \frac{1}{\omega_{\pm 45} L} = \pm G \quad (6.27)$$

$$\omega_{\pm 45} = \omega_0 \left( \sqrt{1 + \left( \frac{1}{2Q} \right)^2} \pm \frac{1}{2Q} \right) \approx \omega_0 \left( 1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \quad (6.28)$$

$$|\underline{Z}(\omega_{\pm 45})| = \sqrt{2}R \quad |\underline{Y}(\omega_{\pm 45})| = \sqrt{2}G \quad (6.29)$$

\$\$

## 6.5. Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise

**i** Bandbreite BW (bandwidth)

$$BW = \omega_{45} - \omega_{-45} = \frac{\omega_0}{Q} \quad (6.30)$$

$$= f_{45} - f_{-45} = \frac{f_0}{Q} \quad (6.31)$$

(6.32)

## 6.5. Gegenüberstellung der Eigenschaften der elementaren Schwingkreise

Entn. aus (Harriehausen und Schwarzenau 2020)

## 6. Schwingkreise

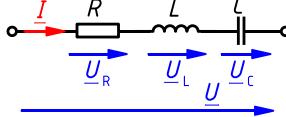
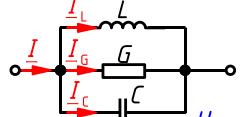
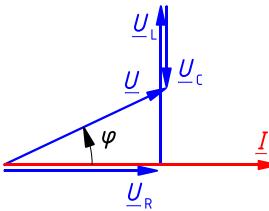
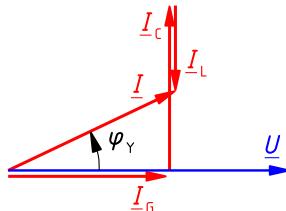
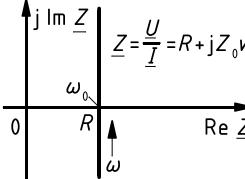
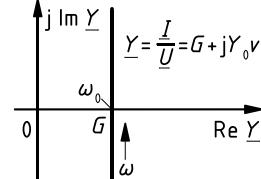
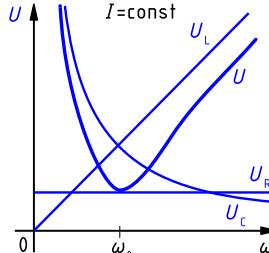
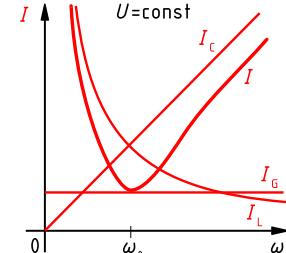
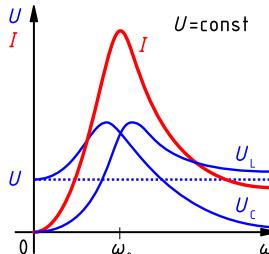
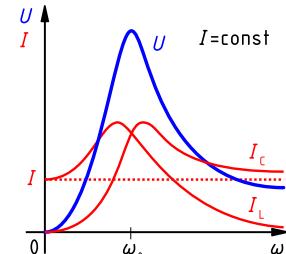
Zeile	Elementarer Reihenschwingkreis	Elementarer Parallelschwingkreis	
1 Ersatzschaltbild			
2 Klemmenverhalten	$\underline{U} = \underline{I}(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C})$	$\underline{I} = \underline{U}(G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L})$	
3 Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme			
4 Kenngrößen	$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$	$Y_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}$
5 Ortskurve von Impedanz bzw. Admittanz			
6 Amplitudengänge mit Resonanzminimum			
7 Amplitudengänge mit Resonanzmaxima			

Abbildung 6.2.: Eingenschaften von Schwingkreisen

# 7. Netzwerkanalyse

Entr. aus (Kasper 2000) (Paul und Paul 2019)

## 7.1. Systemsimulation

Ebene	Maß	Simulation
Atom	0.1 nm	
Festkörper/Atomverbund	1.0 nm	
Device	0.1 mm	Feld
Transistor/Subkomponenten	1.0 mm	
Gatter/Komponenten	10 mm	Verhaltensmodell

## 7.2. Makrotheorie

- Mittelwerte charakteristischer Größen des Systems
- Temperatur, Wärmekapazität, Leitfähigkeit etc.
- schwache oder homogene Ortsabhängigkeit
- partielle Differentialgleichungen (PDE's) der Feldtheorie gehen über in gewöhnliche Differentialgleichungen (ODE's)
- nur noch  $dt$  kein  $dx$  (nach dem Ort)

## 7.3. Netzwerksimulation

- Maschenwiderstandsmatrix
- Knotenleitwertmatrix
- mathematisch äquivalente Beschreibungen
- für praktische Berechnungen (Simulation) → Knotenanalyse

## 7.4. Netzwerk

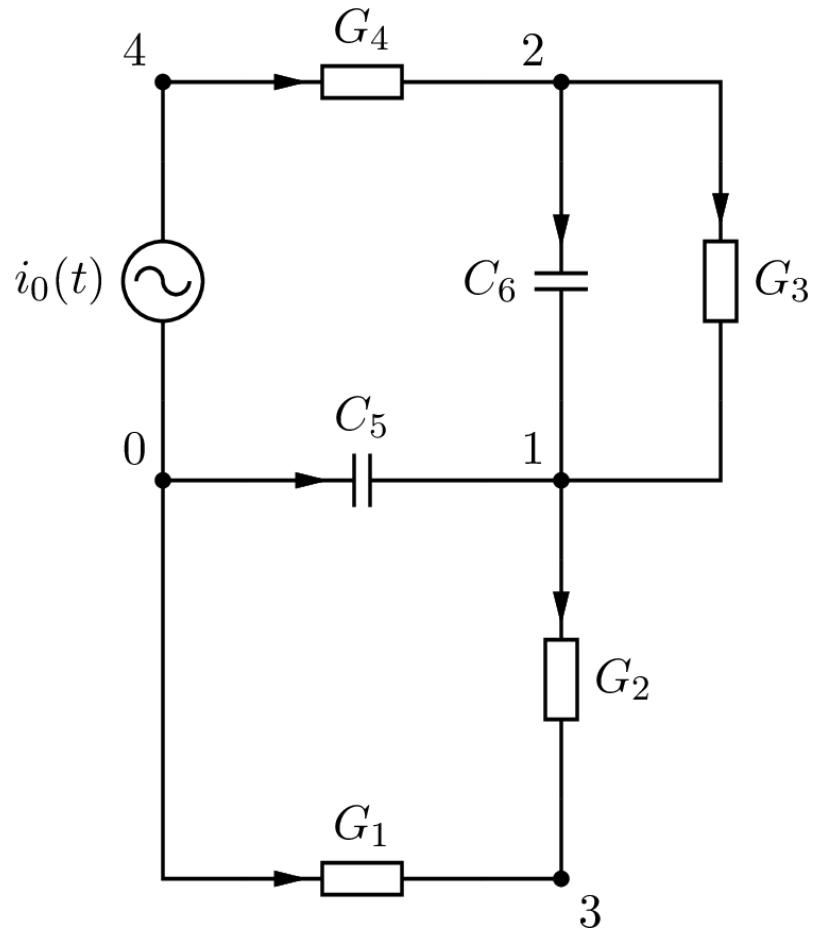


Abbildung 7.1.: Netzwerk für die Knotenspannungsanalyse

### 7.4.1. Transiente Analyse

- Knoten 0:

$$-i_0 - i_1 - i_5 = 0 \quad (7.1)$$

$$-G_1(v_3 - v_0) - C_5 \frac{d}{dt}(v_1 - v_0) = i_0 \quad (7.2)$$

\$\$

- Knoten 1:

$$-i_2 + i_3 + i_5 + i_6 = 0 \quad (7.3)$$

$$-G_2(v_3 - v_1) + G_3(v_1 - v_3) + C_5 \frac{d}{dt}(v_1 - v_0) + C_6 \frac{d}{dt}(v_1 - v_6) = 0 \quad (7.4)$$

- Knoten 2:

$$-i_3 + i_4 - i_6 = 0 \quad (7.5)$$

$$-G_3(v_1 - v_2) + G_4(v_2 - v_4) - C_6 \frac{d}{t}(v_1 - v_2) = 0 \quad (7.6)$$

#### 7.4.2. Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} G_2 + G_3 & -G_3 & -G_2 & 0 \\ -G_3 & G_3 + G_4 & 0 & -G_4 \\ -G_2 & 0 & G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & -G_4 & 0 & G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} + \dots \quad (7.7)$$

$$\begin{pmatrix} C_5 + C_6 & -C_6 & 0 & 0 \\ -C_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i_0 \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad (7.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}(t) \quad (7.10)$$

$$= \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (7.11)$$

## 7.5. Netzwerkanalyse zeitabhängiger Signale

- Matrix  $\mathbf{B}$  ist nicht immer invertierbar, ggf. blockweise zerlegen
- Algebro-Differentialgleichungen
- Euler-Verfahren, explizit (vorwärts), implizit (rückwärts)
- Trapez- oder Mittelpunktregel
  - Adams-Bashforth-, Adams-Multon- und Gear-Verfahren
  - Gut für den Rechner → Python, SPICE
  - Wir machen Transformation und dann Gauss'sches-Eliminationsverfahren

## 7.6. Lösung im Frequenzbereich

	Zeitbereich	Frequenzbereich
	Urbildbereich	Bildbereich
Spannung	$u_n(t)$	$\underline{u}(t) = \hat{U}e^{j\omega t}$
Strom	$i_n(t)$	$\underline{i}(t) = \hat{I}e^{j\omega t}$
Widerstand	$u_R(t) = Ri_R(t)$	$\underline{u}_R(t) = R\underline{i}(t)$
Kondensator	$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$	$\underline{i}_C(t) = j\omega C \underline{u}_C(t)$
Spule	$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ (wenn für $t = 0$ energielos)	$\underline{u}_L(t) = j\omega L \underline{i}_L(t)$

## 7.7. Grundaufgabe der Netzwerkanalyse

- Gewinnung des Netzwerkes
- Wahl des Lösungsverfahrens
- Durchführung der Netzwerkanalyse
- Diskussion der Lösung

## 7.8. Netzwerkgleichungen – Kirchhoff'sche Gesetze

- Knotensatz:  $\sum i_n(t) = 0$
- Maschensatz:  $\sum u_n(t) = 0$
- Zweigbeziehungen:  $u_n = f(i_n)$

## 7.9. Vollständiges Kirchhoff'sches Gleichungssystem

- $p = k - 1$ , unabhängige Knotengleichungen
- $m = z - (k - 1)$ , unabhängige Maschengleichungen
- $z, u, i$ -Beziehungen der Zweigelemente

## 7.10. Netzwerkstruktur

### 7.10.1. Unabhängige Knoten und Maschen

Die Eigenschaften eines Netzwerkes werden von den Netzwerkelementen und der Netzwerkstruktur oder -topologie bestimmt. Das ist die Art ihrer Zusammenschaltung. Sie wird auch als "Gerüst" bezeichnet und zeichnerisch durch den "Streckenkomplex" (engl. graph) ausgedrückt. Die Beschreibung kann gleichwertig durch eine "topologische Matrix" erfolgen.

### 7.10.2. Netzwerkgraph

Der Netzwerkgraph beschreibt die Verbindung der Netzwerkelemente durch Abstraktion der Netzwerkgeometrie. Jedem Knoten im Graphen entspricht ein Knoten im Netzwerk und jeder Verbindungsline ein Zweig zwischen zwei Knoten. Er ist Grundlage der Zahl unabhängiger Knoten- und Maschengleichungen und kann durch "topologische Matrizen" (sog. "Inzidenzmatrizen") mathematisch beschrieben werden.

## 7.11. Vollständiger Baum

Ein vollständiger Baum (engl. tree) ist ein Teilgraph, der keine Umläufe besitzt und alle Knoten des Ausgangsgraphen miteinander verbindet. In einem Netzwerk mit  $k$  Knoten hat der vollständige Baum insgesamt  $k - 1$  Zweige.

### 7.11.1. Merkmale

- alle Knoten sind direkt oder indirekt miteinander verbunden,
- wird ein weiterer Zweig entfernt, so geht Merkmal 1. verloren,
- es treten keine Umläufe auf.

## 7.12. Baumkomplement

Das Baumkomplement bildet als Gesamtheit aller Verbindungswege das "System unabhängiger Zweige". Jeder Verbindungswege gehört genau zu einer Schleife (Masche), die nur aus diesem Verbindungswege und Zweigen des vollständigen Baumes besteht. Eine solche Schleife heißt "Fundamentalschleife" ("unabhängige Masche"). Davon gibt es  $m = z - (k - 1)$ .

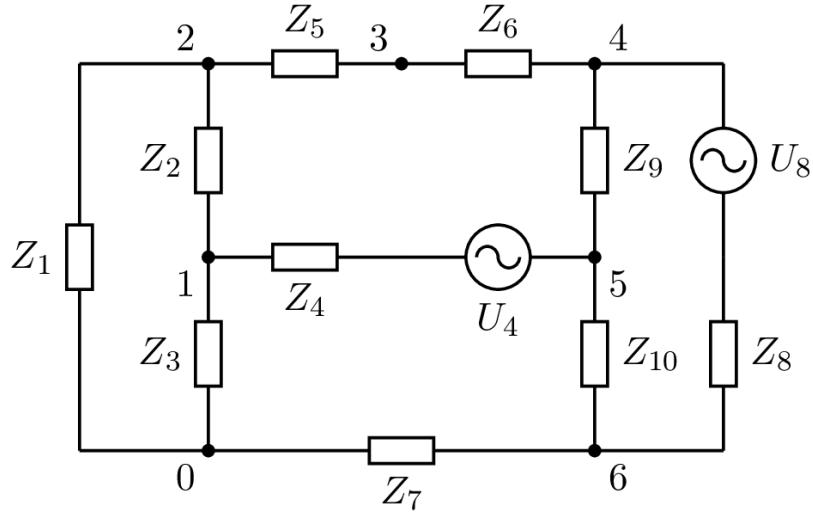


Abbildung 7.2.: Netzwerk für die Maschenstromanalyse

### 7.13. Maschenstromverfahren

#### 7.14. Wahl der unabhängigen Ströme $I_M$

$$I_1, I_4, I_7, I_8$$

Abbildung der abhängigen Ströme durch die unabhängigen Ströme:

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_9 \\ I_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

#### 7.15. 4 Maschengleichungen

$$I_1 Z_1 - I_2 Z_2 - I_3 Z_3 = 0 \quad (7.13)$$

$$U_4 + I_4 Z_4 + I_9 + Z_9 - I_6 Z_6 - I_5 Z_5 - I_2 Z_2 = 0 \quad (7.14)$$

$$I_7 Z_7 + I_{10} Z_{10} + I_9 Z_9 - I_6 Z_6 - I_5 Z_5 - I_2 Z_2 - I_3 Z_3 = 0 \quad (7.15)$$

$$U_8 + I_8 Z_8 - I_9 Z_9 - I_{10} Z_{10} = 0 \quad (7.16)$$

Sortieren und aufstellen des Gleichungssystems:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sum Z_{1,3} & Z_2 & \sum Z_{2,3} & 0 \\ Z_2 & \sum Z_{2,4,5,6,9} & \sum Z_{2,5,6,9,10} & -Z_9 \\ \sum Z_{2,3} & \sum Z_{2,5,6,9,10} & \sum Z_{2,3,5,6,7,9,10} & \sum -Z_{9,10} \\ 0 & -Z_9 & \sum -Z_{9,10} & \sum Z_{8,9,10} \end{pmatrix}}_z \underbrace{\begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix}}_{I_M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -U_4 \\ 0 \\ -U_8 \end{pmatrix}}_U \quad (7.17)$$

## 7.16. Knotenspannungsanalyse

Beim Knotenspannungsverfahren, das auf Maxwell (1873) zurückgeht, wird die Hilfsvariable *Knotenspannung* so eingeführt, dass jede *Maschengleichung* automatisch erfüllt ist und daher alle wegfallen.

Das Verfahren umfasst dann:

- die Aufstellung der Knotengleichungen für die Zweigströme,
- ihren Ersatz durch die Zweigbeziehungen  $I = f(U)$  der Netzwerkelemente ausgedrückt durch Knotenspannungen

(statt der Zweigspannung) und die Lösung der Gleichungen nach den Knotenspannungen.

## 7.17. Knotenspannungs- vs Maschenstromanalyse

- Wegfall der Baumsuche, auch spielt die Zahl unabhängiger Maschen  $m = z - (k - 1)$  und damit die Anzahl der Zweige keine Rolle,
- weil die Knotenspannungen unabhängige Variablen sind, dürfen Spannungsquellen nicht auftreten, denn eine ideale Spannungsquelle zwischen zwei Knoten macht den Strom durch die Quelle unbestimmt.



# 8. Spulen und Übertrager

## **i Hinweis**

Die Inhalte sind dem gleichnamigen Kapitel 9 von (Reisch 2007) entnommen worden.

Spulen dienen der Verwirklichung von Induktivitäten. Übertrager und Transformatoren nutzen die induktive Kopplung von i. allg. galvanisch getrennten Spulen zur Spannungstransformation und zum Übertragen von elektrischer Leistung. Spulen und Übertrager werden in der Elektronik hauptsächlich zum Aufbau von Stromversorgungen, galvanischen Trennungen (z.B. Trennverstärker) und bei der Verwirklichung von Übertragern (z.B. Filter) mit definiertem Frequenzgang verwendet.

Im Gegensatz zu Kondensatoren und Widerständen stehen Spulen häufig nicht als fertige Bauelemente zur Verfügung. Der Anwender hat die Auswahl unter einer großen Fülle magnetischer Werkstoffe, Kernformen und Spulenaufbauten. Der Entwurf von Spulen und Übertragern – insbesondere für den Bereich hoher Frequenzen – erfordert deshalb eine Vielzahl von material- und damit herstellerspezifischen Angaben, deren Wiedergabe den Rahmen [...] dieser Veranstaltung sprengen würde.

## 8.1. Physikalische Grundlagen

Jeder von einem Strom durchflossene Leiter erzeugt ein magnetisches Feld der Feldstärke  $\mathbf{H}$ . Die Einheit der magnetischen Feldstärke im SI-System ist A/m. Im Vakuum ist  $\mathbf{H}$  mit der magnetischen Flußdichte  $\mathbf{B}$  verknüpft über  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  wobei  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$  Vs/Am =  $4\pi$  nH/cm die magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante) bezeichnet. Die Einheit der magnetischen Flußdichte ist Tesla (1T = 1Vs/m<sup>2</sup>). Durch Kernmaterialien mit ferromagnetischen oder ferrimagnetischen Eigenschaften wird in technischen Spulen und Übertragern häufig die magnetischen Flußdichte  $\mathbf{B}$  erhöht. Durch die magnetische Polarisation dieser Materialien im Feld  $\mathbf{H}$  ist die magnetische Flußdichte im Kern um die Permeabilitätszahl  $\mu_r$  erhöht  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$ . Der Wert von  $\mu_r$  ist aussteuerungsabhängig; bei geringer Aussteuerung liegt  $\mu_r$  für typische Spulenerne im Bereich  $10^2$  bis  $10^4$ .

## **i Magnetisierung**

Wird ein Stoff in ein Magnetfeld gebracht, so erfolgt eine Magnetisierung (magnetische Polarisation); diese kann durch die Bildung bzw. Ausrichtung magnetischer Dipole im atomaren Bereich erklärt werden und bewirkt eine Erhöhung der magnetischen Flußdichte

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{H} + \mathbf{J}.$$

## 8. Spulen und Übertrager

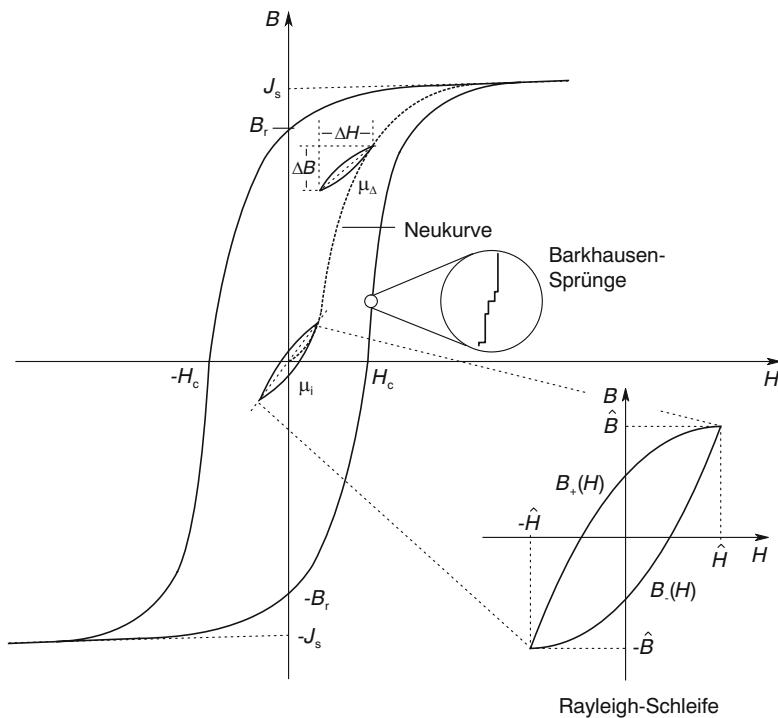


Abbildung 8.1.:  $B(H)$ -Hysteresekurve, Rayleigh-Schleife

Die Größe **M** wird dabei als *Magnetisierung* und die Größe **J** als *magnetische Polarisation* des Stoffs bezeichnet.

### i Permeabilität

Die durch (9.3) definierte relative Permeabilität  $\mu_r = B/\mu_0 H$  ferro- oder ferrimagnetischer Materialien ist nichtlinear von der magnetischen Feldstärke abhängig. Bei kleinen Aussteuerungen um den Arbeitspunkt durchläuft  $B$  als Funktion von  $H$  eine kleine linsenförmige Hystereseschleife. Der Zusammenhang zwischen der Änderung  $\Delta B$  der magnetischen Induktion und der Änderung  $\Delta H$  der magnetischen Feldstärke wird durch die *Überlagerungspermeabilität*  $\mu_\Delta$  beschrieben. Diese ist definiert als

$$\mu_\Delta = \frac{1}{\mu_0} \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

und vom Hub  $\Delta H$  abhängig. Häufig genügt es, den Grenzfall sehr kleiner Hübe  $\Delta H$  zu betrachten. In diesem Fall geht  $\mu_\Delta$  über in die *reversible Permeabilität*

$$\mu_{rev} = \frac{1}{\mu_0} \lim_{\Delta H \rightarrow 0} \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

### **i** Durchflutungs- und Induktionsgesetz

Durch Integration der magnetischen Flußdichte über eine Fläche  $A$  folgt der diese Fläche durchsetzende magnetische Fluß

$$\phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

Der Zusammenhang zwischen Stromfluß und magnetischer Feldstärke wird durch das *Durchflutungsgesetz* (1. Maxwellsche Gleichung) beschrieben. Dieses besagt, daß das Linienintegral über der magnetischen Feldstärke längs einer beliebigen geschlossenen Kurve  $C$  gleich dem diese Schleife durchsetzenden Strom  $i$  ist,

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = i.$$

Ändert sich der eine geschlossene Schleife  $C$  durchsetzende magnetische Fluß  $\phi$ , so wird in der Schleife eine Spannung  $v$  induziert; induzierte Spannung und Flußänderung sind durch das *Induktionsgesetz* (2. Maxwellsche Gleichung)

$$v = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi}{dt}$$

verknüpft. Der durch die induzierte Spannung hervorgerufene Strom ist nach der *Lenzschen Regel* so gerichtet, daß er seiner Ursache – der Flußänderung – entgegenwirkt. Gleichung (9.12) gilt auch für nichtlineare Induktivitäten, wie Spulen mit Eisenkern, die bis in den Sättigungsbereich hinein ausgesteuert werden. Bei schwacher Aussteuerung kann häufig ein linearer Zusammenhang zwischen Fluß und Strom angenommen werden. Sofern nur eine Leiterschleife vorliegt gilt dann  $v = Ldi/dt$ , wobei  $L$  den Induktivitätswert – genauer den *Selbstinduktionskoeffizienten* – des Leiters bezeichnet.

### **i** Induktionskoeffizienten ausgewählter Leiterformen

Die Induktionskoeffizienten für nur einen Leiter, bspw. *Zylinderpulen*, *Ringkernspulen*, *Drahtringe* und *gedruckte Spulen* lassen sich aus der Energie des magnetischen Feldes

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d^3x = \frac{1}{2} Li^2$$

berechnen. Mit  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  folgt

$$L = \frac{\mu}{i^2} \int |\mathbf{H}|^2 d^3x.$$

## 8. Spulen und Übertrager

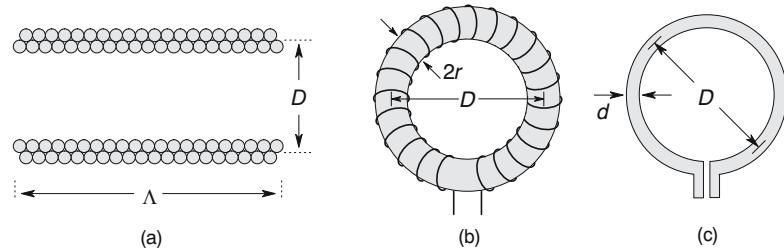


Abbildung 8.2.: (a) Zylinderspule, (b) Ringkernspule und (c) Drahtring

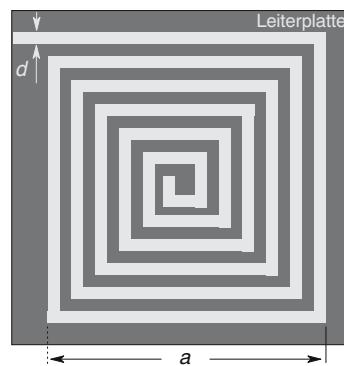


Abbildung 8.3.: Gedruckte Spule (PCB)

## 8.2. Spulen

Spulen werden gewöhnlich als Drahtwicklung auf einem Spulenkörper aus Isoliermaterial ausgeführt. Häufig dient ein Kern aus einem hochpermeablen Material (Eisen, Ferrit) der Erhöhung des Induktivitätswerts – Spulen ohne derartigen Kern werden als *Luftspulen* bezeichnet.

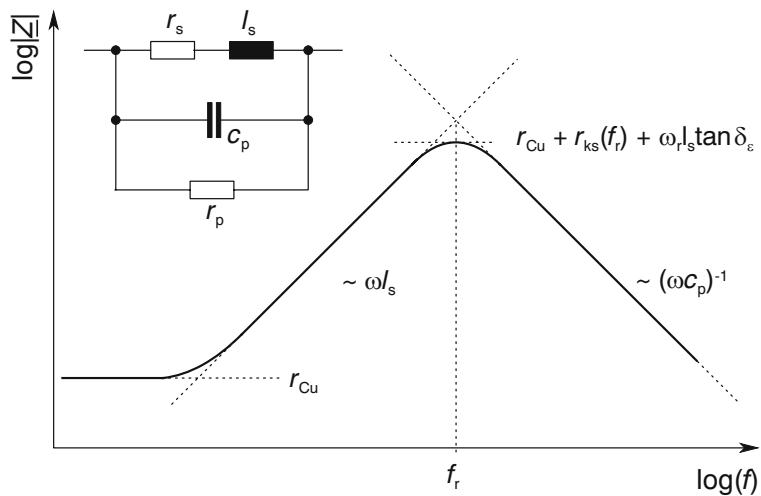


Abbildung 8.4.: Ersatzschaltung einer Spule.

Abbildung Abbildung 8.4 zeigt eine Ersatzschaltung für eine Spule, die bei Kleinsignalaussteuerung verwendet werden kann. Da die Netzwerkelemente arbeitspunktabhängig sind, wurden kleine Buchstaben verwendet. Wie in Gl. (9.33) gezeigt wird, lassen sich Ummagnetisierungsverluste einer Spule mit Kern durch den *Kernverlustwiderstand*  $r_{ks}$  in Serie zu einer reinen Induktivität  $I_s$  erfassen. Zusätzlich zu  $r_{ks}$  ist der *Drahtwiderstand*  $r_{Cu}$  zu berücksichtigen, so daß

$$r_s = r_{Cu} + r_{ks}.$$

Parallel hierzu liegt die Wicklungskapazität  $C_p$ ; dielektrische Verluste in der Isolation werden durch den zusätzlich parallel geschalteten Widerstand  $r_p$  beschrieben. Mit dem Verlustfaktor  $\tan \delta$  der Isolierschichten gilt demnach  $1/r_p \approx \omega C_p \tan \delta$ .

### **i** Impedanz, Eigenresonanz

Die Impedanz  $Z$  der Spule errechnet sich aus der Ersatzschaltung Abbildung 8.4 zu

## 8. Spulen und Übertrager

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{r_p} + j\omega c_p + \frac{1}{j\omega l_s + r_s} \quad (8.1)$$

$$= \frac{-j\omega l_s(1 - c_p r_s^2/l_s - \omega^2 l_s c_p) + r_s + (r_s^2 + \omega^2 l_s^2) \omega c_p \tan \delta}{r_s^2 + \omega^2 l_s^2}. \quad (8.2)$$

Der prinzipielle Verlauf des Scheinwiderstands  $\underline{Z}$  als Funktion der Frequenz ist in Abb. Abbildung 8.4 in doppelt-logarithmischer Auftragung dargestellt. Bei sehr kleinen Frequenzen ist  $\underline{Z}$  durch den ohmschen Widerstand der Wicklung bestimmt. Mit zunehmender Frequenz dominiert dann der induktive Anteil:  $\underline{Z}$  steigt proportional zu  $f$  an. Für Frequenzen  $f > f_r$  dominiert der kapazitive Parallelleitwert: Hier fällt  $\underline{Z}$  proportional zu  $1/f$  ab.

### **i** Verlustfaktor, Spulengüte

Der Verlustfaktor  $\tan \delta_L$  der Spule ist definiert als das Verhältnis von Real- zu Imaginärteil der Impedanz

$$\tan \delta_L = \frac{\text{Re}(\underline{Z})}{\text{Im}(\underline{Z})} = \frac{1}{Q_L};$$

sein Kehrwert  $Q_L$  wird als *Spulengüte* bezeichnet.

Mit Luftspulen lassen sich Güten größer als 1000 verwirklichen; bei Spulen mit Kern liegen die Werte niedriger – bei sorgfältiger Dimensionierung sind jedoch Güten von mehr als 500 erreichbar. Trennung von Gl. (9.25) in Real- und Imaginärteil liefert für den Verlustfaktor

$$\tan \delta_L \approx \frac{r_s}{2\pi f l_s} \frac{1}{1 - (f/f_r)^2} + \frac{(f/f_r)}{1 - (f/f_r)^2} \tan \delta_\epsilon,$$

wobei  $f_r \approx 1/2\pi l_s c_p$  die (Eigen-)Resonanzfrequenz der Spule bezeichnet und  $\omega r_s c_p \tan \delta_\epsilon \ll 1$  sowie  $c_p r_s^2/l_s \ll 1$  angenommen wurde.

### 8.2.1. Anwendungsbeispiele

#### 8.2.1.1. Dämpfungsperlen

Dämpfungsperlen sind kleine zylindrische Ferritkörper mit einer Bohrung, durch die ein Draht geführt werden kann. Sie weisen einen Durchmesser von wenigen Millimetern auf und werden gewöhnlich über einen Anschlußdraht eines bedrahteten Bauteils – z.B. Basisanschluß eines Transistors – gesteckt.

Durch die Dämpfungsperle wird die Impedanz des Anschlußdrahts erhöht. Ist diese ohne Dämpfungsperle durch  $R_0 + j\omega L_0$  gegeben, so folgt mit der komplexen Permeabilität  $\mu_r = \mu'_s - j\mu''_s$  des Materials überschlagsmäßig für die Impedanz  $\underline{Z}$  des Anschlußdrahts bei der Kreisfrequenz  $\omega$

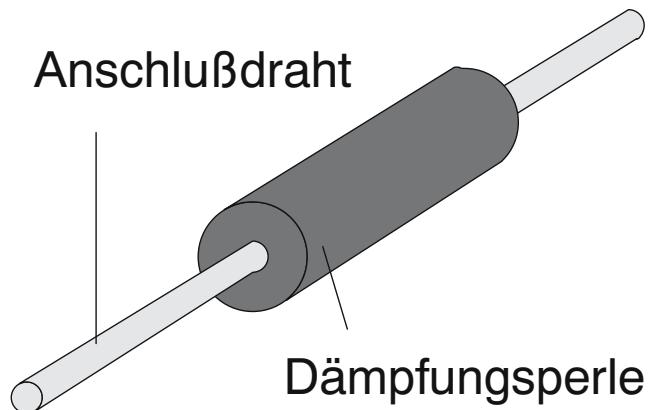


Abbildung 8.5.: Dämpfungsperle

$$\underline{Z} \approx R + j\omega L(\mu'_s - j\mu''_s) = R_0 + \omega\mu''_s L_0 + j\omega\mu'_s L_0.$$

Dämpfungsperlen verringern auf kostengünstige Weise hochfrequente Stromanteile ohne störende Serienwiderstände im NF-Bereich zu verursachen. Sie werden zur Unterdrückung von Überschwingen bei Schaltvorgängen, zur Dämpfung selbsterregter Schwingungen aufgrund parasitärer Rückkopplungen in Verstärkerschaltungen sowie zur Unterdrückung hochfrequenter Rauschanteile eingesetzt. Ihre Wirksamkeit beruht darauf, daß sie im relevanten Frequenzbereich eine nennenswerten Serienimpedanz hervorrufen. [...]

### 8.2.1.2. Drosselpulen

Drosselpulen sollen den Gleichanteil  $I_L$  des sie durchfließenden Stroms möglichst wenig, den Wechselanteil möglichst stark dämpfen (drosseln). Der Kern einer Drosselpule ist deshalb in der Regel mit einem starken Gleichfeld belastet, dem ein schwaches Wechselfeld überlagert ist. Die Verluste in der Drosselpule sind somit vorwiegend Kupferverluste, da der dominierende Gleichanteil keine Kernverluste verursacht; vgl. auch {cite}schlienz2020 Kap. 2 - Abwärtswandler.

### 8.2.1.3. Power Management Integrated Circuits (PMICs)

“Power management integrated circuits (PMICs) are essential in today’s electronic devices. They manage power delivery and consumption, provide efficient power supplies, and drive power switches that control actuators and motors, as illustrated in Abbildung 8.7 PMICs can be integrated into complex integrated circuits (ICs) or implemented as dedicated ICs. In this book, the term PMIC will refer to any type of power integrated circuit.

## 8. Spulen und Übertrager

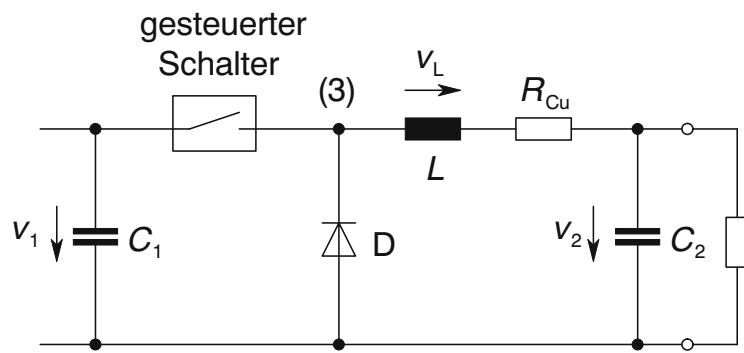


Abbildung 8.6.: Schaltnetzteil mit Drossel-Abwärtswandler

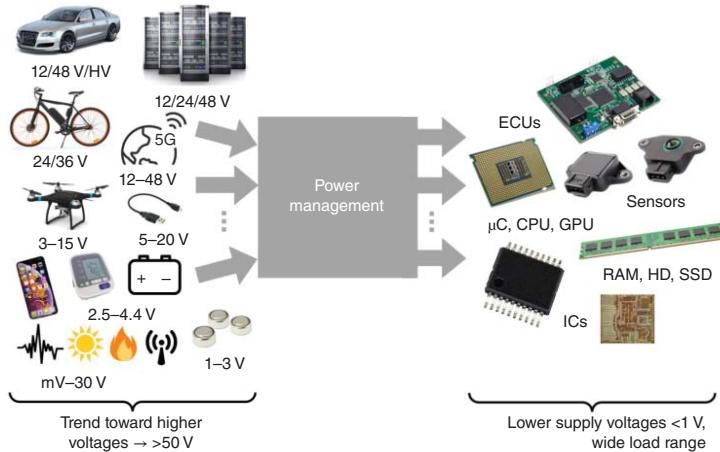


Abbildung 8.7.: PMICs

The importance of PMICs has grown significantly in recent years, driving innovation and progress in various industries, from consumer electronics to automotive and industrial applications. With the progress of machine learning and artificial intelligence (AI), intelligent power management is critical to supplying complex processors and sensors.

PMICs have enabled the development of smaller, more energy-efficient, and reliable electronic solutions. They also play an essential role in environmental aspects and sustainability. By regulating the power supply of electronic devices, PMICs can reduce energy consumption and carbon emissions. Moreover, PMICs are crucial for the development of renewable energies, such as solar and wind power, by enabling efficient power conversion and management." (Wicht 2024)

- IoT Nodes and Energy Harvesting
- Portable Devices, Smartphones, and Wearables
- Universal Serial Bus (USB)
- Drones
- Telecommunication Infrastructures
- E-Bikes
- Automotive
- Data-Centers

### 8.3. Transformatoren und Übertrager

Durch magnetische Verkopplung zweier galvanisch getrennter Stromkreise kann zwischen diesen Leistung übertragen werden. Dies wird angewendet in *Transformatoren* (Trafos), die der Umsetzung von Spannungs- bzw. Stromwerten dienen sowie in *Übertragern* und *Trenntrafos* zur galvanischen Trennung von Wechselstromkreisen, Impedanzanpassung, Unterdrückung von Gleichanteilen und zum Unterbrechen von Erdschleifen. Die Verkopplung der Induktivitäten wird gewöhnlich durch einen gemeinsamen Kern erhöht, der – zur Verbesserung der Linearität – meist einen Luftspalt enthält.

Abbildung Abbildung 8.8 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Transformators bzw. Übertragers mit einer primärseitigen Wicklung der Windungszahl  $n_1$  und einer sekundärseitigen Wicklung der Windungszahl  $n_2$ . Wird die primärseitige Spule von einem Strom  $i_1$  durchflossen, so setzt sich der erzeugte Fluß

$$\phi_{11} = \phi_{1\sigma} + \phi_{12}$$

aus dem primären Streufluß  $\phi_{1\sigma}$  und dem die Sekundärwicklung durchsetzenden Fluß  $\phi_{12}$  zusammen. Entsprechend lässt sich der von der Sekundärwicklung erzeugte Fluß  $\phi_{22}$  in den sekundären Streufluß  $\phi_{2\sigma}$  und den die Primärwicklung durchsetzenden Fluß  $\phi_{21}$  zerlegen

$$\phi_{22} = \phi_{2\sigma} + \phi_{21}.$$

## 8. Spulen und Übertrager

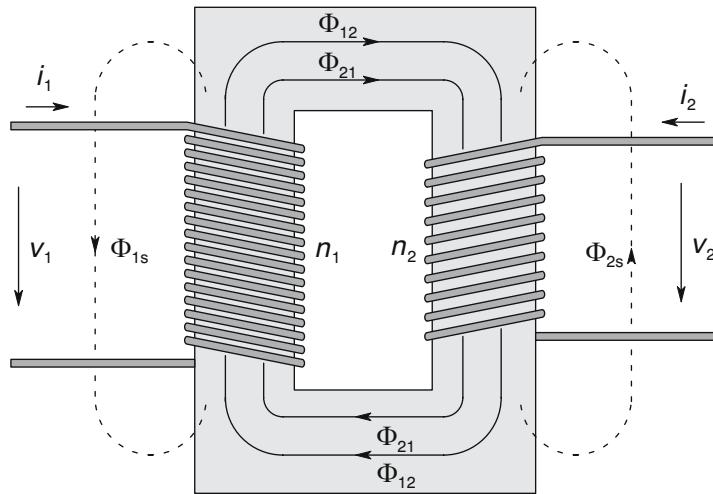


Abbildung 8.8.: Haupt- und Streuflüsse im Transformator

Der die Primärwicklung durchsetzende Fluß  $\phi_1$  und der die Sekundärwicklung durchsetzende Fluß  $\phi_2$  sind damit

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{21} \quad \text{und} \quad \phi_2 = \phi_{22} + \phi_{12}.$$

Unter Berücksichtigung der Spannungsabfälle an den Wicklungen folgt aus dem Induktionsgesetz für die Spannungsabfälle in Primär- und Sekundärkreis

$$v_1 = R_{Cu1}i_1 + n_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad (8.3)$$

$$v_2 = R_{Cu2}i_2 + n_2 \frac{d\phi_2}{dt}. \quad (8.4)$$

Die Beziehungen (45) gelten allgemein und sind auch bei Aussteuerung des Kernmaterials in den Sättigungsreich anwendbar. Bei Aussteuerung mit geringer Amplitude besteht annähernd ein linearer Zusammenhang zwischen den Flüssen und den Spulenströmen

$$\phi_{11} = L_1 i_1, \quad \phi_{12} = M i_1, \quad \phi_{21} = M i_2 \quad \text{und} \quad \phi_{22} = L_2 i_2.$$

Dabei bezeichnet  $L_1 = L_{11}$  den (Selbst-)Induktionskoeffizienten der Primärwicklung,  $M = L_{12}$  den Gegeninduktionskoeffizienten von Primär- und Sekundärwicklung und  $L_2 = L_{22}$  den (Selbst-)Induktionskoeffizienten der Sekundärwicklung. Durch Einsetzen in die Gl. (9.68) und (9.69) ergeben sich die sog.

**i** Transformatorgleichungen

$$\underline{v}_1 = R_{Cu1}i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (8.5)$$

$$\underline{v}_2 = R_{Cu2}i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (8.6)$$

Diese Beziehungen gelten nur bei Kleinsignalaussteuerung ohne Vormagnetisierung im Bereich niederer Frequenzen. Bei höheren Frequenzen tritt eine Phasenverschiebung zwischen magnetischem Feld (bzw. Spulenstrom) und magnetischer Polarisation auf.

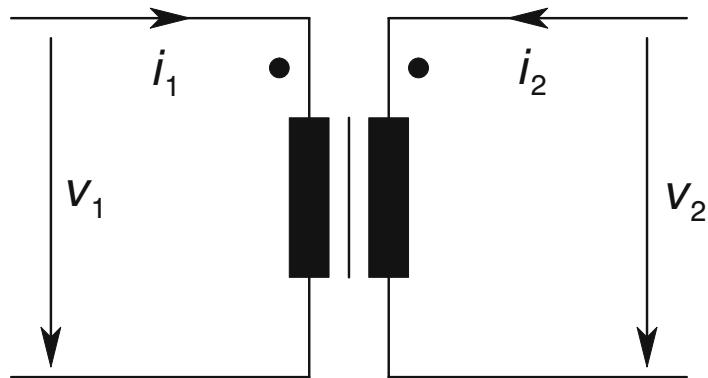


Abbildung 8.9.: Schaltsymbol zweier gekoppelter Induktivitäten

### 8.3.1. Der verlustlose Übertrager

Bei sinusförmiger Erregung folgt unter Vernachlässigung der Drahtwiderstände ( $R_{Cu1} = R_{Cu2} = 0$ ) aus den *Transformatorgleichungen* für die komplexen Zeiger der Wechselspannungsanteile an Primär- und Sekundärwicklung (Abb. Abbildung 8.9)

$$\underline{v}_1 = j\omega L_1 i_1 + j\omega M i_2 \quad (8.7)$$

$$\underline{v}_2 = j\omega M i_1 + j\omega L_2 i_2 \quad (8.8)$$

Mit dem *Kopplungsfaktor*  $k = M/L_1 L_2$  lässt sich dies umformen zu

## 8. Spulen und Übertrager

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot \underline{v}_2 - j\omega \frac{1-k^2}{k} \sqrt{L_1 L_2} \cdot i_2 \quad (8.9)$$

$$i_1 = \frac{1}{j\omega k \sqrt{L_1 L_2}} \cdot \underline{v}_2 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \cdot i_2 \quad (8.10)$$

Bei belastetem Ausgang gilt  $i_2 = -\underline{v}_2/Z_L$ ; für den *Spannungsübertragungsfaktor* folgt damit aus Gl. (48)

$$\frac{\underline{v}_1}{\underline{v}_2} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + j\omega \frac{1-k^2}{k} \sqrt{L_1 L_2} \frac{1}{Z_L}.$$

### i Vollständige Kopplung

Im Fall idealer Kopplung ( $|k| = 1$ ) verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (49); das Spannungsverhältnis ist dann

$$\frac{\underline{v}_1}{\underline{v}_2} = \frac{L_1}{L_2} = .$$

Die Größe  $\ddot{u}$  wird dabei als *Übertragungsverhältnis* bezeichnet. Zwischen den Zeigern der Ströme besteht nach Gl. (9.75) der Zusammenhang

$$\dot{i}_1 = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot \dot{i}_1 + \frac{1}{j\omega \sqrt{L_1 L_2}} \cdot \underline{v}_2$$

Im Grenzfall des *idealen Übertragers* mit  $L_1 = 2L_2 \rightarrow \infty$  führt dies auf

$$\frac{\dot{i}_1}{\dot{i}_2} = \frac{-1}{.}$$

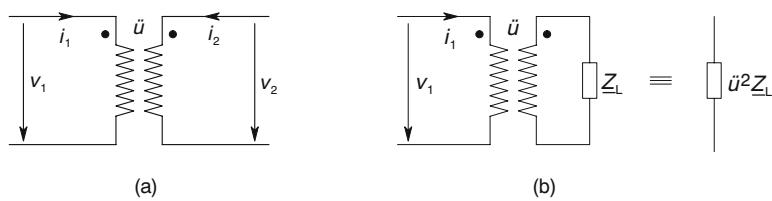


Abbildung 8.10.: Idealer Übertrager. (a) Schaltsymbol und (b) Impedanztransformation mit idealem Übertrager

Abbildung Abbildung 8.10 (a) zeigt des Netzwerksymbol eines idealen Übertragers. Für diesen gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Zeigern von Strom und Spannung an Ein- und Ausgang

$$\begin{pmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v}_2 \\ \underline{i}_2 \end{pmatrix}$$

Besitzen die beiden Wicklungen des Übertragers denselben  $A_L$ -Wert, so ist  $L_1 = A_L n_1^2$  und  $L_2 = A_L n_2^2$ , wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Windungszahlen der jeweiligen Wicklung bezeichnen. In Gl. (9.76) des Spannungsübertragungsfaktors eingesetzt folgt

$$= n_1/n_2,$$

d.h. im idealen Übertrager ist das Übertragungsverhältnis ü gleich dem Verhältnis der jeweiligen Windungszahlen.

#### Impedanztransformation

Wird der Ausgang eines idealen Übertragers mit der Impedanz  $\underline{Z}_L$  beschaltet (Abb. Abbildung 8.10 (b)), so gilt  $\underline{v}_2/i_2 = -\underline{Z}_L$ . Für die Eingangsimpedanz  $\underline{Z}_i$  des Übertragers folgt damit

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{v}_1}{\underline{i}_1} = \frac{\underline{v}_1}{\underline{v}_2} \cdot \frac{\underline{v}_2}{\underline{i}_2} \cdot \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = {}^2\underline{Z}_L,$$

d.h. der ideale Übertrager mit vollständiger Kopplung "transformiert" Impedanzen im Verhältnis  ${}^2$  von der Sekundärseite auf die Primärseite.

### 8.3.2. Realer (verlustbehafteter) Übertrager

In realen Übertragern ist der Kopplungsfaktor von eins verschieden, da aufgrund von Streufeldern der die eine Spule durchsetzende Fluß die andere nicht vollständig durchsetzt.

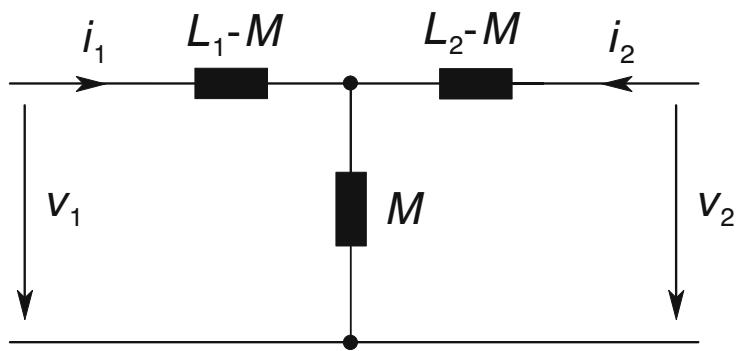


Abbildung 8.11.: T-Ersatzschaltung

Die Transformatorgleichungen lassen sich in die in Abb. Abbildung 8.11 dargestellte T-Ersatzschaltung überführen. Durch Anwenden des Maschensatzes folgt sofort

## 8. Spulen und Übertrager

$$\underline{v}_1 = j\omega(L_1 - M)\underline{i}_1 + j\omega M(\underline{i}_1 + \underline{i}_2) = j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2 \quad (8.11)$$

$$\underline{v}_2 = j\omega(L_2 - M)\underline{i}_2 + j\omega M(\underline{i}_1 + \underline{i}_2) = j\omega L_2 \underline{i}_2 + j\omega M \underline{i}_1 \quad (8.12)$$

Das Verhalten des Übertragers kann demnach durch drei verschaltete Induktivitäten, die beiden Längsinduktivitäten  $L_1 - M$  und  $L_2 - M$  sowie die Gegeninduktivität  $M$  beschrieben werden. Für Kopplungsfaktoren von annähernd eins gilt  $M \approx \sqrt{L_1 L_2}$ ; d.h. zumindest eine der Längsinduktivitäten ist negativ. Die T-Ersatzschaltung ist aus diesem Grund als rein formales Netzwerk anzusehen, das die Transformatorgleichungen korrekt erfaßt – eine physikalisch anschauliche Interpretation der Netzwerkelemente besteht jedoch nicht.

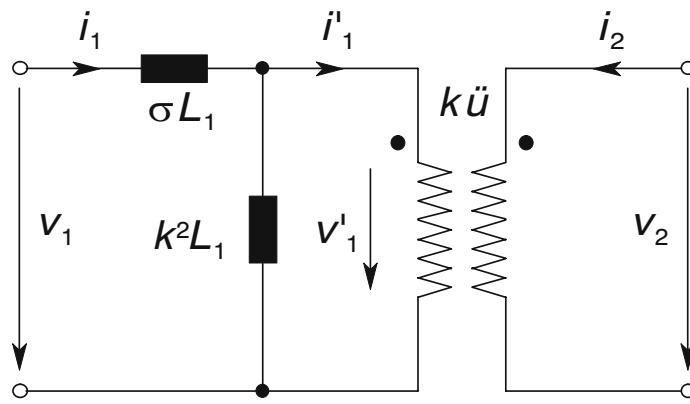


Abbildung 8.12.: Ersatzschaltung eines unvollständig gekoppeln Übertragers

Abbildung Abbildung 8.12 zeigt die Ersatzschaltung eines unvollständig gekoppelten ( $k < 1$ ), ansonsten verlustfreien Übertragers. Dabei wird von der Induktivität  $L_1$  ein Streuanteil  $\sigma L_1$  abgespalten; der

**i** Streugrad  $\sigma$

des Übertragers ist definiert als

$$\sigma = 1 - k^2.$$

Lediglich der an  $k^2 L_1$  auftretende Spannungsabfall wirkt als Eingangsspannung des idealen Übertragers mit Übertragungsverhältnis  $k\dot{u}$ . Die Netzwerkgleichungen für diese Ersatzschaltung lauten

$$\underline{v}'_1 = \underline{v}_1 - j\omega\sigma L_1 \underline{i}_1 = k\underline{v}_2, \quad \underline{i}_1 = \underline{v}_1 + \underline{i}_1 j\omega k^2 L_1$$

und  $\underline{i}_1 = -\underline{i}_2/k$ . Durch Eliminieren von  $\underline{v}_1$  und  $\underline{i}_1$  lassen sich diese in die Gl. (48) überführen, wobei die Details der Rechnung dem Leser als Übungsaufgabe überlassen werden.

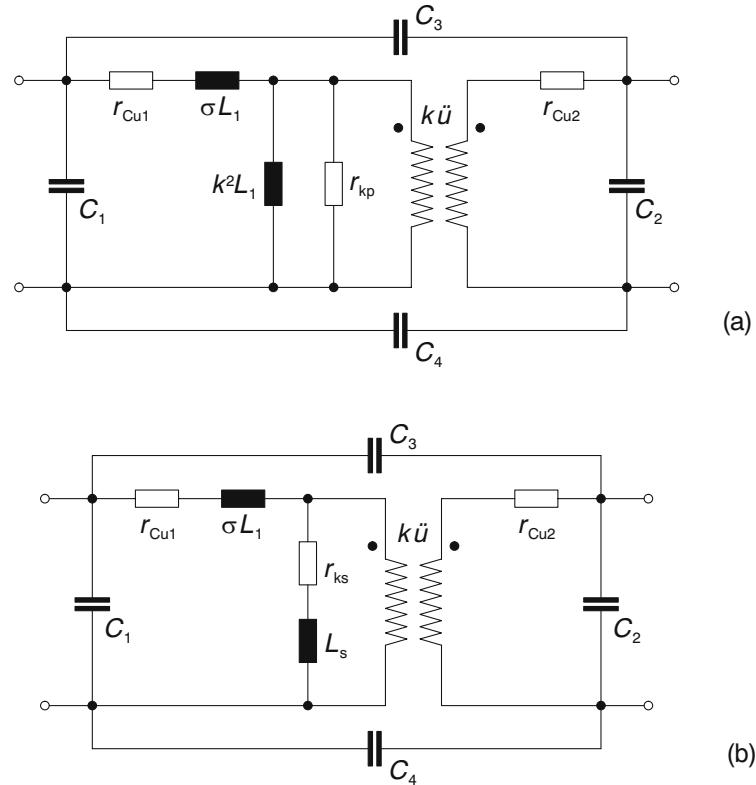


Abbildung 8.13.: (a) Parallel- und (b) Serienersatzschaltung eines verlustbehafteten Übertragers

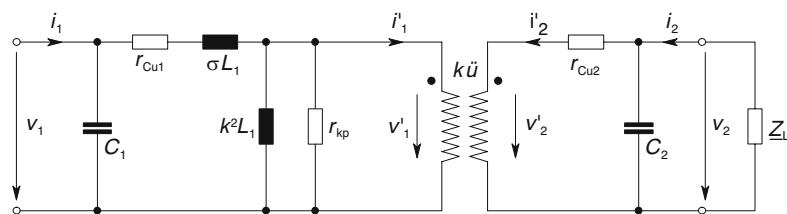


Abbildung 8.14.: Parallelersatzschaltung eines verlustbehafteten Übertragers mit beschaltetem Ausgang

## 8. Spulen und Übertrager

### 8.3.3. Übertragungsfaktor

Übertrager sollen eine formtreue Signalübertragung aufweisen, was erhöhte Anforderungen an die Linearität bedingt und eine hohe Bandbreite voraussetzt. Für eine Untersuchung des Frequenzgangs von Übertragern wird die in Abb. Abbildung 8.14 gezeigte Ersatzschaltung herangezogen, wobei die durch  $C_3$  und  $C_4$  beschriebene kapazitive Kopplung zwischen Primär- und Sekundärwicklung (vgl. Abb. Abbildung 8.13 (a)) vernachlässigt wird.

Der Ausgang des idealen Übertragers in der Ersatzschaltung Abb. Abbildung 8.14 ist mit der Impedanz

$$\underline{Z}_x = r_{Cu2} + \frac{\underline{Z}_L}{1 + j\omega C_2 \underline{Z}_L}$$

beschaltet, die eingangsseitig wie eine Impedanz  $k^{22} \underline{Z}_x$  wirkt. Zur Berechnung der Amplitude von  $\underline{v}'_1$  kann demnach die in Abb. Abbildung 8.15 dargestellte Ersatzschaltung herangezogen werden.

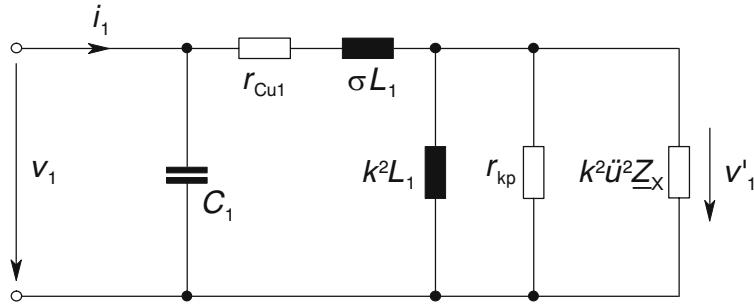


Abbildung 8.15.: Zusammenfassung und Transformation der Sekundärseite

Nach der Spannungsteilerregel folgt sofort

$$\frac{\underline{v}'_1}{\underline{v}_1} = \frac{j\omega k^2 L_1 || r_{kp} || k^{22} \underline{Z}_x}{r_{Cu1} + j\omega \sigma L_1 + j\omega k^2 L_1 || r_{kp} || k^{22} \underline{Z}_x} \quad (8.13)$$

$$= \frac{1}{1 + (r_{Cu1} + j\omega \sigma L_1) \left( \frac{1}{j\omega k^2 L_1} + \frac{1}{r_{kp}} + \frac{1}{k^{22} \underline{Z}_x} \right)} \quad (8.14)$$

Ebenfalls durch Anwenden der Spannungsteilerregel erhält man

$$\frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_2} = \frac{\underline{Z}_L || (j\omega C_2)^{-1}}{\underline{Z}_x} \quad (8.15)$$

$$= \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + r_{Cu2} (1 + j\omega C_2 \underline{Z}_L)}. \quad (8.16)$$

Mit dem Übertragungsverhältnis  $k$  des idealen Übertragers folgt für den Spannungsübertragungsfaktor

$$\underline{H}_v = \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}_1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_2} \cdot \frac{\underline{v}'_1}{\underline{v}_1}$$

Im Folgenden wird der Fall einer rein ohmschen Last  $\underline{Z}_L = R_L$  betrachtet; unter diesen Umständen gilt

$$\underline{Z}_x = r_{Cu2} + \frac{R_L}{1 + j\omega C_2 R_L} \quad \text{und} \quad \frac{\underline{v}_2}{\underline{v}'_2} = \frac{R_L}{R_L + r_{Cu2}(1 + j\omega C_2 R_L)}.$$

Der Spannungsübertragungsfaktor ergibt sich hiermit und durch Ausmultiplizieren in der Form

$$\underline{H}_v = \frac{A_{v0}}{1 - jf_u/f + jf/f_o - f^2/f_r^2}$$

was ein Bandpaßverhalten beschreibt.

### 8.3.4. Leistungsübertrager, Transformatoren

*Beim Transformator steht die maximal übertragbare Leistung im Vordergrund – Signalverformungen sind zulässig.* Aufgrund der Proportionalität der in die Sekundärwicklung induzierten Spannung zur Frequenz  $f$  (bei konstantem Induktionshub  $\Delta B$ ) steigt die in einem Transformator von der Primärseite auf die Sekundärseite übertragbare Leistung annähernd proportional zu  $f$  an. Unter Vernachlässigung der Spannungsabfälle an den Wicklungswiderständen, Streuinduktivitäten und der Vormagnetisierung gilt die folgende Näherung für die übertragene Leistung

$$P = C \cdot \Delta B \cdot J \cdot A_W A_e \cdot F_{Cu} \cdot f.$$

Dabei bezeichnet  $C$  einen von der Betriebsart abhängigen Faktor, der typischerweise im Bereich  $0.6 < C < 1$  liegt und  $J$  die Stromdichte in der Wicklung. Der Induktionshub  $\Delta B$  ist bei niedrigen Frequenzen durch Sättigungseffekte und bei hohen Frequenzen durch die Erwärmung des Kerns aufgrund von Kernverlusten beschränkt. Die Stromdichte  $J$  wird durch die Erwärmung der Wicklung aufgrund von Kupferverlusten begrenzt.

*Der wirksame Kernquerschnitt sollte im Sinne geringer Kosten und geringen Gewichts möglichst klein sein. Eine Steigerung der übertragbaren Leistung ist demnach nur durch eine Anhebung der Frequenz möglich. Mit zunehmender Schaltfrequenz kann das Gewicht – und damit auch der Preis – von Stromversorgungen und DC-DC-Wandlern gesenkt werden.*

Ein 100 W-Netzteil, realisiert mit einem bei Netzfrequenz (50 Hz) arbeitenden Transformator, hat eine Masse in der Größenordnung von 10 kg; durch Erhöhen der Schaltfrequenz auf 50 kHz kann diese auf unter 1 kg gesenkt werden, bei 500 kHz sind weniger als 400 g erreichbar. Wesentlich für diese Anhebung der Schaltfrequenz war die Entwicklung spezieller, verlustarmer Ferritwerkstoffe; vgl. mit (Zach 2022), Kap. 15.



**Teil II.**

**Hörsaalübungen**



# 9. Periodische Signale

## 9.1. Darstellung von Signalen

Stellen Sie die Signale des angegebenen Netzwerks mit Python (und/oder von Ihnen gewählten alternativen Softwarepaketen des wissenschaftlichen Rechnens, z.B. Matlab oder Gnu Octave) dar.

Die Komponenten Werte sind:  $\omega = 2\pi \text{ 1 kHz}$ ,  $\hat{U}_0 = 10 \text{ V}$ ,  $R = 30 \Omega$ ,  $L = 3 \text{ mH}$ ,  $\hat{I}_0 = 0.282 \text{ A}$ ,  $\varphi_I = -32.1 \text{ Grad}$ .

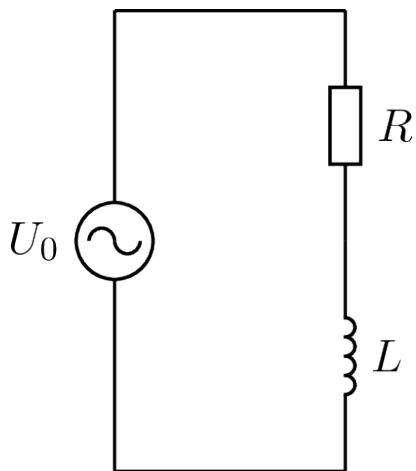


Abbildung 9.1.: Wechselstromschaltung

### 9.1.1. Lösung

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

f = 10**3 # Grundfrequenz 1 kHz wird auch als 10e3 geschrieben
w = 2 * np.pi * f # Kreisfrequenz

U0p = 10 # Spannung in Volt
R = 30 # Widerstand in Ohm
L = 3e-3 # Induktivität in Henry
I0p = 0.282 # Strom in Ampere
phiI = -32.1 * np.pi / 180 # Winkel in rad
```

## 9. Periodische Signale

```
t = np.linspace(0, 5e-3, 1000) # Zeitachse anlegen
u0 = U0p * np.sin(w * t)
i0 = I0p * np.sin(w * t + phiI)
uL = w * L * I0p * np.sin(w * t + phiI + np.pi / 2) # Spannung über der Spule
uR = R * i0 # Spannung über Widerstand

plt.plot(w * t, u0, label=r'$u_0$')
plt.plot(w * t, uR, label=r'$u_R$')
plt.plot(w * t, uL, label=r'$u_L$')
plt.plot(w * t, i0, label=r'$i_0$')
plt.xlabel(r'$\omega t$')
plt.ylabel(r'$u(t)$')
plt.grid()
plt.legend()

plt.show()
```

## 9.2. Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen

Der zeitliche Verlauf einer Spannung mit  $\omega_2 = 3\omega_1$  sei gegeben durch

$$u(t) = U_0 + \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{U}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi).$$

### 9.2.1. Periodendauer

Wie groß ist die Periodendauer  $T$ ?

#### 9.2.1.1. Lösung

Die Periodendauer  $T$  ist der kleinste Zeitabschnitt mit  $u(t + T) = u(t)$ .

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

### 9.2.2. Mittelwert

Berechnen Sie den Mittelwert der Spannung  $u(t)$ !

## 9.2. Überlagerung von sinusförmigen Spannungen mit verschiedenen Frequenzen

### 9.2.2.1. Lösung

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = U_0$$

### 9.2.3. Effektivwert

Berechnen Sie den Effektivwert  $U_{eff}$  der Spannung  $u(t)$ ! Wie lässt sich  $U_{eff}$  aus den Effektivwerten der drei Einzelspannungen berechnen?

 Tipp

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin(\omega t) \cos(\omega t)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2}$$

#### 9.2.3.1. Lösung

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u^2(t)} dt \quad (9.1)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (U_0 + \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) + \hat{U}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi))^2 dt \quad (9.2)$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T (U_0^2 + 2U_0 \hat{U}_1 \cos(\omega_1 t) + 2U_0 \hat{U}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi) + \hat{U}_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\hat{U}_1 \hat{U}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) + \hat{U}_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi)) dt \quad (9.3)$$

$$+ \hat{U}_1^2 \cos^2(\omega_1 t) + 2\hat{U}_1 \hat{U}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t + \varphi) \quad (9.4)$$

$$+ \hat{U}_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \varphi)) \quad (9.5)$$

$$= U_0^2 + \frac{1}{2} \hat{U}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{U}_2^2 \quad (9.6)$$

$$= U_0^2 + U_{1,eff}^2 + U_{2,eff}^2 \quad (9.7)$$

### 9.2.4. Scheitelfaktor

Wie groß ist der Scheitelfaktor  $U_{max}/U_{eff}$ , wenn  $U_0 = 1 \text{ V}$ ,  $\hat{U}_1 = \hat{U}_2 = 100 \text{ mV}$  und  $\varphi = 60 \text{ Grad}$ ?

```
import numpy as np
import scipy.integrate as si
import scipy.optimize as so
import matplotlib.pyplot as plt
```

## 9. Periodische Signale

```
U0 = 1
U1p = 100e-3
U2p = 100e-3
phi = 60 * np.pi / 180
f1 = 1e3
T = 1 / f1
w1 = 2 * np.pi * f1
w2 = 3 * w1

# Definition der Spannungen als Funktion
def u(t):
    return U0 + U1p * np.cos(w1 * t) + U2p * np.cos(w2 * t + phi)

def u2(t):
    return (U0 + U1p * np.cos(w1 * t) + U2p * np.cos(w2 * t + phi))**2

# Zeit als Vektor
t = np.linspace(0, 5e-3, 3000)

# Darstellung der Funktion
fig1 = plt.figure(1)
plt.plot(t, u(t))
plt.xlabel('Zeit t/s')
plt.ylabel('Spannung u(t)/V')
plt.grid('on')
plt.show()

# Mittelwert der Spannung u(t)
y, err = si.quad(u, 0, T)
u_bar = 1 / T * y
print('Der Mittelwert:', u_bar)

# Effektivwert der Spannung u(t)
y2, err2 = si.quad(u2, 0, T)
U_eff = np.sqrt(1 / T * y2)
print('Der Effektivwert:', U_eff)

# Berechnung des Scheitelfaktors, Fixpunkt-Iteration
def func(x, c1, c2, c3):
    return 1.0 / 3.0 * (np.arcsin(-c1 / (3 * c2) * np.sin(x)) - c3)
```

```
SF = so.fixed_point(func, 1, args=(U1p, U2p, phi), xtol=1e-6)
print('Der Scheitelfaktor:', SF)
```

#### 9.2.4.1. Lösung

$$U_{max} = u(t_{max}); \quad \left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{t=t_{max}} = 0 \quad (9.8)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -\hat{U}_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t) - \hat{U}_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \varphi) \quad (9.9)$$

$$\sin(3\omega_1 t_{max} + \varphi) = -\frac{\hat{U}_1}{2\hat{U}_2} \sin(\omega_1 t_{max}) \quad (9.10)$$

$$\omega_1 t_{max} = \frac{1}{3} \left( \arcsin \left( -\frac{\hat{U}_1}{3\hat{U}_2} \sin(\omega_1 t_{max} + \varphi) \right) \right) \quad (9.11)$$

Die letzte Gleichung ist eine sog. *Fixpunktiteration*, deren numerische Lösung im Programmcode formuliert ist. Nach ein paar Iterationschritten erhält man  $\omega_1 t_{max} = -0.315$ . Daraus ergeben sich  $U_{max} = 1.195$  V und  $U_{eff} = 1.005$  V.

Der gesuchte *Formfaktor* berechnet sich zu:

$$\frac{U_{max}}{U_{eff}} = 1.189$$

### 9.3. Schaltungsberechnung in reeller Schreibweise

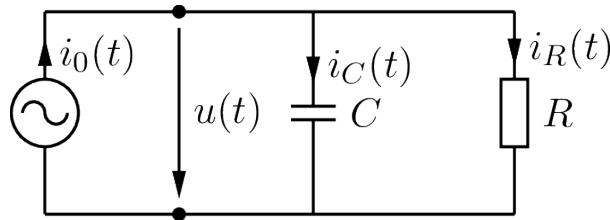


Abbildung 9.2.: Netzwerk zur Schaltungsanalyse

Gegeben sei die in Abbildung 9.2 skizzierte Schaltung mit einer Wechselstromquelle  $i_0(t) = \hat{I}_0 \sin(\omega t)$ .

#### 9.3.1. Amplitude und Phase

Berechnen Sie Amplitude und Phasenwinkel jeweils von  $u(t)$ ,  $i_C(t)$  und  $i_R(t)$ !

## 9. Periodische Signale

### 9.3.1.1. Lösung

Sei  $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$ , dann ergeben sich die Ströme zu:

$$i_C(t) = \omega C \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}) = -\omega C \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) \quad (9.12)$$

$$i_R(t) = \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t + \varphi_u). \quad (9.13)$$

Knotengleichung:  $i_0(t) = i_C(t) + i_R(t)$

$$\hat{I}_0 \sin(\omega t) = -\omega C \hat{U} \cos(\omega t + \varphi_u) + \frac{\hat{U}}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (9.14)$$

$$\hat{I}_0 \sin(m - \varphi_u) = -\omega C \hat{U} \cos(m) + \frac{\hat{U}}{R} \sin(m), \quad m = \omega t + \varphi_u \quad (9.15)$$

$$\hat{I}_0 (\sin(m) \cos(\varphi_u) - \cos(m) \sin(\varphi_u)) = -\omega C \hat{U} \cos(m) + \frac{\hat{U}}{R} \sin(m) \quad (9.16)$$

(9.17)

Koeffizientenvergleich:

$$\hat{I}_0 \cos(\varphi_u) = \frac{\hat{U}}{R} \quad (9.18)$$

$$\hat{I}_0 \sin(\varphi_u) = -\omega C \hat{U} \quad (9.19)$$

$$\tan \varphi_u = \frac{\sin(\varphi_u)}{\cos(\varphi_u)} = \frac{-\omega C \hat{U}}{\frac{\hat{U}}{R}} = -\omega R C \quad (9.20)$$

$$\varphi_u = \arctan(-\omega R C) \quad (9.21)$$

$$\hat{I}_0 \cos(\varphi_u) = \frac{\hat{U}}{R} \quad (9.22)$$

$$\hat{U} = R \hat{I} \cos \varphi_u = R \hat{I} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi)}} \quad (9.23)$$

$$= \frac{R \hat{I}}{\sqrt{1 + (\omega R C)^2}} \quad (9.24)$$

$$\hat{I}_C = \omega C \hat{U} \quad (9.25)$$

$$\hat{I}_R = \frac{\hat{U}}{R} \quad (9.26)$$

### 9.3.2. Spannungsverläufe

Skizzieren Sie mithilfe von Python  $i_0(t)$ ,  $u(t)$ ,  $i_C(t)$  und  $i_R(t)$  für  $\hat{I}_0 = 14.1 \text{ mA}$ ,  $f = 3.183 \text{ kHz}$ ,  $R = 50 \Omega$  und  $C = 1 \mu \text{F}$ !

```
from numpy import pi, sin, linspace
import matplotlib.pyplot as plt

f = 3.183e3 # Frequenz kHz
w = 2 * pi * f # Kreisfrequenz
R = 50 # Widerstand in Ohm
C = 1e-6 # Kapazität in Farad
I0 = 14.1e-3 # Strom
t = linspace(0, 1e-3, 1000) # Länge der x-Achse und

# Strom- und Spannungsfunktionen
i_0 = I0 * sin(w * t) # Stromquelle
u = 5e-3 * sin(w * t - pi / 4) # Spannung
i_C = 10e-3 * sin(w * t + pi / 4) # Strom am Kondensator
i_R = 10e-3 * sin(w * t - pi / 4) # Strom am Widerstand

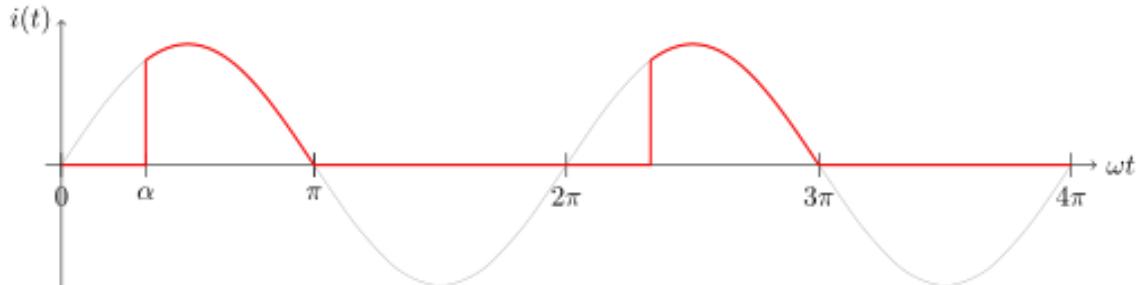
# Plot der Signale
plt.figure()
plt.plot(t, i_0, label='$i_0$')
plt.plot(t, u, label='$u$')
plt.plot(t, i_C, label='$i_C$')
plt.plot(t, i_R, label='$i_R$')
plt.xlabel('Zeit t in s')
plt.ylabel('Strom in i(t) mA und Spannung u(t) in 100 mV')
plt.legend(loc='upper right')
plt.grid()
plt.show()
```

#### 9.3.2.1. Lösung

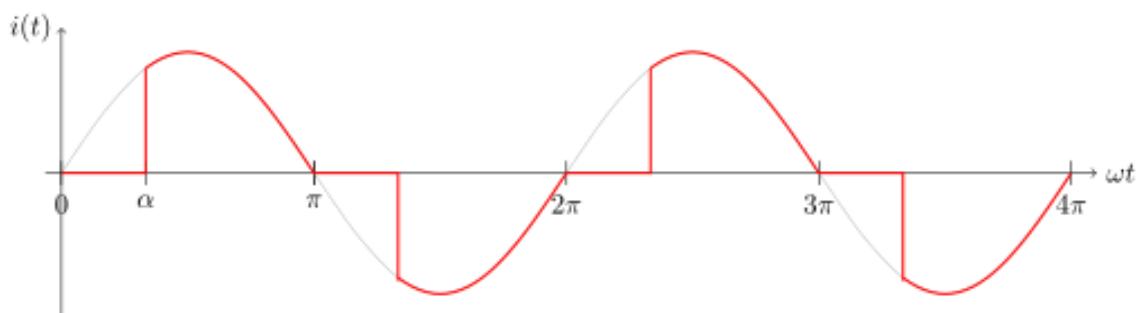
Mit den Werten ergeben sich folgende Spannungs- und Stromverläufe:

- $i_0(t) = 14.1 \text{ mA} \sin(\omega t)$
- $u(t) = 0.5 \text{ V} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$
- $i_C(t) = 10 \text{ mA} \sin(\omega t + \frac{\pi}{4})$
- $i_R(t) = 10 \text{ mA} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$

## 9.4. Phasenanschnittsteuerung



(a) Halbwelle



(b) Vollwelle

Abbildung 9.3.: Phasenanschnittsteuerung

Das Prinzip der Phasenanschnittsteuerung, bei dem gem. Abbildung 9.3a oder Abbildung 9.3b der Stromfluß in einer Halbwelle auf den zeitlichen Bruchteil  $\pi - \alpha$  begrenzt wird, wird z.B. zum Dimmen von Glühlampen und anderen Kleinverbrauchern im Haushalt verwendet. Der Phasenanschnittswinkel  $\alpha$  kann dabei elektronisch mit Thyristoren im Bereich  $0 \leq \alpha \leq \pi$  eingestellt werden.

In den hier zu untersuchenden Fällen (a) und (b) wird ein ohmscher Verbraucher mit  $R = 100 \Omega$  mit Netzzspannung ( $U_{0,eff} = 230 \text{ V}$ ,  $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$ ) und Phasenanschnittsteuerung betrieben.

### 9.4.1. Aufgabe

Berechnen und skizzieren Sie für den durch den Verbraucherwiderstand  $R$  fließenden Strom  $i(t)$  jeweils Mittelwert, Gleichrichtmittelwert und Effektivwert als Funktion vom Phasenanschnittswinkel  $\alpha$ !

### 9.4.1.1. Lösung

#### 1. Halbwelle

$$\overline{i(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = \frac{1}{\omega T} \int_{\alpha}^{\pi} \hat{I} \sin(\varphi) d\varphi \quad (9.27)$$

$$= \frac{\hat{I}}{2\pi} [-\cos(\varphi)]_{\alpha}^{\pi} = \frac{\hat{I}}{2\pi} [1 + \cos(\varphi)] \quad (9.28)$$

$$\overline{|i(t)|} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt = \frac{\hat{I}}{2\pi} [1 + \cos(\varphi)] \quad (9.29)$$

$$I_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{i^2(t)} dt = \frac{1}{\omega T} \int_{\alpha}^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2(\varphi) d\varphi \quad (9.30)$$

$$= \frac{\hat{I}}{2\pi} \left[ \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_{\alpha}^{\pi} = \frac{\hat{I}}{2\pi} \left[ \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} \sin(2\alpha) \right] \quad (9.31)$$

$$I_{eff} = \hat{I} \sqrt{\frac{\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin(2\alpha)}{4\pi}} \quad (9.32)$$

#### 2. Vollwelle

$$\overline{i(t)} = 0 \quad (9.33)$$

$$\overline{|i(t)|} = 2 \cdot \frac{\hat{I}}{2\pi} [1 + \cos(\varphi)] = \frac{\hat{I}}{\pi} [1 + \cos(\varphi)] \quad (9.34)$$

$$I_{eff}^2 = 2 \cdot \frac{\hat{I}}{2\pi} \left[ \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4} \sin(2\alpha) \right] \quad (9.35)$$

$$= \hat{I} \sqrt{\frac{\pi - \alpha + \frac{1}{2} \sin(2\alpha)}{2\pi}} \quad (9.36)$$



**Teil III.**

**Tutorium**



# 10. Einführung

## 10.1. Organisatorisches

Tutor: **B.Eng. Alicia von Ahlen**

Zu meiner Person: Ich habe Elektrotechnik mit der Vertiefungsrichtung Informationstechnik studiert und bin zur Zeit im 1. Semester des Masterprogramms MScEE an der HSB. Ich habe bereits die Tutorien *Grundlagen der Elektrotechnik 1 und 2* durchgeführt.

Das tut ist als Unterstützung zur Vorlesung gedacht und legt den Fokus auf eine Wiederholung der Unterrichtsinhalte und Übungsaufgaben. Es besteht auch die Möglichkeit Fragen zu den Vorlesungsinhalten zu stellen und Wünsche zu äußern, zum Beispiel auf welche Themen besonders Wert gelegt oder speziell wiederholt werden sollen. Zur besseren Vorbereitung meinerseits, bitte ich darum, dass Themenwünsche und wenn möglich auch Fragen, mir im Vorfeld per Email geschickt werden, damit ich genug Zeit habe, diese zu bearbeiten.

## 10.2. Termine

**t.b.d.**

Das GEL2-tut findet montags im ersten Block (08:00 - 09:30 Uhr) statt.

Eine grobe Zeit- und Themenplanung ist in der folgenden Tabelle zu sehen. Dabei kann es durchaus sein, dass sich diese Planung noch etwas ändert.

Datum	Thema
15.04.24	Einführung & Komplexe Zahlen
22.04.24	Periodische Signale
29.04.24	Komplexe Größen der Sinusstromtechnik
06.05.24	Verhalten der Grundzweipole 1
13.05.24	Verhalten der Grundzweipole 2
20.05.24	<b>Pfingstmontag</b>
27.05.24	KWR
03.06.24	Filterschaltungen, Bodediagramm und Ortskurven
10.06.24	Schwingkreise
17.05.24	LTS spice und Python
24.06.24	Transformatoren
01.07.24	Klausurvorbereitung



# 11. Komplexe Zahlen

- imaginäre Einheit
- Aufbau komplexer Zahlen
- Addition
- Subtraktion
- Betrag einer komplexen Zahl
- Polarkoordinaten
- Multiplikation
- Division
- Kehrwert
- Konjugiert-Komplex

## 11.1. Die imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit  $j$  ist definiert als:

$$j^2 = -1$$

Für höhere Potenzen von  $j$  erhält man:

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^4 = 1$$

$$j^5 = j$$

$$j^6 = -1$$

usw.

## 11. Komplexe Zahlen

### 11.2. Aufbau komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen bestehen aus einem Real- und einem Imaginärteil. Sie werden durch einen Unterstrich gekennzeichnet. Ist der Buchstabe nicht unterstrichen, wird von dem Betrag der Komplexen Zahl geredet.

$$\underline{A} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\}$$

In der Elektrotechnik wird zur Kennzeichnung des Imaginärteils oft der Buchstabe  $j$  anstelle des  $i$  verwendet, da das  $i$  für die Bezeichnung des Stromes vorhergesehen ist.

### 11.3. Rechenoperationen

#### 11.3.1. Addition von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  werden addiert, indem ihre Real- und Imaginärteile getrennt voneinander addiert werden.

$$\underline{A} + \underline{B} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + \operatorname{Re}\{\underline{B}\} + j(\operatorname{Im}\{\underline{A}\} + \operatorname{Im}\{\underline{B}\})$$

#### 11.3.2. Subtraktion von komplexen Zahlen

Zwei komplexe Zahlen  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  werden subtrahiert, indem ihre Real- und Imaginärteile getrennt voneinander abgezogen werden.

$$\underline{A} - \underline{B} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} - \operatorname{Re}\{\underline{B}\} + j(\operatorname{Im}\{\underline{A}\} - \operatorname{Im}\{\underline{B}\})$$

#### 11.3.3. Betrag einer komplexen Zahl

Der Betrag einer komplexen Zahl  $\underline{A}$  ist die Euklidische Länge des Vektors, wenn dieser zum Beispiel in einem Koordinatensystem gezeichnet ist. Der Betrag wird als  $|\underline{A}|$  oder vereinfacht als  $A$  geschrieben.

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{\operatorname{Re}\{\underline{A}\}^2 + \operatorname{Im}\{\underline{A}\}^2}$$

### 11.3.4. Phasenwinkel einer komplexen Zahl

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}\{\underline{A}\}}{\operatorname{Re}\{\underline{A}\}} \right)$$

Der Phasenwinkel wird üblicherweise von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  positiv (Zählweise CCW) und von  $180^\circ$  bis  $360^\circ$  negativ (Zählweise CW) angegeben.

### 11.3.5. Eulersche Identität und Polarkoordinaten

Komplexe Zahlen können auch als Polarkoordinaten über die Eulersche Identität beschrieben werden. Dabei setzt sich das aus Betrag und Phasenwinkel zusammen.

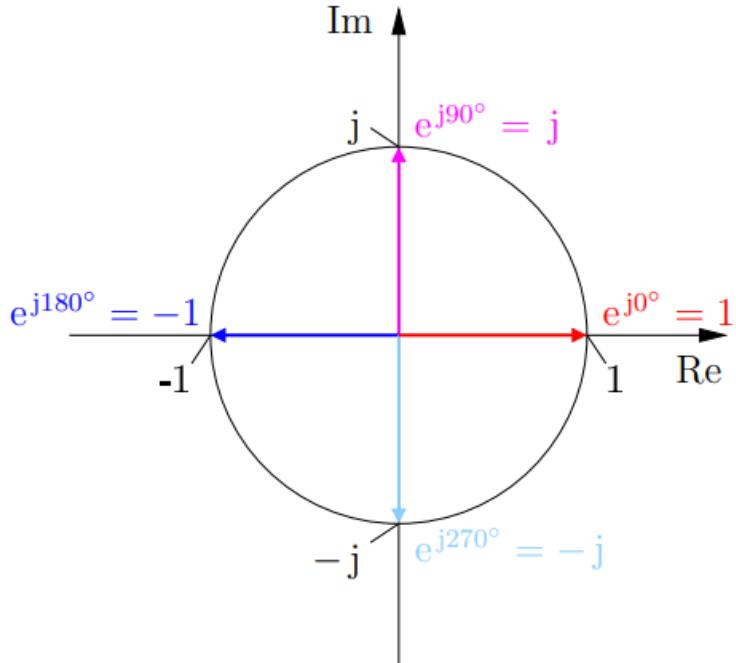
$$\underline{A} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\} = A \cdot e^{j\varphi}$$

#### 11.3.5.1. Eulersche Identität

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)$$

## 11. Komplexe Zahlen

**Eulersche Identität:**  $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$



Die komplexe Zahl  $e^{j\varphi}$  hat immer den Betrag 1 und den Phasenwinkel  $\varphi$ .

Abbildung 11.1.: zeigerbild\_euler

Die komplexe Zahl  $e^{j\varphi}$  hat immer den Betrag 1 und den Phasenwinkel  $\varphi$ .

### 11.3.6. Multiplikation komplexer Zahlen

Die Multiplikation ist über die Polarkoordinaten einfacher. Bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Phasenwinkel addiert.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot B \cdot e^{j(\varphi_A + \varphi_B)}$$

### 11.3.7. Division komplexer Zahlen

Ähnlich zur Multiplikation wird bei der Division die Beträge dividiert und die Phasenwinkel subtrahiert.

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A}{B} \cdot e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}$$

### 11.3.8. Kehrwert einer komplexen Zahl

Beim Kehrwert einer komplexen Zahl wird der Kehrwert des Betrages genommen und das Vorzeichen des Phasenwinkels invertiert.

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{1}{A} \cdot e^{-j\varphi}$$

### 11.3.9. Konjugiert-Komplex

Bei dem konjugiert-komplexen einer Zahl wird das Vorzeichen des Imaginärteils invertiert. Dadurch verändert sich der Betrag nicht, der Phasenwinkel wird allerdings auch invertiert.

$$\underline{A} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\}$$

$$\underline{A}^* = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} - j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\}$$

## 11.4. Übungen

### 11.4.1. Aufgabe 2.1

$$\sqrt{-9} + \sqrt{-x^2} - \sqrt{-y^2} + \sqrt{-25}$$

 Lösung 2.1

$$3\sqrt{-1} + x\sqrt{-1} - y\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1} = j3 + jx - jy + j5 = j(8 + x - y)$$

### 11.4.2. Aufgabe 2.2

a)  $\frac{3j^3 \cdot 5j^4}{6j^{20}}$

b)  $\frac{1}{j^5} + \frac{1}{j^7}$

 Lösung 2.2

a)

$$\frac{-j3 \cdot 5}{6i^4} = \frac{-j15}{6} = -j2,5$$

## 11. Komplexe Zahlen

b)

$$\frac{1}{j} + \frac{1}{-j} = -j + j = 0$$

### 11.4.3. Aufgabe 2.3

- a)  $(1 + 2j) - (-2 + 3j) + (-3 + j) - (5 + 4j) - (-1 + 9j) + (5 - 8j)$   
b)  $(-2a + 3j) - (u - uj) + (-2a - 3j) - (-u - vj)$

#### Lösung 2.3

- a)  $1 - j21$   
b)  $-4a + j(u + v)$

### 11.4.4. Aufgabe 2.4

- a)  $(5 - 2j)(-3 + j)$  (Ergebnis in kartesischer Form)  
b)  $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}j)(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3}j)$  (Ergebnis in kartesischer Form)

#### Lösung 2.4

- a)  $-13 + j11$   
b) 93

### 11.4.5. Aufgabe 2.5

- a)  $\frac{3+4j}{2+j}$   
b)  $\frac{1}{\sqrt{5}-j}$   
c)  $\frac{3j}{1-j}$

#### Lösung 2.5

- a)  $\frac{(3+4j)(2-j)}{(2+j)(2-j)} = \frac{6+8j-3j+4}{4+1} = 2 + j$   
b)  $\frac{1(\sqrt{5}+j)}{(\sqrt{5}-j)(\sqrt{5}+j)} = \frac{\sqrt{5}+j}{5+1} = \frac{\sqrt{5}}{6} + j\frac{1}{6}$

c)  $\frac{3j(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{-3+3j}{1+1} = -\frac{3}{2} + j\frac{3}{2}$

### 11.4.6. Aufgabe 2.6

a)  $\frac{1+j}{1-j} + \frac{1-j}{1+j}$

b)  $\frac{1-j}{1+j} - \frac{1+j}{1-j}$

Lösung 2.6

$$\text{a) } \frac{1+j}{1-j} + \frac{1-j}{1+j} = \frac{(1+j)^2 + (1-j)^2}{(1-j)(1+j)} = \frac{1+2j-1+1-2j-1}{1+1} = 0$$

$$\text{b) } \frac{(1-j)^2 - (1+j)^2}{(1+j)(1-j)} = \frac{1-2j-1-(1+2j-1)}{1+1} = \frac{-4j}{2} = -2j$$

### 11.4.7. Aufgabe 2.7

In die Exponentialform umwandeln:

a)  $0,5 - \sqrt{6}j$

b)  $\sqrt{3} + \sqrt{3}j$

c)  $3 - 2j$

Lösung 2.7

a)  $2,5 \cdot e^{j \cdot 4,914}$

b)  $2,45 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{4}}$

c)  $3,61 \cdot e^{j \cdot 5,695}$

### 11.4.8. Aufgabe 2.8

In die arithmetische Form umwandeln:

a)  $83e^{j \cdot 1,1083}$

b)  $3,8e^{-j \cdot 5,524}$

c)  $e^{0,2+1,2j}$

## 11. Komplexe Zahlen

### Lösung 2.8

- a)  $83(\cos(1, 1083) + j\sin(1, 1083)) = 37,03 + j74,28$
- b)  $3,8(\cos(-5, 524) + j\sin(-5, 524)) = 2,757 + j2,616$
- c)  $e^{0,2}(\cos(1, 2) + j\sin(1, 2)) = 0,443 + j1,138$

## 11.4.9. Aufgabe 2.9

Für  $z_1 = 1,5 - 0,5j$  und  $z_2 = 3 + 0,5j$  die Exponentialform berechnen und die folgende Gleichung in der arithmetischen Form angeben:

$$z = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$$

### Lösung 2.9

$$z_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot e^{-j \cdot 0,322}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{37}}{2} \cdot e^{j \cdot 0,165}$$

$$z_1 + z_2 = 4,5$$

$$\frac{\frac{\sqrt{370}}{4} \cdot e^{j(-0,322+0,165)}}{4,5} = 1,069 \cdot e^{-j0,157} = 1,056 - j0,167$$

## 11.4.10. Aufgabe 2.10

Bringe den folgenden Term in die Darstellung  $\underline{A} = Re\{\underline{A}\} + j \cdot Im\{\underline{A}\}$ :

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

### Lösung 2.10

$$\frac{1}{j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)} = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}$$

**11.4.11. Aufgabe 2.11**

Bringe den folgenden Term in die Darstellung  $\underline{A} = \operatorname{Re}\{\underline{A}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}\}$ :

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

**🔥 Lösung 2.11**

$$\frac{1}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1} = \frac{1 - \omega^2 LC - j\omega RC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{1 - \omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} - j \frac{\omega RC}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}$$



# 12. Periodische Signale

- Stromarten
- Kennwerte von Wechselgrößen

## 12.1. Stromarten

Neben dem Gleichstrom, der ausführlich in GEL1 behandelt wurde, gibt es weitere Stromarten.

Der Wechselstrom kennzeichnet sich durch sein beliebig periodisches Verhalten. Die Richtung und Größe variiert dabei mit der Zeit  $t$ . Eine Sonderform, die große Bedeutung hat ist der Sinusstrom.

Weiterhin gibt es den Mischstrom, der aus einer Überlagerung von Gleichstrom und Wechselstrom entsteht und zum Beispiel durch das Gleichrichten verursacht wird.

Des Weiteren gibt es noch die sogenannten modulierten Ströme. Dort schwanken entweder die Amplitude  $A$ , die Frequenz  $f$  oder der Nullphasenwinkel  $\varphi$  mit der Zeit  $t$ . Solche Signale werden hier nicht weiter behandelt. Diese kommen in dem Modul *Grundlagen der Informationstechnik* vor, welches im 4. Semester in der Vertiefungsrichtung Informationstechnik liegt.

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
plt.axhline(y = 0.75)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Gleichstrom')
plt.grid()
plt.show()

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 5
sinus1 = np.sin(2 * np.pi * f * time)
```

## 12. Periodische Signale

```
sinus2 = np.sin(2 * np.pi * 0.5*f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,sinus1+sinus2)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Wechselstrom')
plt.grid()
plt.show()

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 5
sinus = np.sin(2 * np.pi * f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,sinus)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Sinusstrom')
plt.grid()
plt.show()

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 5
sinus = np.sin(2 * np.pi * f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,sinus+0.5)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('Mischstrom')
plt.grid()
plt.show()
```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1
fs = 1000
time = np.linspace (0, T, T*fs)

f = 20
sinus1 = np.sin(2 * np.pi * f * time)
sinus2 = 0.2 * np.sin(2 * np.pi * 0.1*f * time)
modulated = (1 + 0.5 * np.sin(2 * np.pi * 0.1*f * time)) * np.sin(2 * np.pi * f * time)

plt.figure()
plt.plot(time,modulated)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('amplituden-moduliertes Signal')
plt.grid()
plt.show()

```

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

fs = 2000
fc = 100
fm = 15
beta = 3
t = np.arange(0,0.2,1/fs)

frm = np.cos(2*np.pi*fc*t + beta*np.sin(2*np.pi*fm*t))
m = np.cos(2*np.pi*fm*t)

plt.figure()
plt.plot(t,frm)
plt.xlabel('Zeit in s')
plt.ylabel('Spannung in V')
plt.title('frequenz-moduliertes Signal')
plt.grid()
plt.show()

```

## 12.2. Kennwerte von Wechselgrößen

Allgemein kann man eine sich zeitlich ändernde sinusförmige Wechselgröße mit der folgenden Funktion beschreiben.

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

Dabei wird der Zeitwert  $x$  als auch der Scheitelwert  $\hat{x}$  mit einem kleinen Formelbuchstaben bezeichnet.

### 12.2.1. Periodendauer und Frequenz

Da sich eine sinusförmige Wechselgröße wiederholt sich nach Ablauf des Winkels  $2\pi = 360^\circ = \omega T$ . Damit kann man die Periodendauer  $T$  über die Kreisfrequenz  $\omega$  darstellen.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Die Frequenz  $f$  gibt die Anzahl der Perioden pro Sekunde an und wird in Hz = 1/s gemessen. Die Frequenz ist der Kehrwert der Periodendauer.

$$f = \frac{1}{T}$$

Die Kreisfrequenz ist die Frequenz mit dem Faktor  $2\pi$  erweitert. Sie wird in 1/s und **nicht** in Hz gemessen!

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

### 12.2.2. Phasenlage

Sinusgrößen können zu verschiedenen Zeitpunkten ihre Scheitelwerte und Nulldurchgänge erreichen. Man sagt, dass diese Größen unterschiedliche Phasenlagen haben; sie sind gegeneinander phasenverschoben.

Entn. aus (Fricke und Vaske 1982)

#### 12.2.2.1. Nullphasenwinkel

Allgemein gesprochen beginnt eine Sinusfunktion bei  $t=0$  und geht um den Nullphasenwinkel  $\varphi_x$  früher als die normale Sinusfunktion  $\sin(\omega t)$  durch Null. Das Vorzeichen des Winkel ist sehr wichtig!

Beim positiven Nulldurchgang der Sinusgröße wird ein Pfeil zum Nullpunkt gezeichnet. Ist der Pfeil in Zählrichtung der Zeitachse ist der Nullphasenwinkel positiv, ist der Pfeil entgegen der Zählrichtung der Zeitachse, dann ist er negativ (siehe Bild unter Phasenlage).

## 3.1.1 Kennwerte von Wechselgrößen 191

**3.3**  
**Sinusstrom**  $i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_I)$   
**und Sinusspannung**  $u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_U)$   
 $\varphi$  Phasenwinkel

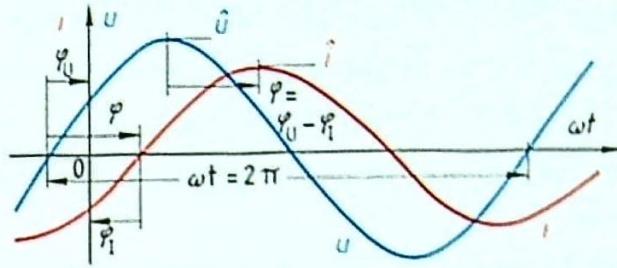


Abbildung 12.1.

**12.2.2.2. Phasenwinkel**

Zusätzlich zum Nullphasewinkel gibt es den Phasenwinkel. Dieser gibt die Phasenverschiebung zwischen zwei Sinussignalen an. Es ist festgelegt, dass der Strom in solchen Fällen als Bezugsgröße genommen wird.

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I$$

Beispiel:

$$\varphi_I = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$$

$$\varphi_U = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

$$\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \left(\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 30^\circ - (-60^\circ) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Die Spannung eilt dem Strom um  $\varphi = 90^\circ$  vor.

**12.2.3. Mittelwert**

Der Mittelwert ist der zeitlich durchschnittliche Wert einer Funktion.

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$$

Bei reinem Wechselstrom ist der Mittelwert 0.

## 12. Periodische Signale

### 12.2.4. Gleichrichtwert

Der Gleichrichtwert ist der Mittelwert einer gleichgerichteten Größe.

$$\overline{|x(t)|} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)| dt$$

Verhältnis von Gleichricht- zu Scheitelwert (bei Sinusgrößen):  $\frac{\overline{|i|}}{\hat{i}} = 0.6366$

### 12.2.5. Effektivwert

Der Effektivwert einer periodischen Spannung (oder eines periodischen Stroms) entspricht dem Wert einer Gleichspannung (eines Gleichstroms), der in einer ohmschen Last dieselbe Leistung umsetzt.

$$X = X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^2(t) dt}$$

#### Scheitelfaktor

Der Scheitelfaktor ist das Verhältnis von Scheitelwert  $\hat{i}$  bzw.  $\hat{u}$  zum Effektivwert I bzw. U.

$$\xi = \frac{\hat{x}}{X_{eff}}$$

Der Scheitelfaktor für Sinusgrößen beträgt  $\xi = \sqrt{2} = 1.414$ .

Der Scheitelfaktor für Dreieckspannung beträgt  $\xi = \sqrt{3}$ .

Der Scheitelfaktor für Rechtecksignale beträgt  $\xi = 1$ .

#### Formfaktor

Der Formfaktor stellt das Verhältnis von Effektivwert I bzw. U zu Gleichrichtwert  $\overline{|i|}$  bzw.  $\overline{|u|}$  dar.

$$F = \frac{X_{eff}}{\overline{|x|}}$$

Der Formfaktor für Sinusgrößen beträgt  $F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$ .

Der Formfaktor für Dreiecksignale beträgt  $F = \frac{1.11}{2}$ .

Der Formfaktor für Rechtecksignale beträgt  $F = 1.11$ .

### 12.2.6. Effektivwert mit Gleichstromanteil

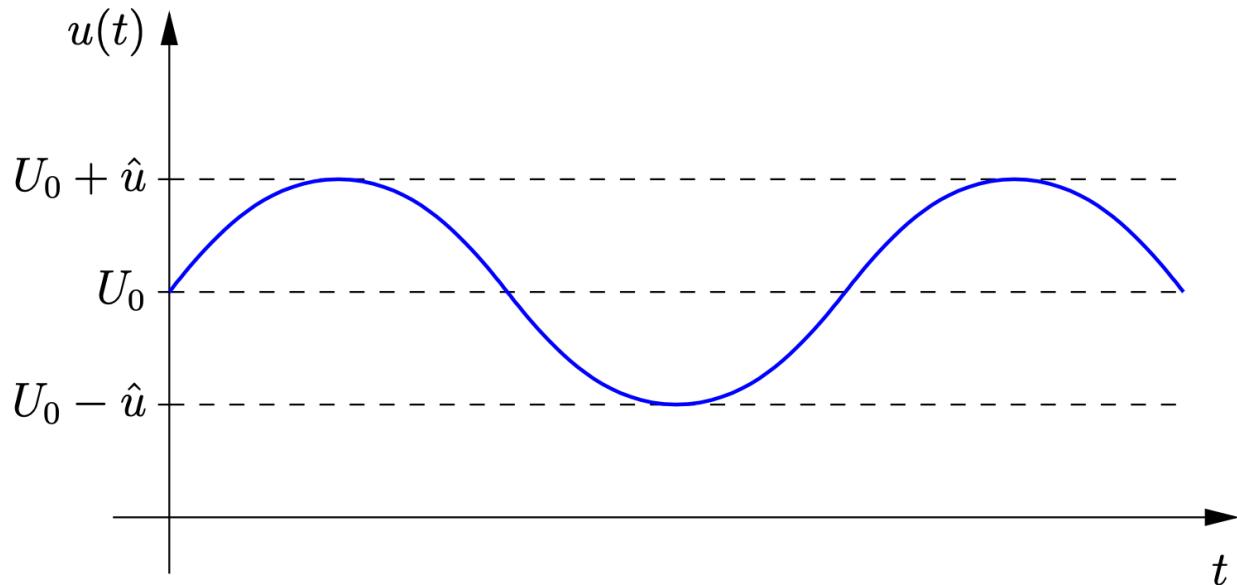


Abbildung 12.2.

Entn. aus (Schenke 2023)

$$X_{eff} = \sqrt{X_o^2 + X_{eff\sim}^2}$$

## 12.3. Übungen

### 12.3.1. Aufgabe Gleichrichtwert

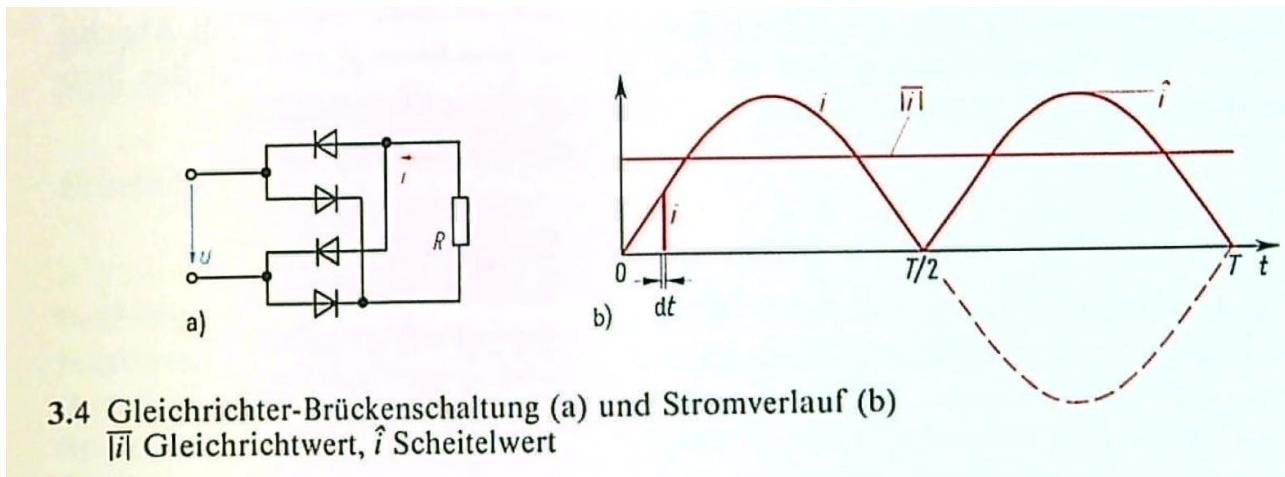
Ein Sinusstrom mit dem Scheitelwert  $\hat{i} = 10A$  fließt durch die Gleichrichterschaltung-Brückenschaltung von Bild 3.4.

Entn. aus (Fricke und Vaske 1982)

Welche Elektrizitätsmenge  $Q$  wird während der Zeit  $t = 2 h$  befördert?Tipp:  $Q = i \cdot t$ 
🔥 Lösung

$$\overline{|i|} = 0.6366 \hat{i} = 0.6366 \cdot 10A = 6.366A$$

## 12. Periodische Signale



3.4 Gleichrichter-Brückenschaltung (a) und Stromverlauf (b)  
 $\overline{|i|}$  Gleichrichtwert,  $\hat{i}$  Scheitelwert

Abbildung 12.3.

$$Q = \overline{|i|}t = 6.366A \cdot 2h = 12.73Ah$$

### 12.3.2. Aufgabe Zeitfunktion berechnen

Die übliche Netzspannung 1982 betrug  $U = 220V$  bei der Netzfrequenz  $f = 50Hz$ . Es sind der Gleichrichtwert  $\overline{|u|}$  und die Zeitfunktion  $u$  dieser Spannung zu bestimmen.

#### Lösung

Netzspannung ist Sinusförmig  $\rightarrow$  Formfaktor  $F = 1.111$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{U}{F} = \frac{220V}{1.111} = 198V$$

Zeitfunktion:

Scheitelwert:

$$\hat{u} = \sqrt{2}U = \sqrt{2} \cdot 220V = 311.1V$$

Kreisfrequenz:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 50Hz = 314.2 \frac{1}{s}$$

$$u = \hat{u} \sin(\omega t) = 311.1V \cdot \sin(314.21/s)$$

### 12.3.3. Aufgabe Mittelwerte aus Zeitverlauf bestimmen

4. In den Abbildungen a bis d sind periodische, zeitabhängige Spannungen mit dem Spitzenwert  $\hat{u} = 10V$  und der Periodendauer  $T$  gegeben. Berechnen Sie jeweils den Mittelwert, den Gleichrichtwert sowie den Effektivwert für die Spannungsverläufe.

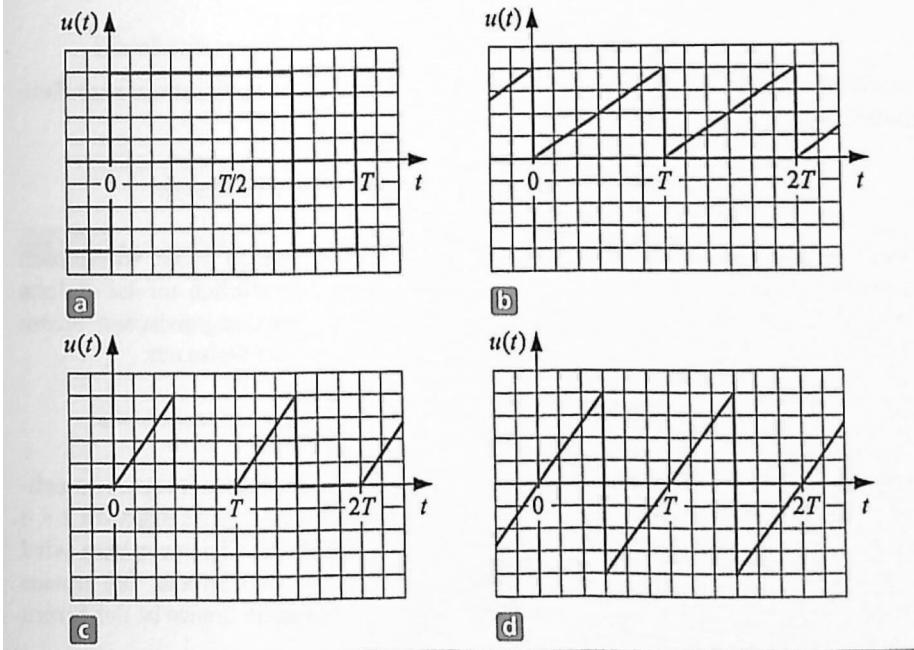


Abbildung 12.4.

Entn. aus (Albach und Fischer 2020)

#### 🔥 Lösung 3.3

a) Mittelwert:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \left[ \hat{u} \frac{3T}{4} - \hat{u} \frac{T}{4} \right] = \frac{\hat{u}}{2} = 5V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt = \frac{1}{T} \left[ \hat{u} \frac{3T}{4} + |-\hat{u}| \frac{T}{4} \right] = \hat{u} = 10V$$

Effektivwert:

## 12. Periodische Signale

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \left[ \hat{u}^2 \frac{3T}{4} + (-\hat{u}^2) \frac{T}{4} \right]} = \hat{u} = 10V$$

b) Mittelwert:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{u} \frac{t}{T} dt = \frac{\hat{u}}{T^2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^T = \frac{\hat{u}}{2} = 5V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = |u| = 5V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \left( \hat{u} \frac{t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{T^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^T} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{3}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = 5.77V$$

c) Mittelwert:

$$\bar{u} = \frac{\hat{u}}{4} = 2.5V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \bar{u} = 2.5V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left( 2\hat{u} \frac{t}{T} \right)^2 dt} = \sqrt{\frac{4\hat{u}^2}{T^3} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{T/2}} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{6}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{6}} = 4.08V$$

d) Mittelwert:

$$\bar{u} = 0V$$

Gleichrichtwert:

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T} \left[ \hat{u} \frac{T}{4} + \hat{u} \frac{T}{4} \right] = \frac{\hat{u}}{2} = 5V$$

Effektivwert:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(2\hat{u}\frac{t}{T}\right)^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T \left(2\hat{u}\frac{t-T}{T}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{u}^2}{6} + \frac{\hat{u}^2}{6}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = 5.77V$$

### 12.3.4. Aufgabe 3.4

Ein Wechselstrom besteht nach der Abbildung aus "angeschnittenen" Sinushalbschwingungen. In den Bereichen  $0 < \omega t < \alpha$  und  $\pi < \omega t < (\pi + \alpha)$  fließt kein Strom ( $i = 0$ ), wobei  $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$  sei. In der übrigen Zeit (innerhalb des Bereiches  $0 < \omega t < 2\pi$ ) wird der Stromverlauf durch die Gleichung  $i = \hat{i} \sin(\omega t)$  wie- dergegeben. Hierbei betrage der Scheitelwert des Stromes  $\hat{i} = 10A$ .

Wie groß ist der Effektivwert  $I$  des Stromes?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

omega_t = np.arange(0, 2*np.pi, np.pi/(2**6))
i = 10 * np.sin(omega_t)

alpha = np.pi/4

for a in range(len(i)):
    if omega_t[a] < alpha or (omega_t[a] > np.pi and omega_t[a] < np.pi+alpha):
        i[a] = 0

list_ticks = [None]*128
list_ticks[0] = '0'
list_ticks[63] = '$\pi$'
list_ticks[127] = '2$\pi$'

plt.figure()
plt.plot(omega_t, i)
plt.xlabel('$\omega t$')
plt.ylabel('i')
# plt.xticks([0, 63, 127], ['0', '$\pi$', '2$\pi$'])
plt.xticks(omega_t, list_ticks)
plt.grid(True)
```

## 12. Periodische Signale

### Lösung

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\omega t}$$

$$\int_0^{2\pi} i^2 d\omega t = 2 \int_0^\pi i^2 d\omega t = 2 \int_0^\pi \hat{i}^2 \cdot \sin^2(\omega t) d\omega t$$

$$2 \int_0^\pi \hat{i}^2 \cdot \sin^2(\omega t) d\omega t = 2\hat{i}^2 \left( \frac{1}{2}\omega t - \frac{1}{4}\sin(2\omega t) \right) \Big|_{\alpha}^{\pi} = \hat{i}^2 \left( \pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \right)$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} i^2 d\omega t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \hat{i}^2 \left( \pi - \alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha) \right)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot (10A)^2 \cdot \left( \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ) \right)} = 6.74A$$

### 12.3.5. Aufgabe 3.5

An einem ohmschen Widerstand  $R = 30\Omega$  liegt eine mittelwertfreie Dreiecksspannung mit der Amplitude  $\hat{u} = 9V$  und der Frequenz  $f = 100Hz$  an.

Welche Wirkleistung  $P$  wird im zeitlichen Mittel im Widerstand  $R$  umgesetzt?

### Lösung

Dreiecksspannung  $\rightarrow$  Scheitelfaktor  $\xi = \sqrt{3}$

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = \frac{9V}{\sqrt{3}} = 5.196V$$

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{5.196V}{30\Omega} = 0.9W$$

### 12.3.6. Aufgabe 3.6

An einem ohmschen Widerstand  $R$  liegt eine Zäpezahnspannung, die von einer Gleichspannung überlagert ist, an:

Entn. aus (Schenke 2023)

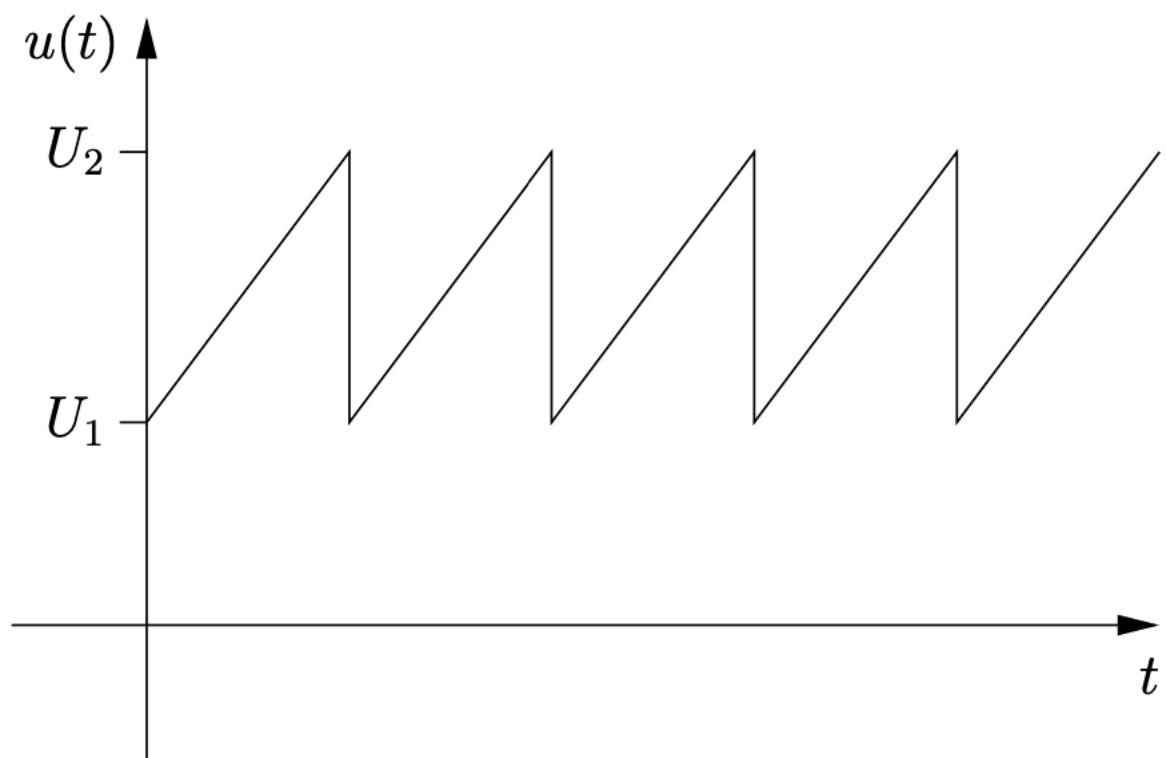


Abbildung 12.5.

## 12. Periodische Signale

- Bestimmen Sie den Mittelwert  $\overline{u(t)}$  des periodischen Spannungsverlaufes  $u(t)$ .
- Berechnen Sie den Effektivwert  $U$  des periodischen Spannungsverlaufes  $u(t)$ .
- Welche Wirkleistung  $P$  wird im zeitlichen Mittel im Widerstand  $R$  umgesetzt? (23.4)

### Lösung

a)

$$\overline{u(t)} = \frac{U_1 + U_2}{2}$$

b)

$$U = \sqrt{\left(\frac{U_2 - U_1}{2 \cdot \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)^2}$$

c)

$$P = \frac{U^2}{R}$$

### 12.3.7. Aufgabe 3.7

Durch den ohmschen Widerstand  $R$  fließt ein Sinusstrom, der mit einem Gleichstrom überlagert ist:

Entn. aus (Schenke 2023)

- Bestimmen Sie den Mittelwert  $\overline{i(t)}$  des periodischen Stromverlaufes  $i(t)$ .
- Berechnen Sie den Effektivwert  $I$  des periodischen Stromverlaufes  $i(t)$ .
- Welche Wirkleistung  $P$  wird im zeitlichen Mittel im Widerstand  $R$  umgesetzt? (23.6)

### Lösung

a)

$$\overline{i(t)} = I_0$$

b)

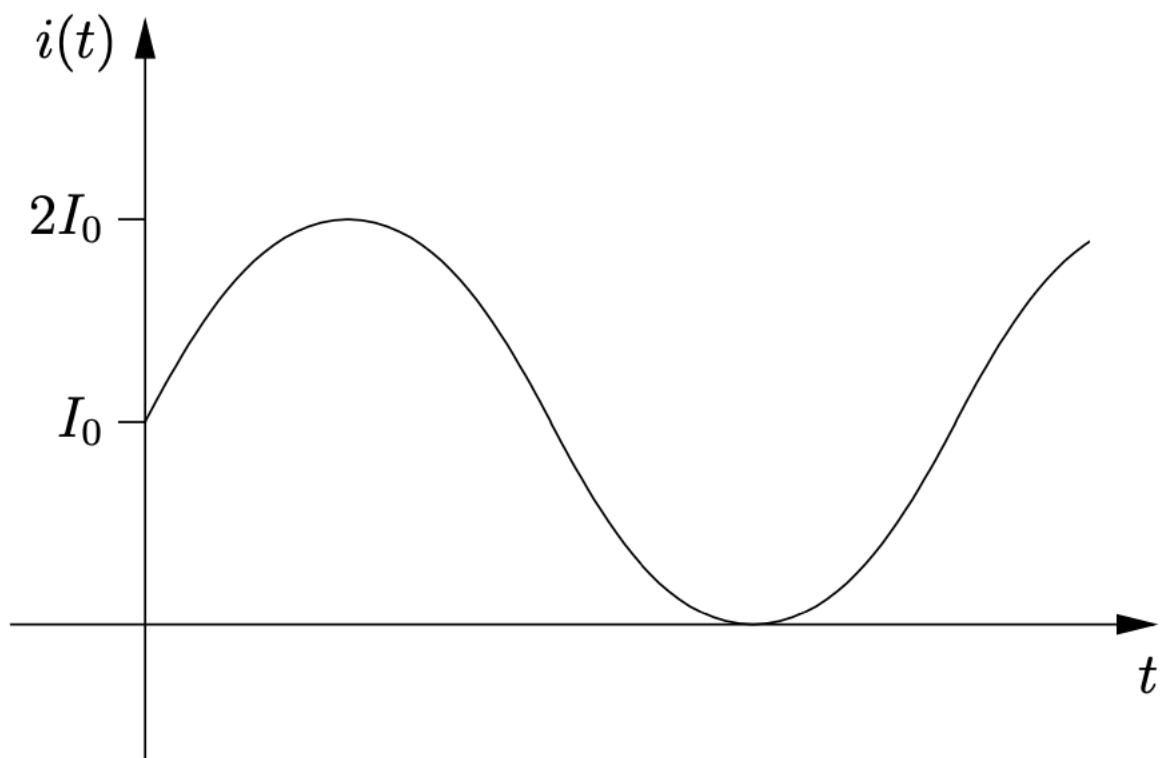


Abbildung 12.6.

## 12. Periodische Signale

c)

$$I = \sqrt{I_0^2 + \left(\frac{I_0}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$P = I^2 \cdot R$$

# Bibliography

- Albach, Manfred, und Janina Fischer. 2020. *Elektrotechnik Aufgabensammlung*. Pearson. <https://elibrary.pearson.de/book/99.150005/9783863268930>.
- Büttner, Wolf-Ewald. 2014. *Grundlagen der Elektrotechnik* 2. OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG. <https://doi.org/10.1524/9783110371796>.
- Deliyannis, T., Yichuang Sun, und J. K. Fidler. 1998. *Continuous-Time Active Filter Design*. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781439821879>.
- Fricke, H., und P. Vaske. 1982. *Elektrische Netzwerke Grundlagen der Elektrotechnik* 1. 17. Aufl. Stuttgart, Germany: B.G. Teubner.
- Harriehausen, Thomas, und Dieter Schwarzenau. 2020. *Moeller Grundlagen der Elektrotechnik*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-27840-3>.
- Hewlett, W. R. 1942. „Variable Frequency Oscillation Generator“. U.S. Patent Office No. 2,268,872. <https://de.wikipedia.org/wiki/Wien-Robinson-Brücke>.
- Kasper, Manfred. 2000. *Mikrosystementwurf*. Berlin, Germany: Springer.
- Marinescu, Marlene, und Nicolae Marinescu. 2016. *Elektrotechnik für Studium und Praxis*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-14159-2>.
- Mietke, Detlef. 2024. „Elektroniktutor“. Techreport. Oberstufenzentrum für Kommunikations-, Informations- und Medientechnik (OSZ-KIM), Berlin; online. <https://www.elektroniktutor.de>.
- Natt, Oliver. 2020. *Physik mit Python*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61274-3>.
- Paul, Steffen, und Reinhold Paul. 2019. *Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik* 2. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-58221-3>.
- Reisch, Michael. 2007. *Elektronische Bauelemente: Funktion, Grundschaltungen, Modellierung mit SPICE*. 2. Aufl. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34015-7>.
- Schenke, Stefan. 2023. „Grundlagen der Elektrotechnik — Jetzt schaffst Du die Prüfung!“ Helmut-Schmidt Universität Hamburg, Germany; online. <http://www.stefan-schenke.de/get/>.
- Wicht, Bernhard. 2024. *Design of Power Management Integrated Circuits*. Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781119123095>.
- Wikipedia. 2019. „Wien-Robinson-Brücke — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Wien-Robinson-Brücke&oldid=194933790>.
- . 2021. „Bode-Diagramm — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bode-Diagramm&oldid=215892781>.
- . 2023. „Ortskurve (Systemtheorie) — Wikipedia, die freie Enzyklopädie“. [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ortskurve\\_\(Systemtheorie\)&oldid=237346128](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Ortskurve_(Systemtheorie)&oldid=237346128).
- Zach, Franz. 2022. *Leistungselektronik: Ein Handbuch Band 1 / Band 2*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-31436-1>.

