Софийски университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика (ФМИ)

ДОКЛАД

по Приложения на математиката за моделиране на реални процеси

От Галина Стоянова Люцканова
студент от бакалавърска програма „Приложна математика“,
фак. номер 31256

София, 2014

Ще моделираме токът, който протича по аксона на един неврон. Първо ще въведем следните означения:

1. $i(x,t)$ е токът, който протича по аксона през точка с координата x в момента t (мери се в ампери).

2. $j(x,t)$ е токът, който протича през мембраната на аксона през точка с координата x в момента t.

3. $V(x,t)$ е напрежението в точка с координата x в момента t.

4. a е радиуса на цилиндричния аксон, $S_{\text{кръг}}$ е лицето на кръг с радиус a ($S_{\text{кръг}} = \pi a^2$), а $C_{\text{окр}}$ е обиколката на окръжност с радиус $a(C_{\text{окр}} = 2\pi a)$

5. r е напрежението за единица дължина на аксона, което обикновено се мери в омове за сантиметър. Ако аксонът е с цилиндрична форма, то тогава

   $$r = \frac{\rho}{S_{\text{кръг}}} = \frac{\rho}{\pi a^2},$$

   където ρ е специфичното съпротивление на цитоплазмата в омове за сантиметър.

6. c е капацитетът на мембраната за единица дължина на аксона (мери се във фаради за сантиметър). За цилиндрична нишка се получава:

   $$c = C_{\text{окр}} C = 2\pi a C,$$

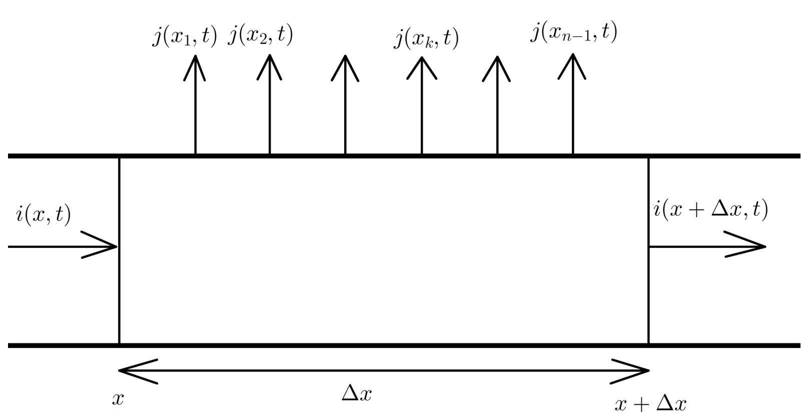
   където C е капицитетът на единица площ (фаради на квадратен сантиметър).

7. j_{ion} е токът, преминаващ през мембраната (от вътре на вън) за единица дължина на аксона и се мери в ампери за сантиметър. За цилиндричен аксон с радиус a:

   $$j_{ion} = C_{\text{окр}} J_{ion} = 2\pi a C,$$

   където J_{ion} е токът през мембраната за единица площ.

След като въведохме необходимите ни означения, ще започнем моделирането на процеса:



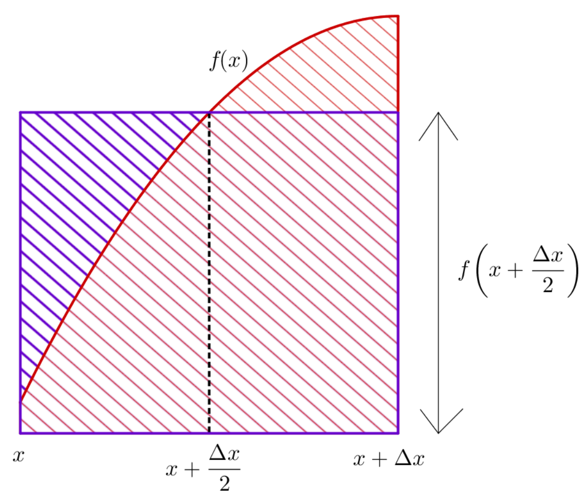
От закона за запазване на тока ($I_{\text{входящ}} = I_{\text{изходящ}}$) имаме, че:

$$i(x,t) = \sum_{i=0}^{n} j(x_i,t)\Delta x_i + i(x+\Delta x, t),$$

където $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ са точки, през които протича ток през мембраната ($x = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = x + \Delta x$ в интервала $[x, x+\Delta x]$). Сумата $\sum\limits_{i=0}^{n} j(x_i,t)\Delta x_i$ е Риманова сума следователно когато диаметърът на разбиването $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ клони към 0(което е вярно, защото ензимите са много близко) $\sum\limits_{i=0}^{n} j(x_i,t)\Delta x_i = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} j(x,t)dx$. И така получаваме:

$$\begin{aligned} i(x,t) &= \int\limits_{x}^{x+\Delta x} j(x,t)dx + i(x+\Delta x,t) \\ \int\limits_{x}^{x+\Delta x} j(x,t)dx &= -i(x+\Delta x,t) + i(x,t) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Ще пресметнем приближено $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} j(x,t)dx$ по формулата на средните правоъгълниците. За тези, които не го знаят, ще го разясня на кратко. Първо да разгледаме да разгледаме следното изображение:



и да си припомним, че всъщност определен интеграл съответства на лицето, заключено между графиката на $f(x)$ и абцисната ос (от x до $x + \Delta x$), което в нашия случай е оцветено в червено. Взимаме точка, която е средата на интервала $[x, x + \Delta x]$, и приближаваме червеното лице с лицето на правоъгълника (в лилаво) т.е.

$$f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)(x+\Delta x - x) = f\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta x.$$

Така в нашия случай получаваме:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} j(x,t)dx \approx j\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)\Delta x$$

Заместваме приближението на $\int_{x}^{x+\Delta x} j(x,t)dx$ в уравнение ($\star$):

$$\begin{aligned} j\left(x+\tfrac{\Delta x}{2},t\right)\Delta x &\approx -i(x+\Delta x,t)+i(x,t) \\ j\left(x+\tfrac{\Delta x}{2},t\right) &\approx -\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Пускаме Δx да клони към 0 (т.е. взимаме много малка част от аксона) и получаваме:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0} j\left(x+\tfrac{\Delta x}{2},t\right) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{i(x+\Delta x,t)-i(x,t)}{\Delta x} \\ j\left(x,t\right) &= -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \end{aligned}$$

От закона на Ом ($V=RI$) следва:

$$V(x,t)-V(x+\Delta x,t)=R\int_{x}^{x+\Delta x} i(x,t)dx = r\Delta x\int_{x}^{x+\Delta x} i(x,t)dx$$

Отново приближаваме интеграла по правилото на центрираните правоъгълници и получаваме:

$$V(x,t)-V(x+\Delta x,t)=i\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)r\Delta x$$

Делем двете страни на уравнението на Δx

$$-\frac{V(x+\Delta x,t)-V(x,t)}{\Delta x}=i\left(x+\frac{\Delta x}{2},t\right)r$$

Пускаме Δx да клони към 0:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}=i\left(x,t\right)r$$

Получаваме системата:

$$\left|\begin{aligned} \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -j\left(x,t\right) \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= i\left(x,t\right)r \end{aligned}\right.$$

От второто уравнение изразяваме $i(x,t) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}$ и го заместваме в първото:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -j\left(x,t\right) \\
\frac{\partial\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} &= -j\left(x,t\right) \\
\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= j\left(x,t\right)
\end{aligned}$$

Токът $j(x,t)$, преминаващ през мембраната, се дели на 3 вида ток - капацитивен, дифузионен и кондуктивен ток. Нека да означим с j_{ion} дифузионният и кондуктивният ток, а с j_{cap} - капацитивния ток, тогава:

$$j(x,t) = j_{ion}(x,t) + j_{cap}(x,t) = j_{ion}(x,t) + c\frac{dV}{dt}$$

Остава да заместим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = j\left(x,t\right) = j_{ion}(x,t) + c\frac{dV}{dt}$$

Да преобразуваме полученото уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= j_{ion}(x,t) + c\frac{dV}{dt} \\
\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - c\frac{dV}{dt} &= j_{ion}(x,t) \\
\frac{1}{rc}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{dV}{dt} &= \frac{j_{ion}(x,t)}{c}
\end{aligned}$$

Знаем, че:

$$j_{ion} = 2\pi a J_{ion} = 2\pi a(J_{Na} + J_K + J_L),$$

където I_{Na} е натриевият ток през мембраната за единица площ, I_K е каливият ток през мембраната за единица площ, а I_L е токът, който не сме успели да измерим, т.е. ток, който се дължи на Ca^{++}, K^+ и т.н.. Експериментално е изведено, че:

$$I_{Na} = G_{Na}m^3h(V - V_{Na})$$

$$I_K = G_K n(V - V_K)$$

$$I_L = G_L(V - V_L)$$

където
$G_{Na}(G_K)$ е максималната пропускливост на натрия(калия) за единица площ

V_{Na} (V_K) е напрежението, при което сумата на кондуктивния и дифузионния ток на натрия (калия) е 0.
V_L е такова напрежение, при което $j_{ion} = 0$, когато $V = 0$ (няма емпрична основа за него)
m е променливата, която отговаря за отварянето на натриевите каналчета
h е променливата, която отговаря за затварянето на натриевите каналчета
n е променливата, която отговаря за отварянето на калиевите каналчета, като стойностите на m, n и h са в интервала $[0, 1]$.

Така получаваме, че:

$$j_{ion} = 2\pi a(G_{Na}m^3h(V - V_{Na}) + G_K n(V - V_K) + G_L(V - V_L)),$$

където a, G_{Na}, G_K, G_L,V_{Na}, V_K и V_L са известни константи. Сега остава да запишем диференциални уравнения за m, n и h:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m}{\partial t} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\
\frac{\partial n}{\partial t} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)m
\end{aligned}$$

където

$$\begin{aligned}
&\alpha_m(V) = \frac{0.1(25 - V)}{e^{\frac{25-V}{10}} - 1} \\
&\beta_m(V) = 4e^{-\frac{V}{18}} \\
&\alpha_h(V) = 0.07e^{-\frac{V}{20}} \\
&\beta_h(V) = \frac{1}{e^{\frac{30-V}{10}} + 1} \\
&\alpha_n(V) = \frac{0.01(10 - V)}{e^{\frac{10-V}{10}} - 1} \\
&\beta_n(V) = 0.125e^{-\frac{V}{80}}
\end{aligned}$$

и всички тези функции са при температура $6,3°C$. Резултатите при всички други температури се получават като умножим функциите с:

$$k = 3^{\frac{temp-6,3}{10}},$$

където $temp$ е разбира се температурата в градуси по Целзий. Понеже искаме да намерим стационарното състояние на оду, както и скоростта, с която се стремят към него, то ще преработим уравнението за m (за n и h се получава аналогично):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m}{\partial t} &= \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m \\
\frac{\partial m}{\partial t} &= \alpha_m(V) - (\alpha_m(V) + \beta_m(V))m \\
\frac{\partial m}{\partial t} &= -(\alpha_m(V) + \beta_m(V))m - \alpha_m(V)) \\
\frac{\partial m}{\partial t} &= -\frac{\frac{1}{(\alpha_m(V)+\beta_m(V)}}{\frac{1}{(\alpha_m(V)+\beta_m(V)}}((\alpha_m(V) + \beta_m(V))m - \alpha_m(V)) \\
\frac{\partial m}{\partial t} &= -\frac{m - \frac{\alpha_m(V)}{(\alpha_m(V)+\beta_m(V)}}{\frac{1}{(\alpha_m(V)+\beta_m(V)}}
\end{aligned}$$

Означаваме $m_0(V) = \frac{\alpha_m(V)}{(\alpha_m(V)+\beta_m(V)}$ и $\tau_m = \frac{1}{(\alpha_m(V)+\beta_m(V)}$ и получаваме:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{m - m_0}{\tau_m(V)}$$

Но каква беше целта на това цялото преобразуване? Много проста. $m(x,t)$ се стреми да достигне стационарното си положение $m_0(V)$ със скорост $\tau_m(V)$. За да решим системата:

$$\left|\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{1}{rc}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c} j_{ion}(m,n,h),\ 0 < x < L,\ 0 < t < T \\
\frac{\partial m}{\partial t} &= \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m \\
\frac{\partial n}{\partial t} &= \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h
\end{aligned}\right.$$

са ни необходими определен брой начални и гранични условия:

1. едно начално условие за чду - $V|_{t=0} = \varphi(x)$, където $\varphi(x)$ е началното състояние в момент $t = 0$.
2. две гранични условия за чду - $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ и $V|_{x=L} = 0$(напрежението в десния край на аксона винаги 0).
3. по едно начално условие за трите частни диференциални уравнения
   В началото преди да е протекъл какъвто и да е ток системата се намира в своето стационарно състояние $m_0(V)$ при това $V = 0$, защото още не е протекъл импулса. Аналогично за n и h.

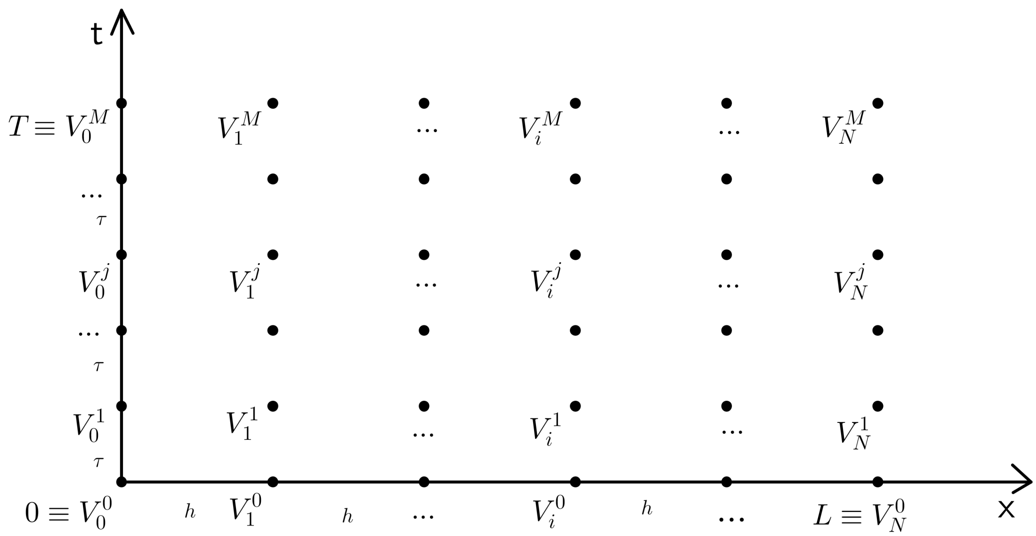
Така достигаме до системата:

$$\left|\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial V}{\partial t} & = & \dfrac{1}{rc}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c} j_{ion}(m,n,h),\ 0 < x < L,\ 0 < t < T \\
V\big|_{t=0} & = & \varphi(x) \\
\dfrac{\partial V}{\partial x}\Big|_{x=0} & = & 0 \\
V\big|_{x=L} & = & 0 \\
\dfrac{\partial m}{\partial t} & = & \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m \\
m(0) & = & m_0(0) \\
\dfrac{\partial n}{\partial t} & = & \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n \\
n(0) & = & n_0(0) \\
\dfrac{\partial h}{\partial t} & = & \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)m \\
h(0) & = & h_0(0)
\end{array}\right.$$

Тази система от четири частни диференциални уравнения не може да се реши в явен вид (т.е. не могат да се получат функции, които са решения на системата), но може да се реши числено (т.е. за много на брой стойности на x и t да получим стойности на m, n, h и V, след което можем да нарисуваме приблизително графиките на функциите). За целта въвеждаме мрежа $\overline{\omega}_{h,\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, където:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\omega}_h & = & \{x_i = ih, i = 0, 1, \cdots N, h = \frac{1}{N}\} \\
\overline{\omega}_\tau & = & \{\tau_j = j\tau, j = 0, 1, \cdots M, \tau = \frac{1}{M}\}
\end{array}$$

т.е. въвеждаме мрежа за V, m, n и h, като примерно за V мрежата изглежда така:



където $V_i^j \equiv V(x_i, t_j)$ (означението V_i^j е стандартно означение. Въобще f_i^j означава $f(x_i, t_j)$).
Преди да решим числено системата трябва обаче да изведем някой формули. За целта трябва да си припомниш формулата на Тейлър: Нека функцията $f(x)$ има непрекъснати производни до ред $n+1$ в околност на точката a т.е $(a-\delta, a+\delta)$. Тогава за $x \in (a-\delta, a+\delta)$ е в сила представянето:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

където ξ е някаква точка от интервала с краища x и a.
Нека $x = a + h$ тогава във формулата на Тейлър получаваме:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

Аналогично ако $x = a - h$, то тогава формулата на Тейлър е:

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{(-1)^n f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{(-1)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

Сега да изведем няколко формули

1. $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} = f'(x_i) + O(h)$

Доказателство:
Да припомним, че $x_{i+1} = x_i + h$

$$\begin{aligned}\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} = \frac{f(x_i) + f'(x_i)h + O(h^2) - f(x_i)}{h} = \\ &= \frac{f'(x_i)h + O(h^2)}{h} = f'(x_i) + O(h)\end{aligned}$$

2. $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = f'(x_i) + O(h^2)$

Доказателство:
Да припомним, че $x_{i+1} = x_i + h$ и $x_{i-1} = x_i - h$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} &= \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} = \frac{f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + O(h^3)}{2h} - \\
&- \frac{f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + O(h^3)}{2h} = \frac{f'(x_i)2h + O(h^3)}{2h} = \\
&= f'(x_i) + O(h^2)
\end{aligned}$$

3. $\dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} = f''(x_i) + O(h^2)$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} = \frac{f(x_i + h) - 2f(x_i) + f(x_i - h)}{h^2} = \frac{f(x_i) + f'(x_i)h +}{h^2} \\
+ &\frac{\frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + O(h^4) - 2f(x_i) + f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + O(h^4)}{h^2} = \\
= &\frac{f''(x_i) + O(h^4)}{h^2} = f''(x_i) + O(h^2)
\end{aligned}$$

След като доказахме тези формули да се върнем обратно към нашата система и ще започнем едно по едно да преобразуваме уравненията:

1. Ще започнем с първото уравнение от системата т.е:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{rc}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c}j_{ion}(m, n, h),\ 0 < x < L,\ 0 < t < T$$

   Лявата страна апроксимираме по формулата 1, а дясната по формула 3:

$$\begin{aligned}
\frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} &\approx \frac{1}{rc}\frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2} - \frac{1}{c}j_{ion}(m_i^j, n_i^j, h_i^j)\ \ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{0, M-1} \\
V_i^{j+1} &\approx V_i^j + \frac{\tau}{rc}\frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h^2} - \frac{\tau}{c}j_{ion}(m_i^j, n_i^j, h_i^j)
\end{aligned}$$

   Грешката е от порядъка на $O(h^2 + \tau)$.

2. Следващото уравнение, което ще разгледаме, е второто:

$$V|_{t=0} = \varphi(x)$$

   Да напомня, че $\varphi(x)$ е дадена функция. Това уравнение се превръща в:

$$V_i^0 = \varphi(x_i),\ \ i = \overline{0, N}$$

   Тук нямаме грешка.

3. Следващото уравние, което ще разгледаме, е третото:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

Ще го апроксимираме с втората формула $\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} = f'(x_i) + O(h^2) \right)$.
Като за целта трябва да въведем точки от вида V_{-1}^j т.е. получаваме:

$$\begin{aligned} \frac{V_1^j - V_{-1}^j}{2h} + O(h^2) = 0, \quad j = \overline{0, M} \\ V_{-1}^j = V_1^j \quad j = \overline{0, M} \end{aligned}$$

и грешката е от поряръка на $O(h^2)$. Сега понеже сме въвели нови възли, то тогава първото уравнение е изпълнено и за $i = 0$ т.е.

$$\begin{aligned} V_0^{j+1} &\approx V_0^j + \frac{\tau}{rc} \frac{V_1^j - 2V_0^j + V_{-1}^j}{h^2} - \frac{\tau}{c} j_{ion}(m_0^j, n_0^j, h_0^j) \\ V_0^{j+1} &\approx V_0^j + \frac{\tau}{rc} \frac{2V_1^j - 2V_0^j}{h^2} - \frac{\tau}{c} j_{ion}(m_0^j, n_0^j, h_0^j), \quad j = \overline{0, M-1} \end{aligned}$$

4. Сега ще разгледаме уравнение 4 от системата:

$$V|_{x=L} = 0$$

За него получаваме:

$$V_N^j = 0 \quad j = \overline{0, M}$$

5. Следващото уравнение в списъка е:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m$$

То се апроксимира по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{m_i^{j+1} - m_i^j}{\tau} &\approx \alpha_m(V_i^j)(1 - m_i^j) - \beta_m(V_i^j)m_i^j \quad i = 0, N, \quad j = 0, M-1 \\ m_i^{j+1} &\approx m_i^j + \tau(\alpha_m(V_i^j)(1 - m_i^j) - \beta_m(V_i^j)m_i^j) \end{aligned}$$

Локалната грешка на апроксмацията е $O(\tau)$.

6. Последното уравнение е:

$$m(0) = m_0(0)$$

т.е.

$$m_i^0 = 0, \quad i = \overline{0, M}$$

7. Другите уравнения се получат подобно на последните 2.

8. Локалната грешка на апроксимация за системата е $O(h^2 + \tau)$.

Преобразуваме системата до:

$$\left|\begin{array}{rcl}
V_i^{j+1} & = & V_i^j + \dfrac{\tau}{c}\left[\dfrac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{rh^2} - j_{ion}(m_i^j, n_i^j, h_i^j)\right],\ i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{0, M-1} \\
V_i^0 & = & \varphi(x_i),\ i = \overline{0, N} \\
V_0^{j+1} & = & V_0^j + \dfrac{\tau}{rc}\dfrac{2V_1^j - 2V_0^j}{h^2} - \dfrac{\tau}{c} j_{ion}(m_0^j, n_0^j, h_0^j),\ \ j = \overline{0, M-1} \\
V_N^j & = & 0,\ j = \overline{0, M} \\
m_i^{j+1} & = & m_i^j + \tau(\alpha_m(V_i^j)(1 - m_i^j) - \beta_m(V_i^j)m_i^j),\ i = \overline{0, N},\ j = \overline{0, M-1} \\
m_i^0 & = & 0,\ i = \overline{0, N} \\
n_i^{j+1} & = & n_i^j + \tau(\alpha_n(V_i^j)(1 - n_i^j) - \beta_n(V_i^j)n_i^j),\ i = \overline{0, N},\ j = \overline{0, M-1} \\
n_i^0 & = & 0,\ i = \overline{0, N} \\
h_i^{j+1} & = & h_i^j + \tau(\alpha_h(V_i^j)(1 - h_i^j) - \beta_h(V_i^j)h_i^j),\ i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M-1} \\
h_i^0 & = & 1,\ i = \overline{0, N}
\end{array}\right.$$

Константи в модела:

$a = 238\ \mu m = 0.0238\ cm = 238.10^{-6} m$
$C = 1\ \mu F/cm^2 = 1.10^{-6} F$
$c = 2\pi a C = 2\pi 238.10^{-12} = 1495,39810310.10^{-12} F.m$
$\rho = 35,4\ ohm.cm = 0,354\ ohm.m$
$r = \dfrac{\rho}{\pi a^2} = \dfrac{354.10^{-3}}{\pi.238^2 10^{-12}} = 0.00198929630162.10^9\ ohm/m = 1989296,30162\ ohm/m$
$G_{Na} = 120\ mmhos/cm^2 = 120.10^{-3}\ mhos/cm^2 = \dfrac{120.10^{-3}}{(10^{-2})^2}\ mhos/m^2 = 1200\ mhos/m^2$
$G_K = 36\ mmhos/cm^2 = 360\ mhos/m^2$
$G_L = 0.3\ mmhos/cm^2 = 3\ mhos/m^2$
$V_{Na} = 115\ mV = 0.155\ V$
$V_K = -12\ mV = -0.012\ V$
$V_L = 10.5995\ mV = 0.0105995\ V$

Бягащи вълни са такива вълни, чиято форма не се променя докато вълната се придвижва с някаква константна скорост.