代数学 I(A) 試験対策問題

担当：木原 眞紀

2024 年 7 月

注意 あくまで対策問題なので，これらの問題と同一/類似の問題が出るとは限らない.

問 1 次の定義及び定理を書け．ただし，$a, b, n \in \mathbb{Z}, n > 0$ とする.

(1) 同値関係	(2) 全射	(3) 単射	(4) $b \mid a$ （ただし，$b \neq 0$)
(5) 素数	(6) 除法の定理	(7) $a \equiv b \mod n$	(8) オイラーの関数
(9) 群	(10) 可換群	(11) 部分群の判定定理	(12) 巡回群
(13) 左合同	(14) ラグランジュの定理	(15) 正規部分群	(16) (群の) 準同型写像

問 2 次の合同式を解け.

(1) $201x \equiv 2 \mod 2839$　　(2) $129x \equiv 21 \mod 1566$　　(3) $\begin{cases} x & \equiv 1 \mod 11 \\ x & \equiv 2 \mod 13 \\ x & \equiv 3 \mod 17 \end{cases}$

問 3 次のように定義された二項演算 $\circ$ は，それぞれの集合に関して群の構造を定めるかどうか判定せよ．ただし，群である場合と群でない場合のどちらにおいても，根拠とともに結論を述べること.

(1) $\mathbb{Q}$ において，$\circ$ を $a \circ b = \dfrac{ab}{2}$ と定義する.

(2) $S = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$ において，$\circ$ を $a \circ b = a + b + ab$ と定義する.

(3) $G = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \neq 0\} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ において，$\circ$ を $(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d)$ と定義する.

問 4 $n = 12$ とし，$(\mathbb{Z}_n, +)$ と $(U(\mathbb{Z}_n), \cdot)$ の演算表を作れ．ただし，$U(\mathbb{Z}_n)$ を $\mathbb{Z}_n$ における既約剰余類の集合とする.

問 5 次の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が行列の積に関して群をなすことを示せ.

(2) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群となることを示せ.

(3) $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ を行列式とする．$\det$ が準同型写像であることを示せ.