

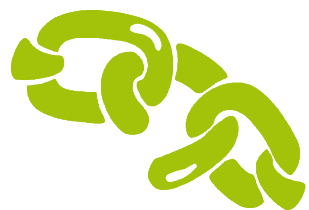
第8章 波形信道



波形信道



在通信系统中，调制器将信源发出的消息调制成波形，在信道中传输，波形在传输过程中受到噪声的干扰后进入接收机的输入端。接收机解调器对接收的信号进行解调。在发信机调制器的输出和接收机解调器输入之间的信道就是波形信道。波形信道就是输入与输出都是时间连续随机过程的信道。



本章主要内容：



8.1 离散时间连续信道

8.1.1 离散时间连续信道模型

8.1.2 平稳无记忆连续信道

8.1.3 多维矢量连续信道的性质

8.1.4 离散时间连续信道的容量

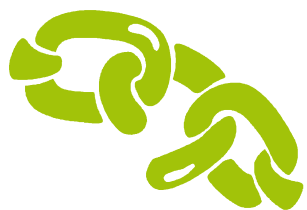
8.2 加性噪声信道与容量

8.2.1 加性噪声信道的容量

8.2.2 加性高斯噪声信道的容量

8.2.3 一般加性噪声信道容量界限

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



本章主要内容：



8.3 AWGN信道的容量

8.3.1 加性高斯噪声波形信道

8.3.2 波形信道的互信息与容量

8.3.3 AWGN信道的容量

8.3.4 高斯噪声信道编码定理

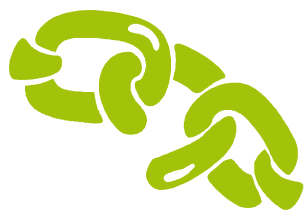
8.3.5 功率利用率和频谱利用率的关系

8.4 有色高斯噪声信道

8.4.1 有色高斯噪声信道容量

8.4.2 多频段AWGN信道容量

8.5 数字调制系统的信道容量

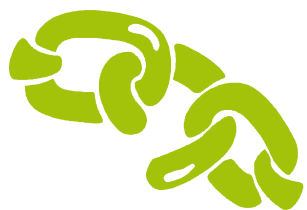


8.1 离散时间连续信道



本节主要内容:

1. 时间离散连续信道模型
2. 平稳无记忆连续信道
3. 多维矢量连续信道的性质
4. 离散时间连续信道的容量



8.1 离散时间连续信道



定义：

如果一个信道的输入与输出定义在离散时间上，且取值连续，这样的信道称为时间离散连续信道。

特点：

- a) 通过对时间连续信道在离散时间进行抽样或者对连续信道进行某种变换得到。
- b) 这种连续信道的输入与输出分别为随机序列，序列中符号的取值连续。
- c) 如果信道是平稳无记忆的，则离散时间信道的研究可以归结于单符号离散时间信道研究。

8.1.1 离散时间连续信道模型



- 信道输入为N维随机矢量:

$$\mathbf{X}^N = (X_1, \dots, X_N)$$

- 信道输出为N维随机矢量:

$$\mathbf{Y}^N = (Y_1, \dots, Y_N)$$

- 信道模型:

$$\{\mathbf{X}^N, p(\mathbf{y} | \mathbf{x}), \mathbf{Y}^N\}$$

- 其中 $p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = p(y_1, \dots, y_N | x_1, \dots, x_N)$ 为信道转移概率密度。

8.1.2 平稳无记忆连续信道



离散时间无记忆连续信道(无记忆连续信道):

转移概率密度满足 $p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i)$ (8.1)

数学模型 $\{X, p(y_n | x_n), Y\}$

平稳无记忆信道(恒参无记忆信道):

转移概率密度 $p(y_n | x_n) = p(y_m | x_m)$ (8.2)

数学模型 $\{X, p(y | x), Y\}$

平稳信道的转移概率密度不随时间变化，可以用一维条件概率密度来描述，其中，信道的输入 X 与输出 Y 都是一维随机变量集合。

8.1.3 时间离散连续信道模型



一般的时间离散连续信道输入与输出均为随机矢量，称为**多维矢量连续信道**，对于N维矢量信道，输入与输出平均互信息为：

$$\begin{aligned} I(\mathbf{X}^N; \mathbf{Y}^N) &= h(\mathbf{X}^N) - h(\mathbf{X}^N | \mathbf{Y}^N) \\ &= h(\mathbf{Y}^N) - h(\mathbf{Y}^N | \mathbf{X}^N) \\ &= \iint p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \log \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{p(\mathbf{x})p(\mathbf{y})} d\mathbf{x}d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (8.3)$$

8.1.3 时间离散连续信道模型



通过与离散信道类似的推导，可以得到如下结论：

定理8.1 对于离散时间无记忆连续信道，有：

$$I(\mathbf{X}^N; \mathbf{Y}^N) \leq \sum_{i=1}^N I(X_i; Y_i) \quad (8.4)$$

仅当信源无记忆时等式成立。

定理8.2 对于离散时间无记忆连续信源，有

$$I(\mathbf{X}^N; \mathbf{Y}^N) \geq \sum_{i=1}^N I(X_i; Y_i) \quad (8.5)$$

仅当信源无记忆时等式成立。

8.1.4 离散时间连续信道的容量



在求离散信道容量的过程中，除输入概率归一化的限制之外，可以不做其他限制。但对连续信道，若不对输入进行附加限制，输入与输出之间的平均互信息的最大值就可能会无限增大，通常这种限制就是输入功率或峰值的限制。

因此，连续信道容量定义为，在信道输入满足某些约束条件下，输入与输出平均互信息的最大值。

8.1.4 离散时间连续信道的容量



1. 单符号连续信道的容量熵

在计算单符号离散时间连续信道的容量时，首先定义一个与输入有关非负代价函数和一个约束量，信道容量定义为：

$$C(\beta) = \max_{p(x)} \{I(X;Y) : E_{p(x)}[f(x)] \leq \beta\} \quad (8.6)$$

即容量就是在满足约束 $E_{p(x)}[f(x)] \leq \beta$ 的条件下， $I(X;Y)$ 的最大值。

约束不等式在取等号时最大值达到最大，将约束中的不等式取等号，即：

$$C(\beta) = \max_{p(x), E[f(x)] = \beta} I(X;Y) \quad (8.7)$$

8.1.4 离散时间连续信道的容量



上式可分为两种情况来处理：

(1) 对于 $p(x)$ 可以变动的情况，则应改变 $p(x)$ ，求在满足约束条件下的极值；

(2) 对于 $p(x)$ 已经固定的情况，则仅利用约束条件求极值，即

$$C(\beta) = \max_{E[f(x)] = \beta} I(X; Y) \quad (8.8)$$

8.1.4 离散时间连续信道的容量



2. 平稳无记忆连续信道的容量

当信源无记忆时，有

$$\max_{N, p(\mathbf{x})} \frac{1}{N} I(\mathbf{X}^N; \mathbf{Y}^N) = \max_{p(\mathbf{x})} I(X; Y)$$

因此，平稳离散时间无记忆连续信道的容量的计算可以归结为：

$$C(\beta) = \max_{p(x)} \{I(X; Y) : E[f(x)] \leq \beta\} \quad (8.9)$$

令 $f(x) = x^2, \beta = E$ 表示信号能量，则约束为 $\overline{x^2} \leq E$ ，它表示输入平均能量约束。

平均能量约束离散时间平稳无记忆信道的容量为：

$$C = \max_{p(x), x^2 \leq E} I(X; Y) \quad (8.15)$$

8.2 加性噪声信道与容量



本节主要内容：

1. 加性噪声信道的容量
2. 加性高斯噪声信道的容量
3. 一般加性噪声信道容量界
4. 并联加性高斯噪声信道的容量

8.2.1 加性噪声信道与容量

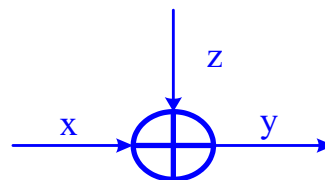


加性噪声信道的定义：

信道输入和独立于输入的噪声均为随机变量，而信道的输出是输入与噪声的和。

加性噪声信道的模型：

假设信道输入 X 为均值为零的连续或离散随机变量集，概率或概率密度密度为 $p(x)$ ，噪声 Z 是均值为零的独立于 X 的连续随机变量集，概率密度为 $p(z)$ ，信道的输出为 $Y=X+Z$ ，条件概率密度为 $p(y|x)$ ，这种信道的模型下图所示。



8.2.1 加性噪声信道与容量



定理8.3 设信道的输入与输出分别为 X 和 Y ，加性噪声信道的噪声 Z 独立于输入且熵为 $h(Z)$ ，那么

(1) 信道的转移概率密度为: $p(y|x) = p_z(y-x)$ (8.16)

(2) 条件熵: $h(Y|X) = h(Z)$ (8.17)

(3) 信道输入与输出的平均互信息: $I(X;Y) = h(Y) - h(Z)$ (8.18)

(4) 信道容量: $C = \max_{p(x)} h(Y) - h(Z)$ (8.19)

其中 $h(Y)$ 为信道输出的熵。

8.2.1 加性噪声信道与容量



证 因为 z 为独立加性噪声, 所以 $y = x + z$, 有

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 1$ 。从而有 $p(xy) = p(xz)$,

$$p(x)p(y|x) = p(x)p(z|x) \Big|_{z=y-x} = p(x)p(z) \Big|_{z=y-x}, \text{ 得 } p(y|x) = p_z(y-x)$$

根据变换的熵定理, 有 $h(XY) = h(XZ) + \log |\det A| = h(XZ)$ 又

因为 x, z 独立, 有 $h(X) + h(Y|X) = h(X) + h(Z)$, 从而得 $h(Y|X) = h(Z)$

由 $I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X)$ 和 $h(Y|X) = h(Z)$ 得到 $I(X;Y) = h(Y) - h(Z)$

因 $h(Y)$ 依赖于输入 X , 而 $h(Z)$ 独立于输入 X , 所以求 $\max_{p(x)} I(X;Y)$

相当于求 $h(Y)$ 的最大值, 因此得 $C = \max_{p(x)} h(Y) - h(Z)$

8.2.1 加性噪声信道与容量



例8.1 一个信道的噪声 Z 在 $-1 \leq x \leq 1$ 区间均匀分布，输入信号 X 的幅度限制在区间 $-1 \leq z \leq 1$ 内，输出 $Y=X+Z$ ，求输入与输出平均互信息 $I(X; Y)$ 的最大值？

解 由于 $y=x+z$ ，所以 y 的值限制在 $-2 \leq y \leq 2$ 区间内。根据限峰值最大熵定理， Y 应该是均匀分布才能使 $h(Y)$ 达到最大值。所以：

$$\max_{p(x)} I(X; Y) = \log(2 + 2) - \log(1 + 1) = 1 \text{ 比特/自由度}$$

8.2.2 加性噪声信道与容量



加性高斯噪声信道：

如果信道的加性噪声为高斯分布，则信道称为加性高斯噪声信道。给定信道输入 X 的方差为 σ_x^2 ，噪声 Z 为零均值、方差 σ_z^2 的高斯分布，即 $Z \sim N(0, \sigma_z^2)$ ，那么 Y 的方差也就确定。根据限功率最大熵定理，当 Y 为高斯分布时， $h(Y)$ 达到最大。

又根据 $I(X;Y) = h(Y) - h(Z)$ 可知，此时 $I(X;Y)$ 达到最大。

由 $y = x + z$ 可知， X 也应为高斯分布。设 $X \sim N(0, \sigma_x^2)$ ，且 X 、 Z 独立，所以 $Y \sim N(0, \sigma_x^2 + \sigma_z^2)$

8.2.2 加性噪声信道与容量



$$h(Z) = \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma_z^2) \quad (8.20)$$

$$h(Y) = \frac{1}{2} \log[2\pi e(\sigma_z^2 + \sigma_x^2)] \quad (8.21)$$

$$\max_{p(x)} I(X;Y) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right) \quad (8.22)$$

注：

- (1) 对于加性高斯噪声信道，当 $I(X;Y)$ 达到最大值时，输入与输出均为高斯分布，而且这个最大值仅与输入信噪比 σ_x^2/σ_z^2 有关；
- (2) 当 $\sigma_x^2/\sigma_z^2 \rightarrow \infty$ 时， $\max_{p(x)} I(X;Y) \rightarrow \infty$ ；
- (3) 必须对 σ_x^2/σ_z^2 进行限制才能得到有限的 $I(X;Y)$ 的最大值。

8.2.2 加性噪声信道与容量



定理8.4 设一个离散时间平稳无记忆加性高斯噪声信道，噪声方差为 σ_z^2 ，输入限制为 $\overline{x^2} \leq E$ ，则信道容量为：

$$C = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{E}{\sigma_z^2}\right) \quad \text{比特（或奈特）/自由度} \quad (8.23)$$

因为随机变量是一维的，一维的变量具有一个自由度，多维变量则有多多个自由度。由 $I(X;Y) = h(Y) - h(Z)$ 可知，对功率受限平稳无记忆加性高斯信道，其容量仅与输入信噪比有关。

8.2.3 一般加性噪声信道容量界



对于一般的加性噪声信道，难以求出精确的容量表达式，但可以估计容量的界限。

定理8.5 设一离散时间无记忆连续信道的加性噪声的方差为 σ_z^2 ，熵功率为 σ^2 ，输入功率约束为 $E(x^2) \leq \sigma_x^2$ ，则噪声信道的容量C满足：

$$\frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right) \leq C \leq \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma^2}\right) \quad (8.24)$$

8.2.3 一般加性噪声信道容量界



从前两节研究的内容，可得如下结论：

- (1) 在功率相同的加性噪声中，高斯噪声使信道容量最小，高斯噪声是最难抵抗的噪声；
- (2) 在干扰存在的条件下，通信系统通过在发送和接收端的信号处理，可以使性能不劣于等功率高斯噪声造成的影响；
- (3) 对通信系统干扰的最佳策略：产生高斯噪声干扰；
- (4) 抵抗干扰的最佳策略：让信源输出的统计特性为高斯分布；

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量

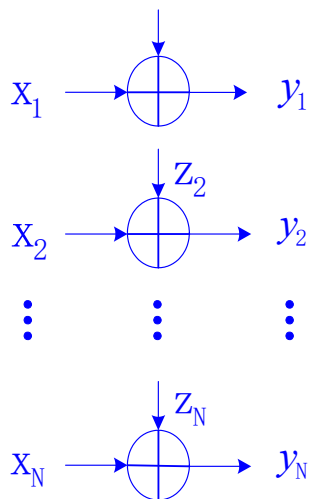


数学模型:

设信道的输入与输出分别为维矢量集合 $\mathbf{X}^N = (X_1 \dots X_N)$

和 $\mathbf{Y}^N = (Y_1 \dots Y_N)$, 加性噪声 $\mathbf{Z}^N = (Z_1 \dots Z_N)$, 即有 $y_i = x_i + z_i$,

其中 $x_i \in X_i, y_i \in Y_i, z_i \in Z_i$, 当 Z_i 为 $N(0, \sigma_i^2)$ 的独立噪声时, 便构成包含N个独立子信道的并联加性高斯噪声信道, 如图所示。



8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



定理8.6 设由 N 个独立子信道构成的离散时间无记忆加性高斯噪声并联信道，各子信道噪声的方差分别为 $\sigma_i^2, i = 1, \dots, N$ ，输入满足约束：

$$\sum_{i=1}^N \overline{x_i^2} = \sum_{i=1}^N E_i \leq E \quad (8.25)$$

当输入是统计独立、零均值的高斯随机矢量时达到容量，并满足

$$\begin{aligned} E_i &= 0 \quad \text{对于 } B \geq \sigma_i^2 \\ E_i + \sigma_i^2 &= B \quad \text{对于 } B < \sigma_i^2 \\ \sum_{i, \sigma_i^2 \leq B} E_i &= E \end{aligned} \quad (8.26)$$

其中 B 为常数，信道容量为：

$$C = \sum_{i, \sigma_i^2 \leq B} \frac{1}{2} \log \frac{B}{\sigma_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log \left(1 + \frac{E_i}{\sigma_i^2} \right) \quad (8.27)$$

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



例8.2

设有一个2维独立并联高斯信道，两子信道的噪声的方差分别为 $\sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 10$ ，输入信号的总能量为 $E = 6$ ，求信道容量C和达到容量时的能量分配 E_1, E_2 。

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



解：如果 $E_i = 0$ 对于 $B \geq \sigma_i^2$ 成立，就有

$$\begin{cases} E_1 + 1 = B \\ E_2 + 10 = B \\ E_1 + E_2 = 6 \end{cases}$$

很明显，上面方程组无非负数解。所以，应有方差大的子信道分配的能量为零。所以

$$\begin{cases} E_1 + 1 = B \\ E_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E_1 = 6, B = 7$$

$$C = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{6}{1}\right) = \frac{1}{2} \log 7 = 1.404 \text{ 比特/2自由度}$$

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



例8.12（续）若两子信道的噪声的方差不变，输入信号的总能量变为 $E = 15$ ，求信道容量 C 和达到容量时的能量分配 E_1, E_2 ？

解：

$$\begin{cases} E_1 - E_2 = 9 \\ E_1 + E_2 = 15 \end{cases}$$

有正数解

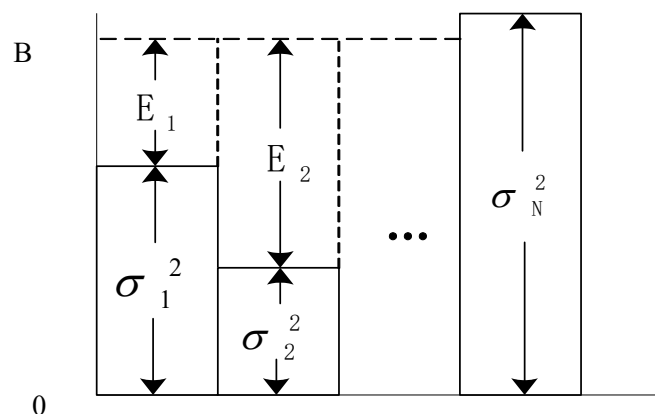
$$E_1 = 12, E_2 = 3$$

$$C = \frac{1}{2} \log(1+12) + \frac{1}{2} \log(1+\frac{3}{10}) = \frac{1}{2} \log \frac{13^2}{10} = 2.040 \text{ 比特/自由度}$$

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



在一般情况下，各子信道的能量分配原则可以用蓄水池注水来解释。如下图所示，利用垂直的纵截面将蓄水池分成宽度相同的 N 个部分对应于 N 个并联子信道，各部分底面的高度对应信道噪声方差 σ_i^2 ，总注水量等于总输入能量 E ，水完全注满后水面高度为 B 。可以看出，底面高度低的部分注水多，高度高的部分注水少，而高度特别高的部分根本没有水。



8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



总结关于能量（或功率）分配的算法：

设 N' 为 $B \geq \sigma_n^2$ 中 n 的集合，那么

$$\sum_{n \in N'} (E_n + \sigma_n^2) = E + \sum_{n \in N'} \sigma_n^2 = K B \quad (8.30)$$

其中， K 为 N' 中元素的个数。

① E_n 的分配：

$$E_n = \frac{E + \sum_{n \in N'} \sigma_n^2}{K} - \sigma_n^2 \quad (8.31)$$

② 开始令 $K = N$,

对所有 n ，若 $\frac{E + \sum_{n \in N'} \sigma_n^2}{K} - \sigma_n^2 < 0$ ，则第 n 信道从集合 N' 中删除，

重新计算(*)式，直到所有 E_n 大于或等于零时，将能量 $E_n > 0$ 分配给信道 n ，而被删除信道分配能量为 0。

8.2.4 并联加性高斯噪声信道的容量



上例中， $N = 2, \sigma_1^2 = 1, \sigma_2^2 = 10, E = 6$ ，假定两信道全用，则 $\frac{6+1+10}{2} = 8.5$ ， $8.5 - 10 < 0$ 第1信道用； $8.5 - 1 > 0$ 第2信道不用；所以第1信道用， $E_1 = 6$ ， $E_2 = 0$ 。

总之，为达到容量，应给噪声小的信道分配能量多，给噪声大的信道分配能量少。当发送端按注水原理给各子信道分配能量时，需要反馈信道从接收端将信道信息传送给发送端，增加了通信的成本。

8.3 AWGN信道的容量



本节主要内容：

1. 加性高斯噪声波形信道
2. 波形信道的互信息与容量
3. AWGN信道的容量
4. 高斯噪声信道编码定理
5. 功率利用率和频谱利用率的关系

8.3.1 加性高斯噪声波形信道

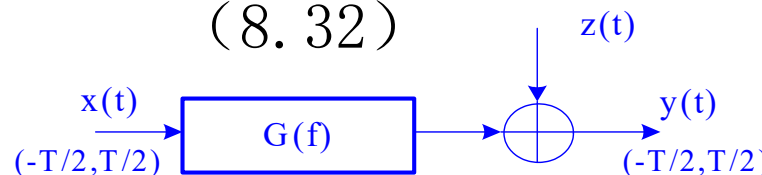


加性高斯噪声信道分为加性高斯白噪声信道和加性高斯有色噪声信道，一般模型如下所示。这里，假定信道是平稳的，实信号 $x(t)$ 为信道的输入，信道的冲击响应 $g(t)$ 可看成一个线性时不变滤波器，其傅氏变换为 $G(f)$ ，加性高斯噪声 $z(t)$ 的谱密度为 $N(f)$ ，输入信号平均功率限制为 P ，接收信号为 $y(t)$ ，则

$$y(t) = x(t) * g(t) + z(t) \quad (8.32)$$

输入信号平均功率的约束表示为

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \leq P \quad (8.33)$$



8.3.1 加性高斯噪声波形信道



设 B 为信号传输的频带范围。若在频段 B 内 $N(f)$ 为常数，则称信道为限带加性高斯白噪声信道，否则称有色高斯噪声信道。特别是，若 $G(f)$ 在频段 B 内也为常数，则称信道为理想限带加性高斯白噪声信道（简称AWGN信道）。

设 $G(f)=1(f \in B)$ ，则对于AWGN信道有：

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (8.34)$$

其中， $n(t)$ 为具有单边谱密度 N_0 的加性高斯白噪声。系统的带宽 W 和信噪比SNR：

$$W = \int_B df \quad (8.35)$$

$$SNR = P / (N_0 W) \quad (8.36)$$

8.3.2 波形信道的互信息与容量



1. 波形信道的时间离散化

波形信道的容量研究要通过等价离散时间信道容量的研究来实现。

等价离散时间信道：

- 把连续时间信道变换成离散时间信道。
- 独立并联信道
- 信道的输入与输出分别是原始波形信道输入与输出离散化抽样。
- 正交展开方法，利用富氏级数展开或时域抽样都得到 $N=2TW$ 实子信道，即信道具有 $N=2TW$ 个自由度。

8.3.2 波形信道的互信息与容量



2. 波形信道的容量

设与波形信道等价的并联信道的输入与输出两个N维矢量 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ 它们构成的矢量集合分别为 $\mathbf{X}^N = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ $\mathbf{Y}^N = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$ 其中 $x_i \in X_i, y_i \in Y_i$ 。

转换为等价并联信道后，原波形信号的能量在时间离散化后应该，所以当信号是限时限频时，平均功率约束下的容量定义为：

$$C = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_T}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \max_{p(\bar{x}), \sum |x_i|^2 \leq PT} I(\mathbf{X}^N; \mathbf{Y}^N) \quad (8.40)$$

8.3.3 AWGN信道的容量



限带AWGN信道是通信系统中最普遍的信道。限带是指通信系统或传输的信号被限制在某个频带范围，噪声在这一频带范围的谱密度为常数 N_0 （单边）。

定理8.7 一个加性高斯白噪声（AWGN）信道的噪声的功率谱密度为 $N_0/2$ ，输入信号平均功率限制为 P ，信道的带宽为 W ，那么信道每单位时间的容量为：

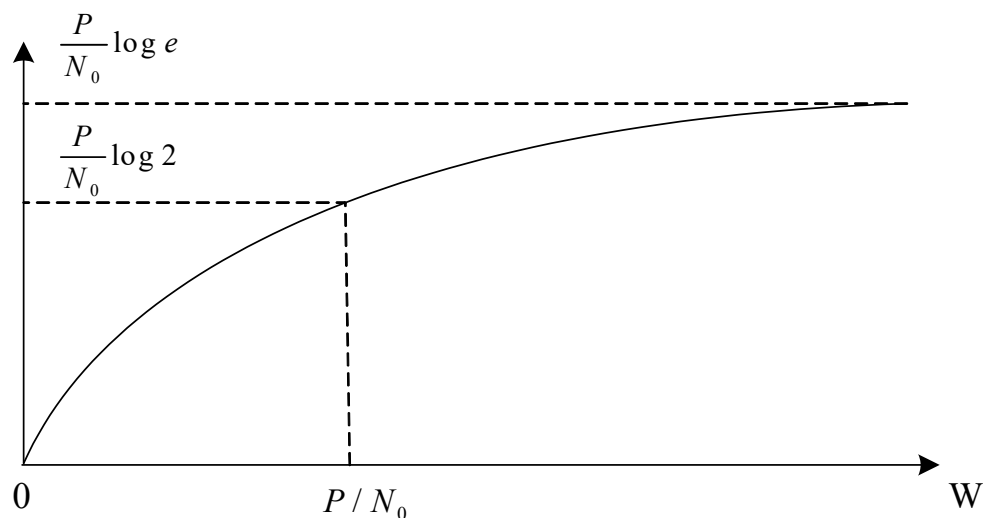
$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \quad (8.44)$$

8.3.3 AWGN信道的容量



$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

上式是著名的仙农限带高斯白噪声信道的容量公式。当输入为高斯分布时达到信道容量，此时平均功率约束为 P 。信道容量曲线下图所示。



8.3.3 AWGN信道的容量



仙农公式的几点注释：

- ① 仙农公式表明每单位时间的信道容量，根据对数的底不同，可以为比特/秒或奈特/秒。

$$\frac{C}{2W} = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \quad (8.45)$$

表明每自由度的容量，单位为比特/自由度。

$$\frac{C}{W} = \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \quad (8.46)$$

表明每单位带宽的容量，也是含两个自由度的信道容量，单位为bps/Hz，常用来描述系统可能达到的最大的频谱利用率，也可描述二维调制系统每符号容量。

8.3.3 AWGN信道的容量



仙农公式的几点注释：

- ②仙农公式中的带宽 W 是正频率范围，不包括负频率范围。
- ③达到容量时，信道的输入也应该是高斯过程，因此如果限制了输入的概率分布，就未必能达到信道容量。
- ④当噪声为非高斯时，仙农公式不适用。
- ⑤当噪声不是加性或噪声不独立于信号时，此式不适用。

8.3.3 AWGN信道的容量



仙农公式的几点注释：

- ⑥仙农公式是在功率为唯一受约束的量的条件下得到的，若其他量受到限制，该公式不适用。
- ⑦ W 的范围并不要求一个连续的频带，可以允许有若干不相邻的频段组成。
- ⑧只要求噪声谱密度在信号带宽内为常数，不考虑信号频带外的噪声特性。

8.3.3 AWGN信道的容量



关于仙农公式的讨论：

① 信道容量与信号功率的关系

由公式可知，当P增加时，容量C也增加，但当P无限增长时，C增长的速度也在减小。因为：

$$\frac{dC}{dP} = W \frac{\log e}{1 + \frac{P}{N_0 W}} \cdot \frac{1}{N_0 W} = \frac{\log e}{N_0 + P/W} \quad (8.47)$$

当 $P \rightarrow \infty$ 时， $\frac{dC}{dP} \rightarrow 0$ 。

8.3.3 AWGN信道的容量



关于仙农公式的讨论：

②信道容量与带宽的关系

当带宽 W 增大时， C 也增大，当 W 无限增大时， C 与 W 无关。

因为：

$$\lim_{W \rightarrow \infty} C = \lim_{W \rightarrow \infty} W \frac{P}{N_0 W} \log e = 1.44 \frac{P}{N_0} \quad (8.48)$$

8.3.3 AWGN信道的容量



关于仙农公式的讨论：

③ 带宽与信噪比的互换关系

设两个通信系统，其容量表达式分别为

$$C_i = W_i \log\left(1 + \frac{P_i}{N_0 W_i}\right), \quad i = 1, 2$$

当 $C_1 = C_2$ 时有：

$$W_1 \log\left(1 + \frac{P_1}{N_0 W_1}\right) = W_2 \log\left(1 + \frac{P_2}{N_0 W_2}\right)$$

$$1 + \frac{P_1}{N_0 W_1} = \left(1 + \frac{P_2}{N_0 W_2}\right)^{W_2/W_1}$$

8.3.3 AWGN信道的容量



关于仙农公式的讨论：

③ 带宽与信噪比的互换关系

$$\frac{P_1}{N_0 W_1} = \left(1 + \frac{P_2}{N_0 W_2}\right)^{W_2/W_1} - 1 \quad (8.49)$$

上式说明在信道容量不变条件下信噪比和带宽的互换关系。如果 $\frac{P_1}{N_0 W_1} \gg \frac{P_2}{N_0 W_2}$ ，那么，应有 $W_2 \gg W_1$ ，以保证上式成立

因此，如果系统带宽较小，那么可以通过增加信噪比来提高容量，例如窄带通信系统；如果系统带宽很大，那么降低信噪比，也能保证需要的容量，例如扩频通信系统。

8.3.3 AWGN信道的容量



例8.3 一限带加性高斯白噪声信道，带宽为1MHz，信号功率为10W，噪声功率谱为 $N_0/2 = 10^{-9} W/Hz$ ，求信道容量。

解 根据仙农公式，信道容量为：

$$C = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_0 W} \right) = 10^6 \times \log_2 \left(1 + \frac{10}{10^6 \times 10^{-9} \times 2} \right) \approx 1.23 \times 10^7 \text{ bps}$$

8.3.4 高斯噪声信道编码定理



波形信道的容量是可靠传输时信息速率的上界，
波形信道可以等价为离散时间信道。

限带高斯白噪声信道可等价为 $n=2TW$ 维的独立并联
离散时间信道，平均功率约束变成：

$$\sum_{i=1}^n \overline{x_i^2} \leq PT = nE \quad (8.50)$$

其中， $E = PT/n$ 。各独立并联子信道噪声方差为 $N_0/2 = \sigma^2$

等价离散时间信道每自由度的容量： $C = \frac{1}{2} \log(1 + \frac{E}{\sigma^2})$

设发送消息数为 M ，则信息传输速率 R 为： $R = (\log M) / n$

8.3.4 高斯噪声信道编码定理



定理8.8 高斯噪声信道编码定理:

对于输入平均功率受限的加性高斯噪声信道，当传输速率时，总可找到一种编码方式，使得差错率任意小；反之，找不到使错误概率任意小的编码。

8.3.4 高斯噪声信道编码定理



利用多维信号空间的概念做如下解释：

在平均功率的约束下，信道输入和噪声都可看成 $N=2TW$ ，维空间的一个点，其功率分别为 nE 和 $n\sigma^2$ 。由于受到噪声干扰，信道的输出矢量 \mathbf{y} 是以发送码字 \mathbf{x}_m 为均值，方差为 $n\sigma^2$ 的高斯分布。

在译码时如果 \mathbf{y} 处于这个多维球内，我们就将球的中心译为发送的码字，称这个多维球为该码字 \mathbf{x}_m 的译码球。由于信道输出功率限制在内，因此所有的信道输出矢量以很高的概率位于以0中心半径为 $\sqrt{n(E + \sigma^2)}$ 的多维球内。

8.3.4 高斯噪声信道编码定理



接收矢量的多维球中包含的不相交译码球的个数为：

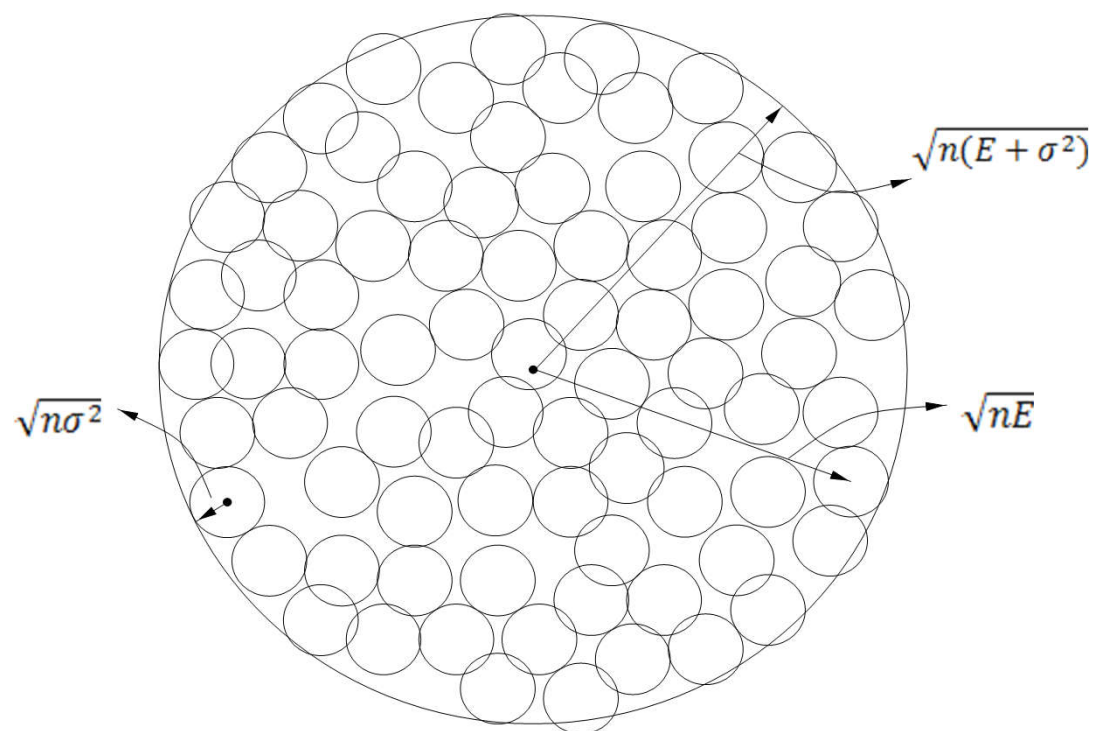
$$M' = \frac{A_n [n(E + \sigma^2)]^{n/2}}{A_n (n\sigma^2)^{n/2}} = \left(1 + \frac{E}{\sigma^2}\right)^{n/2} \quad (8.51)$$

其中， $A_n r^n$ 表示半径为r的多维球的体积， A_n 是不依赖于半径的数。如果 $R < C$ ，那么

$$M = 2^{nR} \leq 2^{nC} = 2^{(n/2)\log(1 + \frac{E}{\sigma^2})} = M' \quad (8.52)$$

这样，通过适当编码可以保证各译码球不相交，从而实现在n足够大时，差错率任意小的译码。

8.3.4 高斯噪声信道编码定理



8.3.5 功率利用率和频谱利用率的关系



通信系统性能指标：功率利用率、频谱利用率

功率利用率：在给定误比特率条件下能量信噪比 E_b/N_0 （即每比特能量 E_b 与白噪声的单边功率谱密度 N_0 之比）的值来衡量，此值越小说明系统的功率利用率越高，因此它表明了一个系统利用所发送信号功率的能力。

频谱利用率：系统所传输的信息速率 R 与系统带宽 W 的比，即 R/W （单位为 bps/Hz），此值越高，说明系统的频谱利用率越大，因此它表明了一个系统在单位频带上传输信息的效率。

8.3.5 功率利用率和频谱利用率的关系

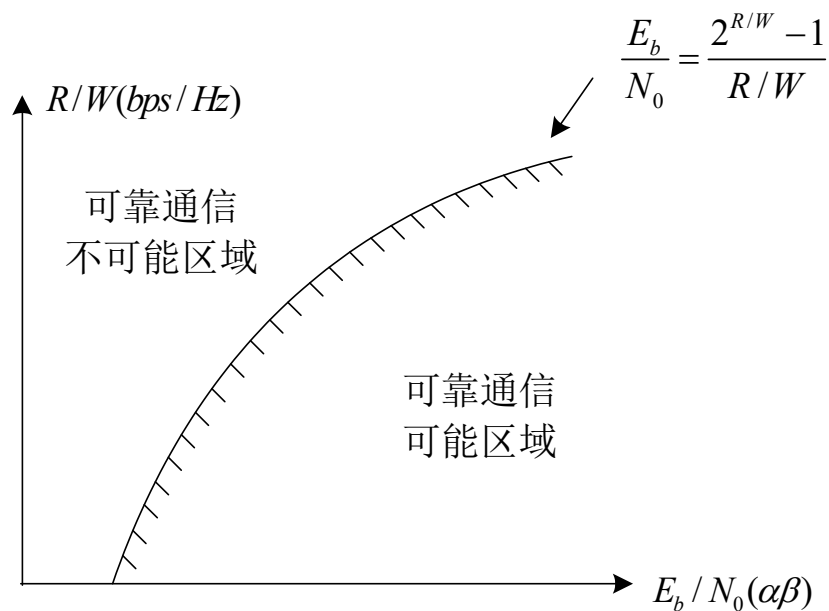


一个好的通信系统应该是具有高的功率利用率和频谱利用率。但是从下面的研究可以看到这两个指标往往是矛盾的。即高的功率利用率要导致低的频谱利用率，或者是相反。因此，在设计通信系统时要对两个指标进行权衡考虑。

8.3.5 功率利用率和频谱利用率的关系



根据编码定理，得到如下曲线。该曲线将第一象限的区域划分成两部分，即可靠通信可能区域与可靠通信不可能区域。当 $\frac{E_b}{N_0}$ 和 $\frac{R}{W}$ 的关系处于可靠通信可能区域中时，总会找到一种编码和调制方式使得传输差错率任意小。



8.3.5 功率利用率和频谱利用率的关系



当 $R/W \rightarrow 0$ 时, 求 $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{R/W} - 1}{R/W}$ 右边的极限,

这个极限值是 E_b / N_0 的最小值:

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \lim_{R/W \rightarrow 0} \frac{2^{R/W} - 1}{R/W} = \ln 2 = 0.693 = -1.59dB \quad (8.55)$$

这就是加性高斯白噪声 (AWGN) 信道实现可靠通信的信噪比的下界, 这个下界称作仙农限 (Shannon limit), 这个界对应着系统的带宽是无限大。

8.3.5 功率利用率和频谱利用率的关系



例8.4 给定信噪比 $E_b/N_0=25dB$ ，信道带宽分别为100KHz和10KHz，问能否可靠地传输速率为1Mbps的数据？

解 根据式 $\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{R/W} - 1}{R/W}$ 计算所需的最小值。

当信道带宽为100KHz，有

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{1 \times 10^6 / 10^5} - 1}{10^6 / 10^5} = \frac{2^{10} - 1}{10} = 102.3 = 20.09dB$$

通过适当的编码方式可实现无差错传输。

当信道带宽为10KHz，有

$$\frac{E_b}{N_0} \geq \frac{2^{100} - 1}{100} > 25dB$$

此时，无论采用何种编码方式都不能实现可靠传输。

8.4 有色高斯噪声信道



本节主要内容:

1. 有色高斯噪声信道容量
2. AWGN信道容量的进一步讨论

8.4.1 有色高斯噪声信道



定理8.9 一个传输函数为 $G(f)$ 的有色加性高斯噪声信道，噪声功率谱密度为 $N(f)$ ，信号平均功率限制为 P ，那么每单位时间的信道容量为：

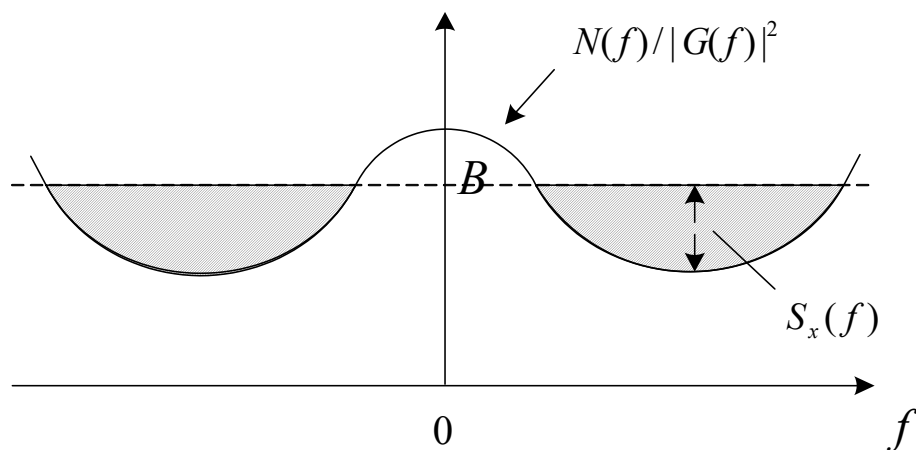
$$C = \frac{1}{2} \int_{f \in F_B} \log \frac{|G(f)|^2 B}{N(f)} df \quad (8.64)$$

其中，积分范围为 $(-\infty, \infty)$ ， B 由和信号的功率分配由下面两个式子确定。

$$P = \int_{f \in F_B} (B - \frac{N(f)}{|G(f)|^2}) df$$

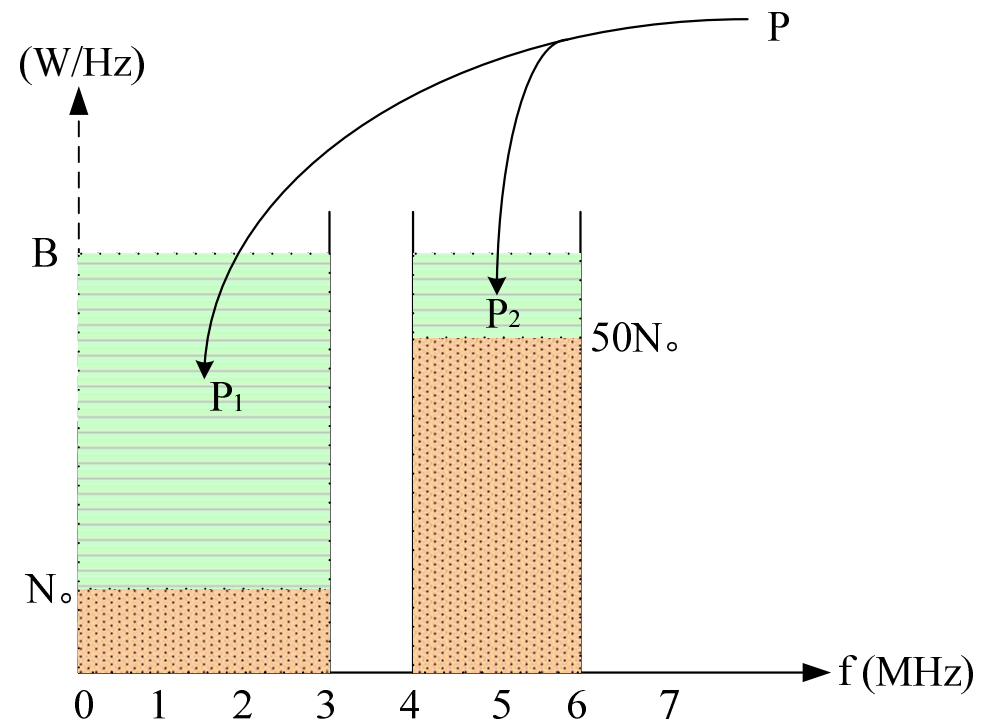
$$S_x(f) = \max(0, B - N(f)/|G(f)|^2)$$

8.4.1 有色高斯噪声信道



结论：对于有色高斯噪声信道，达到容量时的输入信号功率分布应满足注水原理。对于等效噪声很大的频段不分配信号功率。当 $N(f)$, $G(f)$, P 为已知时，确定 B ，确定输入信号的功率谱，最后计算信道容量。不过当 $N(f)/|G(f)|^2$ 为不规则的函数时， B 的确定比较麻烦。

8.4.1 有色高斯噪声信道



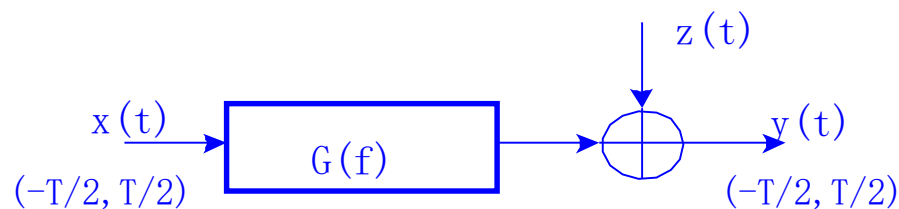
8.4.1 有色高斯噪声信道



例8.5 给定如图所示的有色高斯噪声信道，设

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1+(f/f_0)^{2n}} \quad \text{信号功率约束为 } P, \quad N(f) = N_0/2, \quad ,$$

求信道容量。



8.4.1 有色高斯噪声信道



解

等效的噪声功率谱密度 $N(f)/|G(f)|^2 = \frac{N_0}{2}[1+(f/f_0)^{2n}]$ 是偶函数，在区间是单调增函数，设信号可用频率范围为 $(-W, W)$ ，则有：

$$B = \frac{N_0}{2} [1 + (W/f_0)^{2n}] \quad (8.65)$$

根据

$$C = \frac{1}{2} \int_{f \in F_B} \log \frac{|G(f)|^2 B}{N(f)} df$$

得

$$P = \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} \frac{[W^{2n} - f^{2n}]}{f_0^{2n}} df \quad (8.66)$$

8.4.1 有色高斯噪声信道



通过运算，得

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{P(2n+1)f_0^{2n}}{2nN_0} \right)^{\frac{1}{2n+1}} \\ C &= \frac{1}{2} \int_{-W}^W \log \frac{1 + (W/f_0)^{2n}}{1 + (f/f_0)^{2n}} df \\ &= \int_0^W \log \frac{1 + (W/f_0)^{2n}}{1 + (f/f_0)^{2n}} df \end{aligned} \quad (8.67)$$

给定 P/N_0 和 f_0 ，可通过数值计算可得到C与n的关系曲线。

8.4.2 AWGN信道容量的进一步讨论



结论:

- ①仙农公式中 W 为系统带宽，并不一定是 $(0, W)$ 范围。
- ②如果含多个不相邻噪声功率谱密度相同频段，仙农公式中 W 为各频段带宽的和。
- ③如果含多个不相邻且噪声功率谱密度不同频段，达到容量时按注水原理分配总功率，容量为所有频段容量的和。

$$P = \sum_m (B - N_m) W_m \quad B = (P + \sum_m N_m W_m) / \sum_m W_m \quad (8.69)$$

$$P_m = B W_m - N_m W_m > 0 \quad (8.70)$$

$$C = \sum_m W_m \log \frac{B}{N_m} = \sum_m W_m \log [1 + P_m / (N_m W_m)] \quad (8.71)$$

8.4.2 AWGN信道容量的进一步讨论



例8.6 一通信系统通过AWGN信道传送信息，噪声的双边功率谱密度为 $N_0/2 = 0.5 \times 10^{-8} \text{W/Hz}$ ，信号功率 P 限制为10W，系统使用两个频段 B_1 和 B_2 ，其中 B_1 范围为(0, 3MHz)， B_2 范围为(4MHz, 6MHz)；

- (1) 求系统的信道容量；
- (2) 如果频段 B_1 的双边功率谱密度不变，而 B_2 的变为原来的50倍，求信道容量。

8.4.2 AWGN信道容量的进一步讨论



解

(1) 设系统的信道容量为 C_1 , $W_1=3\text{MHz}$, $W_2=6-4=2\text{MHz}$;

$$W = 3+2 = 5\text{MHz}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= W \log_2 \left(1 + \frac{P}{N_o W} \right) = 5 \times 10^6 \times \log_2 \left(1 + \frac{10}{10^{-8} \times 5 \times 10^6} \right) \\ &= 38.225 \times 10^6 \text{ bps} \end{aligned}$$

8.4.2 AWGN信道容量的进一步讨论



(2) 设 B_1 和 B_2 分配功率分别为 P_1 和 P_2 ，根据功率分配注水原理，有

$$P_1 + P_2 = P \quad P_1 + N_0 W_1 = B W_1 \quad P_2 + 50 N_0 W_2 = B W_2$$

得 $B = [P + N_0 W_1 + 50 N_0 W_2] / (W_1 + W_2)$

$$= [10 + 10^{-8} \times (3 + 2 \times 50) \times 10^6] / (5 \times 10^6) = 2.206 \times 10^{-6}$$

所求信道容量为

$$\begin{aligned} C &= 3 \times 10^6 \times \log_2 \frac{2.206 \times 10^{-6}}{10^{-8}} + 2 \times 10^6 \times \log_2 \frac{2.206}{50 \times 10^{-8}} \\ &= 27.639 \text{ Mbps} \end{aligned}$$

8.5 数字调制系统的信道容量



数字调制：PAM、PSK、QAM、CAP等。

一维调制：在将波形信道转换成等价离散时间信道后，含有 一个自由度的调制方式。

二维调制：在将波形信道转换成等价离散时间信道后，含有两个自由度的调制方式。

多维调制

8.5 数字调制系统的信道容量



二维调制： MPSK、QAM、CAP

其基带信号可用复平面上的点 (a_i, b_i) 表示，用复数表示为 $\alpha_i = a_i + jb_i$ ，其中 $\{a_i\}, \{b_i\}$ 分别为同相与正交支路的数字调制序列，每个调制符号有两个自由度。当调制符号取自大小为M的符号集时，即 α_i 取自集合 $\{s_m\}, m = 1, 2, \dots, M$ ，则称为M进制调制，其中每个符号可由比特来表示 $K = \log_2 M$ 。

8.5 数字调制系统的信道容量



设信道输出为 $y=u+jv$ ，则有 $u = c_m + n_r, v = d_m + n_q$

则二维数字调制信道容量：

$$C_{[b/2\text{自由度}]} = \log M - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \iint \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|Z|^2}{2}} \log \sum_n e^{-\{\frac{1}{2}|s'_n - s'_m|^2 - \text{Re}[Z^*(s'_n - s'_m)]\}} du' dv' \quad (8.76)$$

表示系统最大的频带利用率，单位为比特（奈特）
/2自由度，或者可写成bps/Hz。

8.5 数字调制系统的信道容量



基带调制信道是输入离散输出连续的信道，信道容量就是输入与输出之间的平均互信息。设第 i 个调制符号取自符号集 $\{s_m\}, (m=1,2,\dots,M), s_m = c_m + jd_m$ ，设加性高斯白噪声的功率谱密度 $N_0/2$ ，两个正交的噪声分量分别为 n_r, n_q ，那么为高斯分布，相互独立，且均值为0，方差均为 $N_0/2$ 。

8.5 数字调制系统的信道容量



设系统的带宽为 W ，无码间干扰时的最大符号速率，那么对于二维调制，有 $R_s = W$ 。设系统的信息传输速率为 R ，频带利用率 η ，根据仙农容量公式和信道编码定理，理想的频带利用率 $\eta = R / W$ 应满足：

$$\eta \leq \log_2(1 + SNR) = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0} \cdot \eta\right) \quad (8.77)$$

对于 M 进制二维数字调制，根据信道编码定理，频带利用率应满足：

$$\eta \leq \log M - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \iint \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|Z|^2}{2}} \log \sum_n e^{-\left\{\frac{1}{2}|s'_n - s'_m|^2 - \operatorname{Re}[Z^*(s'_n - s'_m)]\right\}} du' dv' \quad (8.79)$$

8.5 数字调制系统的信道容量



对于二维调制，信号的平均能量与关系是：

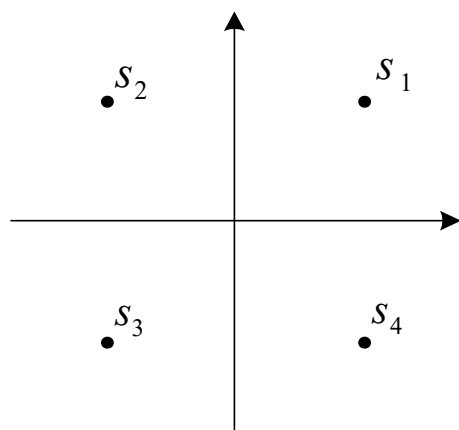
$$E_s = E_b R / R_s = E_b R / W = E_b \eta$$

信噪比SNR：

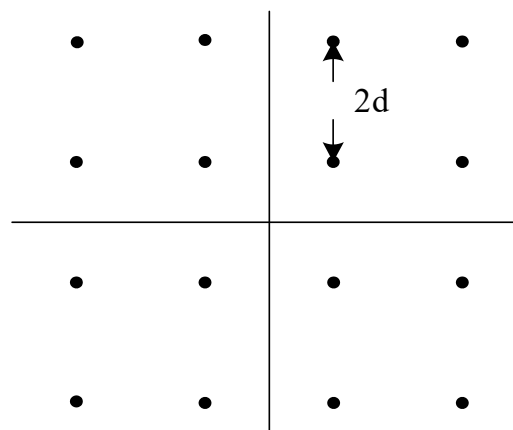
$$SNR = \frac{E_s R_s}{N_0 W} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0} \eta \quad (8.80)$$

这样可以得到 η 与 E_b/N_0 关系的曲线。

8.5 数字调制系统的信道容量



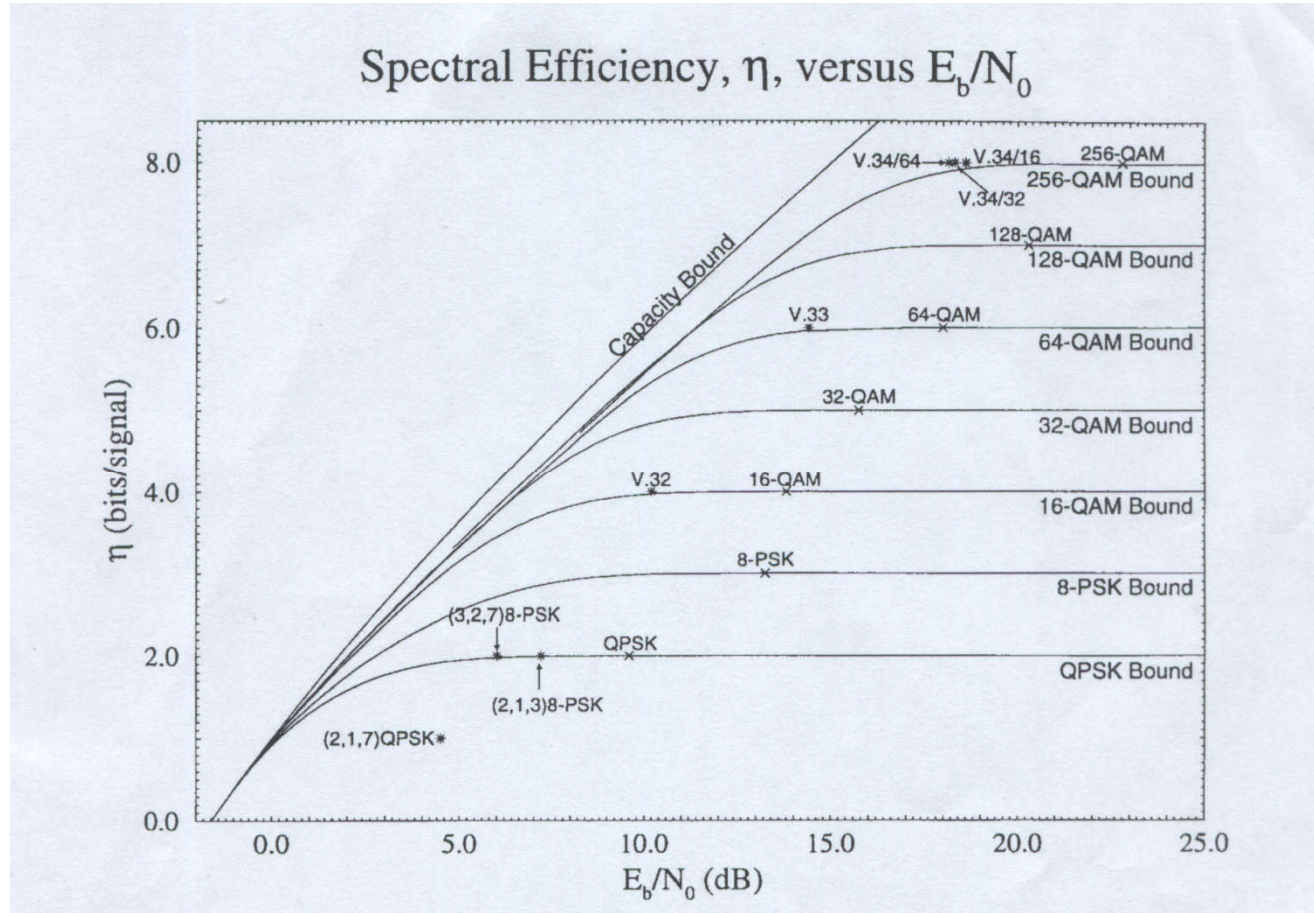
(a)QPSK



(b)16QAM

以图中的16QAM为例，计算信道容量。每象限中的4个信号的能量分别为 $2d^2, 10d^2, 10d^2, 18d^2$ 所以 $E_s = \frac{1}{4}(2 + 10 + 10 + 18)d^2 = 10d^2$ 对每个信号点都可计算出其实部与虚部，因此可通过数值解法解对应的方程，以求 η ，从而得到 $\eta - E_b / N_0$ 平面上的一个点。类似可得到 曲线。

8.5 数字调制系统的信道容量



8.5 数字调制系统的信道容量



① 容量界确定了当 η 给定时所需的最小的 E_b / N_0 , 其它曲线给出了为实现所要求的 η 所应采用的调制方式。

若要求 $\eta = 1$ 那么存在一种编码系统使得当 $\frac{E_b}{N_0} = 0dB$ 时, 能够进行可靠通信; 相反若 $\frac{E_b}{N_0} < 0dB$, 则无论采用什么编码系统, 通信都不可靠。

8.5 数字调制系统的信道容量



②从曲线中还可看到，使用合适的编码系统与非编码系统相比的编码增益。例如 $\eta = 2$ ，对于 $\eta = 2$ 的QPSK相干检测系统，当 $\frac{E_b}{N_0} = 9.6dB$ 时，误比特率为 10^{-5} ，认为是可靠通信。但在容量界曲线上对应着 $\frac{E_b}{N_0} = 1.8dB$ 。因此理想的编码与调制系统最大的编码增益为 $(9.6 - 1.8 =) 7.8dB$ 。

8.5 数字调制系统的信道容量



- ③ 容量界给出对于固定的 E_b/N_0 能够进行可靠传输的最大频谱利用率 η 。例如，如果给定 $\frac{E_b}{N_0} = 0dB$ ，则存在一种编码系统使得可靠地工作在 $\eta = 1$ 的条件，反之，当 $\frac{E_b}{N_0} = 0dB$ 时，不存在 $\eta > 1$ 的可靠通信的系统。

8.5 数字调制系统的信道容量



④从曲线上还可看到，使用合适的编码系统与非编码系统的比较所能增加的最大频谱利用率。例如，当 $\frac{E_b}{N_0} = 9.6dB$ 时，从容量界曲线上可得到实现可靠通信所能达到的最大频谱利用为 $\eta = 5.7$ ，因此，在这种情况下下的最大频谱利用率的增益为 $(5.7 - 2) = 3.7$ 。

8.5 数字调制系统的信道容量



- ⑤ 将容量界与各种调制系统容量界结合可以帮助我们在给定指标下自由地选择调制系统。从曲线中可以看到，当信噪比低时，数字调制容量曲线与容量界很接近；当信噪比高时，高进制调制比低进制调制更接近容量界。所以，当信噪比低时，采用进制低的调制就能达到信道容量；而当信噪比高时，要采用高进制调制才能达到信道容量。

本章小结



1. 离散时间平稳无记忆信道容量

$$C = \max_{p(x), E[f(x)] \leq \beta} I(X; Y)$$

其中 $p(x)$ 为输入概率密度, $E[f(x)] \leq \beta$ 为输入满足的约束。

2. 加性噪声信道容量

$$C = \max h(Y) - h(Z)$$

3. 加性高斯噪声信道容量

$$C = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{E}{\sigma_z^2} \right)$$

4. 并联加性高斯噪声信道容量

$$C = \frac{1}{2} \sum_i \log \left(1 + \frac{E_i}{\sigma_i^2} \right)$$

本章小结



5. AWGN信道的容量

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right)$$

6. 有色高斯噪声信道容量

$$P = \int_{f \in F_B} \left(B - \frac{N(f)}{|G(f)|^2}\right) df$$

$$C = \frac{1}{2} \int_{f \in F_B} \log \frac{|G(f)|^2 B}{N(f)} df$$

7. 二维数字调制信道容量

$$C_{[b/2 \text{ 自由度}]} = \log M - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \iint \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|Z|^2}{2}} \log \sum_n e^{-\left\{\frac{1}{2}|s'_n - s'_m|^2 - \text{Re}[Z^*(s'_n - s'_m)]\right\}} du' dv'$$

谢谢!

