第7章

有噪信道编码

本章主要内容

7.1概述

7.1.1 信道编码的基本概念

7.1.2 判决与译码规则

7.1.3 译码错误的概率

7.2常用译码准则

7.2.1 最大后验概率准则

7.2.2 最大似然准则

本章主要内容

7.3序列的最佳译码准则

- 7.3.1 线性分组码
- 7.3.2 序列最大似然译码
- 7.3.3 几种简单的分组码

7.4费诺(Fano)不等式

7.5有噪信道编码定理

- 7.5.1 联合典型序列
- 7.5.2 有噪信道编码定理
- 7.5.3 无失真信源信道编码定理

本章主要内容

7.6纠错编码技术简介

- 7.6.1 线性分组码的编译码
- 7.6.2 几种重要的分组码
- 7.6.3 卷积码简介

§7.1 概述

信道编码

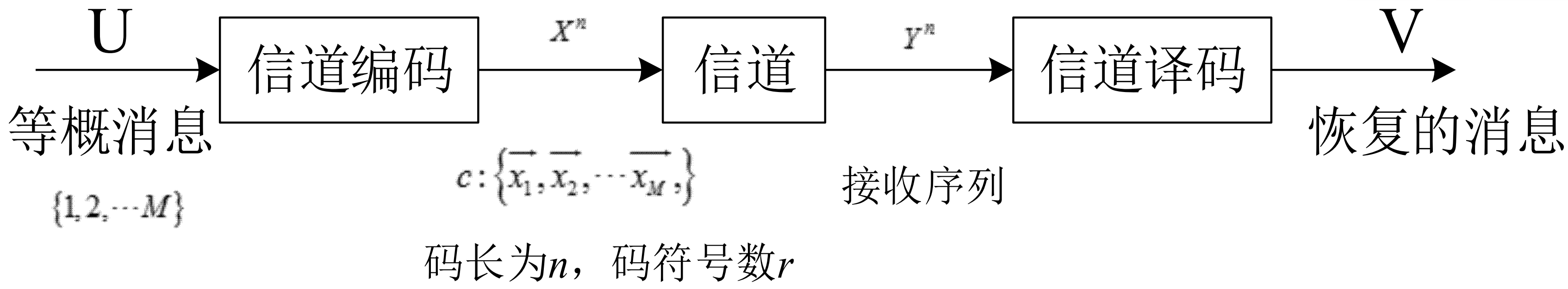
按照一定的规则给信源输出序列增加某些冗余符号，变成满足一定数学规律的码序列（或码字），再经信道进行传输。

（注意：与信源编码比较）

信道译码

按照与编码器同样的数学规律去掉接收序列中的冗余符号，恢复信源消息序列。

§7.1 概述



编码器与信道模型图

考虑分组信道编码，假定由信源发出M个等概率信息，经信道编码后生成M个码字，其中码符号集大小为r，码长为n；生成的n长码字 $\vec{x}$ 为信道输入，n长序列 $\vec{y}$ 为信道输出。

§7.1 概述

★ 一般地说，所加的冗余符号越多，纠错 能力就越强，但是传输效率降低。因此信道编码明显体现了传输有效性和可靠性的矛盾。

★ 数据传输系统中，译码过程总是比编码过程复杂，因此采用的译码算法对系统性能影响很大。

§7.1 概述

★ 衡量传输质量的指标：

- 平均错误率

★ 影响平均错误率的因素：

- 信道的统计特性
- 译码规则

§7.1 概述

★ 主要内容：

（1） 译码（判决）规则

（2） 错误概率

§7.1.2 判决与译码规则

单符号译码规则

定义 设信道输入与输出分别是 X 和 Y，$x \in X$， $y \in Y$，分别取自符号集 A 和 B，且 $A = \{a_1, a_2, \cdots a_r\}$，$B = \{b_1, b_2, \cdots b_s\}$ 定义译码（判决）规则为：

$$F(y = b_j) = a_i, i = 1, \cdots r, j = 1, \cdots s$$

含义 当接收到 b_j 就判定发送符号是 a_i，因此每一个信道输出都必须有一个信道输入与之对应，译码（判决）规则是一个有唯一结果的函数。

§7.1.2 判决与译码规则

说明　译码规则是人为制订的；

1. 对于同一个信道可制订出多种译码规则；

2. “好”的译码规则：平均错误率小。

§7.1.2 判决与译码规则

例7．1　一个二元对称信道输入和输出分别为X，Y，其中 $p_X(0)=\omega$ ，信道的转移概率为 $p_{Y|X}(0|0)=p_{Y|X}(1|1)=1-p$ ， $p_{Y|X}(1|0)=p_{Y|X}(0|1)=p$

分别求下面两种判决函数所对应的平均错误率并比较两的大小：

（1） $g(y=0)=0, g(y=1)=1$ ；

（2） $g(y=0)=1, g(y=1)=0$

§7.1.2 判决与译码规则

解：

（1） $p(e|x=0)=p_{Y|X}(1|0)=p$ ，$p(e|x=1)=p_{Y|X}(0|1)=p$

平均错误率：$P_{E1}=\omega p+(1-\omega)p=p$

（2） $p(e|x=0)=p_{Y|X}(0|0)=1-p$，$p(e|x=1)=p_{Y|X}(1|1)=1-p$

平均错误率：$P_{E2}=\omega(1-p)+(1-\omega)(1-p)=1-p$

很明显，当 $p\le 1/2$ 时，$P_{E1}\le P_{E2}$ ；否则 $P_{E1}>P_{E2}$ 。

此例说明，错误率和判决函数的选取有关。

§7.1.3 译码错误概率

错误概率的描述有两种

1. 误码率：传输码元出错概率（对二进制称误比特率）

2. 误字率：码字出错概率

误码率和误字率的比较：

一个码字一般由多个码元构成，任何一个或多个码元出错都使得码字出错，所以对于同一通信系统，误字率总比误码率高。

§7.1.3 译码错误概率

★ 错误概率的大小和信噪比大小有关。信噪比大，则错误概率小；反之信噪比小，则错误概率大。

★ 错误概率还与译码规则的选择有关。适当地选择译码规则使平均错误概率最小是提高传输可靠性的重要措施之一。

错误概率的计算

假设信道转移概率是 $P_{Y/X}(y=b_j \mid x=a_i)=p_{ij}$ ，采用的译码规则为：

$$F(y=b_j)=a^*, i=1,\cdots r, j=1,\cdots s \qquad (7.4)$$

即：接收到 b_j 的条件下，如果实际发送 a^* ，则译码正确，反之出现差错。因此满足以上译码规则的条件错误率为：

$$\sum_{a_i \neq a^*} P_{X/Y}(x=a_i \mid y=b_j) \qquad (7.5)$$

错误概率的计算

正确率为：

$$P_{X/Y}(x = a^* \mid y = b_j)$$

所以平均错误率为：

$$\begin{aligned} P_E &= \sum_j P_Y(y = b_j) \sum_{a_i \neq a^*} P_{X/Y}(x = a_i \mid y = b_j) \\ &= \sum_y p(y) \sum_{x \neq x^*} p(x/y) \\ &= 1 - \sum_y p(x^* y) \end{aligned} \qquad （7.6）$$

上式含义是，如果输出y与未被y作为译码结果的输入同时出现就属于译码错误。可计算平均正确率为

$$\overline{P_E} = 1 - P_E = \sum_y p(x^* y) \qquad （7.7）$$

§7.2 最佳判决与译码准则

★ 主要内容：

（1） 最大后验概率译码准则

（2） 最大似然准则

§7.2.1 最大后验概率准则

★ 最大后验概率准则：Maximum A Posteriori（MAP）

给定 $b_j \in B$，对所有 $a_i \in A$，当满足

$$P(a^* \mid b_j) \geq P(a_i \mid b_j) \qquad (7.10)$$

则选择判决函数 $F(b_j) = a^*$

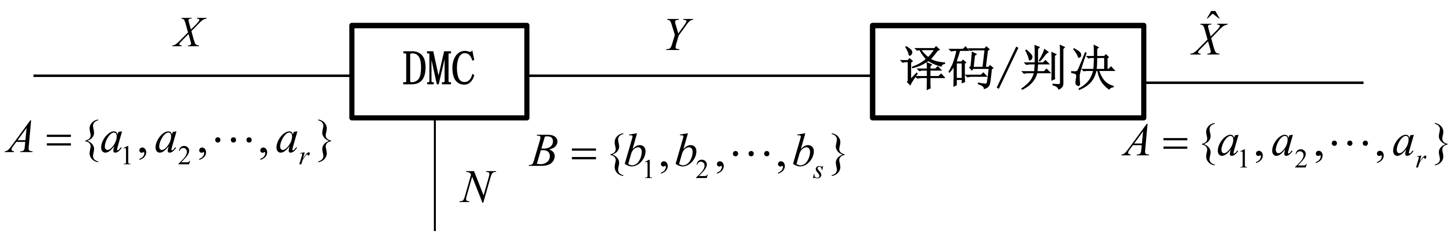
MAP准则就是将具有最大后验概率的信道输入符号作为译码输出。

§7.2.1 最大后验概率准则

★ 最大后验概率准则：

平均错误率最小的译码准则

★ 信道模型：



§7.2.1 最大后验概率准则

证明

$$F:\begin{cases} P(a^*|b_j)\ge P(a_i|b_j), & a_i\in A \\ F(b_j)=a^*\in A, & b_j\in B \end{cases}$$

$$P(b_j)P(a^*|b_j)\ge P(b_j)P(a_i|b_j)$$

$$P(a^*,b_j)\ge P(a_i,b_j)$$

$$F:\begin{cases} P(a^*,b_j)\ge P(a_i,b_j), & a_i\in A \\ F(b_j)=a^*\in A, & b_j\in B \end{cases}$$

$$P_E=1-\sum_y p(x^*,y)$$

MAP准则是平均错误率最小的译码准则

§7.2.1 最大后验概率准则

★ MAP准则总结：

(1) 由转移概率矩阵的每行分别乘 p(x)，得到联合概率矩阵；

(2) 对于每一列（相当于y固定）找一个最大的概率对应的X 作为译码结果；

(3) 所有译码结果所对应的联合概率的和为正确概率，其他矩阵元素的和为错误概率。

MAP准则是平均错误率最小的译码准则。

§7.2.1 最大后验概率准则

例7.3 设信道输入X等概率取值为{+1，-1}，通过一个加性高斯信道传输，加性噪声Z是均值为零，方差为 σ^2 的高斯随机变量，信道输出Y=X+Z，接收机用MAP准则接收，试确定判决函数。

解：后验概率密度为

$$p(x|y)=\frac{p(x)p(y|x)}{p(x=1)p(y|x=1)+p(x=-1)p(y|x=-1)}$$

$$=\frac{\exp[-(y-x)/(2\sigma^2)]}{\exp[-(y-1)^2/(2\sigma^2)]+\exp[-(y+1)^2/(2\sigma^2)]}$$

$$=\frac{1}{1+\exp(-2xy/\sigma^2)}$$

§7.2.1 最大后验概率准则

令 $\Lambda = \dfrac{p(x=1\,|\,y)}{p(x=-1\,|\,y)} = \dfrac{1+\exp(2y/\sigma^2)}{1+\exp(-2y/\sigma^2)}$

则 $\Lambda \ge 1$ 时，$g(y)=+1$；$\Lambda < 1$ 时，$g(y)=-1$；而当 $y \ge 0$ 时，有 $\Lambda \ge 1$；$y<0$ 时，有 $\Lambda < 1$；

所以，判决函数为

$$g(y) = \begin{cases} +1 & y \ge 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$$

§7.2.2 最大似然准则

在实际应用中，经常只知道信道的统计特性（转移概率），而不知道信源的统计特性（输入概率），这时求不出联合概率和后验概率，因此无法确定最佳译码规则。

§7.2.2 最大似然准则

★ 最大似然准则：Maximum likelihood（ML）

给定 $b_j \in B$，对所有 $a_i \in A$，当满足

$$P(b_j \mid a^*) \geq P(b_j \mid a_i) \quad (7.13)$$

则选择判决函数 $F(b_j) = a^*$

ML准则就是按最大转移概率确定的判决准则。

§7.2.2 最大似然准则

★ ML准则总结：

(1) 该准则可直接从信道转移矩阵中选定译码函数，即收到bj后，译成信道矩阵p中第j列中最大那个元素所对应的信源符号。

(2) 该准则本身不再依赖于先验概率p(ai)，但当输入符号等概时，它使平均错误概率PE最小。

(3) 所有信道输出和所对应判决结果的联合概率之和为平均正确率，其他的联合概率之和为平均错误率。

(4) 当输入符号等概或先验概率未知时，采用此准则。

两种准则等价的条件

最大似然准则　　　　　　　　最大后验概率准则

$$F:\begin{cases} F(b_j)=a^* \in A, & b_j \in B \\ P(b_j \mid a^*) \ge P(b_j \mid a_i), & a_i \in A \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad F:\begin{cases} F(b_j)=a^* \in A, & b_j \in B \\ P(a^*,b_j) \ge P(a_i,b_j), & a_i \in A \end{cases}$$

结论：当信道输入等概时，最大似然准则与最大后验概率准则等价。

两种准则等价的条件

证明

$$\left.\begin{array}{l} \text{输入等概} \Rightarrow P(a^{*})=P(a_i) \\ P(b_j \mid a^{*}) \ge P(b_j \mid a_i) \end{array}\right\} \Rightarrow P(a^{*})P(b_j \mid a^{*}) \ge P(a_i)P(b_j \mid a_i)$$

$$\Downarrow$$

$$P(a^{*},b_j) \ge P(a_i,b_j)$$

例题

例7.2

设信道输入X取值为(a_1, a_2, a_3)， 概率分别为1/2，1/4，1/4，信道输出Y取值为(b_1, b_2, b_3)，转移概率矩阵如下

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

求利用最大后验（MAP）和最大似然（ML）译码准则的判决函数。

例题

解：

最大后验：对每一列，比较联合概率$P(x, y)$

最大似然：对每一列，比较转移概率$P(y|x)$

例题

例7.2续

求两种译码准则各自的错误率。

解：

MAP：平均正确=0.25+0.15+0.125=0.525，

平均错误率=1−0.525=0.475

ML：平均正确率=0.25+0.1+0.125=0.475，

平均错误率=1−0.475=0.525

例题

例7.3（续）接收机用ML准则接收，试确定判决函数。

解　似然函数为

$$p(y\,|\,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-(y-x)^2/(2\sigma^2)]$$

令 $$\Lambda=\frac{p(y\,|\,x=1)}{p(y\,|\,x=-1)}=\exp(2y/\sigma^2)$$

类似于MAP判决情况，可得到与MAP相同的结果，

这是意料之中的，因为信道输入等概率。但当信道输入概率不相等时，MAP和ML判决函数和平均错误率通常是不同的，而MAP准则是使平均错误率最小的。

例题

如果信道输入概率和转移概率矩阵给定，那么可对两种准则使用要点总结如下：

MAP准则

由转移概率矩阵的每行分别乘p(x)，得到联合概率矩阵；对于每一列（相当于y固定）找一个最大的概率对应的x作为判决结果；所有判决结果所对应的联合概率的和为正确概率，其他矩阵元素的和为错误概率。

ML准则

对转移概率矩阵中每列选择最大的一个元素对应的x作为判决结果；所有信道输出和所对应判决结果的联合概率之和为平均正确率，其他的联合概率之和为平均错误率。

§7.3 信道编码与最佳译码

★ 主要内容：

（1） 汉明距离

（2） 序列最大似然译码

§7.3.1 汉明距离

汉明距离

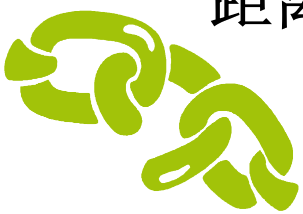
定义　设两码字为 $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n],\vec{y}=[y_1,\ldots,y_n]$，定义它们的汉明距离为

$$d(\vec{x},\vec{y})=\sum_{k=1}^{n}x_k\oplus y_k \tag{7.16}$$

其中，$\oplus$ 为模二加运算。

举例　码字 $\vec{x}=[1101110]$ 和 $\vec{y}=[1010001]$ 的汉明距离是6。

码的最小距离　一个码字集合中任意两码的汉明距离最小值，称为码的最小距离，用 $d_{\min}$ 来表示。



§7.3.1 汉明距离

例7.5

一个线性分组码

$$C=\{00000,01010,10101,11111\}$$

求该码的最小距离。

解：最小距离=2

§7.3.2 序列最大似然译码

定义

设信道输入与输出分别是多维随机矢量集合：

$$X^n = X_1,\cdots,X_n \quad Y^n = Y_1,\cdots,Y_n$$

其中，序列

$$\vec{x} = [x_1,\ldots,x_n] \in X^n \quad \vec{y} = [y_1,\ldots,y_n] \in Y^n \; x_i \in X_i, y_i \in Y_i$$

分别取自符号集A和B，且

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \quad B = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$$

其中，$\vec{\alpha}_k \in A^n, \vec{\beta}_k \in B^n, k = 1,\cdots r^n, l = 1,\cdots s^n$

§7.3.2　序列最大似然译码

定义

如果对于所有k, 满足

$$p(\vec{y}\,|\,\vec{x}=\vec{\alpha}^{*}) \geq p(\vec{y}\,|\,\vec{x}=\alpha_k) \qquad (7.20)$$

那么就选择译码函数为$F(\vec{y})=\vec{\alpha}^{*}$，称为序列的最大似然准则。

转移概率$p(\vec{y}\,|\,\vec{x})$称为似然函数。

与单符号情况相同，当消息序列等概或概率未知时用最大似然译码准则。

§7.3.2 序列最大似然译码

定理7.1

一个最小距离为d的二元分组码能纠t个错的充要条件是：$d \ge 2t+1$

定理7.2

对于无记忆二元对称信道（错误概率小于等于1/2），最大似然译码准则等价于最小汉明距离准则。

§7.3.2　序列最大似然译码

定理7.2的证明

设信道的输入和输出分别为序列 $\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]$，$\vec{y}=[y_1,\ldots,y_n]$，似然函数为

$$p(\vec{y}\mid\vec{x})=\prod_{i=1}^{n}p(y_i\mid x_i) \tag{7.22}$$

设$\vec{x},\vec{y}$的汉明距离为d，如果x_i出错，那么y_i与x_i不同，从而使汉明距离增加1。

根据二元对称信道的特性，有

$$p(y_i\mid x_i)=\begin{cases}p & x_i\neq y_i\\ 1-p & x_i=y_i\end{cases}$$

§7.3.2 序列最大似然译码

定理7.2的证明

其中 $p \le 1/2$，所以似然函数可表示为

$$p(\vec{y}\,|\,\vec{x}) = (1-p)^{n-d}\,p^{d}$$

取对数，得

$$\log p(\vec{y}\,|\,\vec{x}) = n\log(1-p) + d\log[p/(1-p)] \qquad (7.23)$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{n为定值}\\ \text{信道固定, p为定值}\\ p \le 1/2\end{array}\right\} \Rightarrow \text{d最小时可使上式的值最大。}$$

对于固定的 $\vec{y}$ ，选择的所有可能的输入序列，将与 $\vec{y}$ 汉明距离最小的序列x作为译码输出，这种译码方法也称为最小汉明距离准则。证毕。

§7.3.2　序列最大似然译码

例7.6

一个线性分组码

$$C = \{00000, 11111\}$$

求该码的最小距离，该分组码能纠几个错？

解：

$$d_{\min} = 5$$

能纠2个错

§7.3.2　序列最大似然译码

例7.7

对等概信源符号a0和a1进行重复码编码，对应的码字是000,111；编码序列通过错误概率为p(≤1/2)的二元对称信道传输，接收端利用最大似然译码准则。

（1）求重复码的码率

（2）求重复码的最小码距离与可纠错误数

（3）求译码错误率PE，并将PE与未编码错误率作比较。

§7.3.2 序列最大似然译码

解：

（1）码率：1/3

（2）最小码距离3，可纠错误数1。

§7.3.2　序列最大似然译码

解：

可利用最小汉明距离准则：

Y X	000	001	010	011	100	101	110	111
000	$(1-p)^3$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)p^2$	$(1-p)^2p$	$(1-p)p^2$	$(1-p)p^2$	p^3
111	p^3	$(1-p)p^2$	$(1-p)p^2$	$(1-p)^2p$	$(1-p)p^2$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^2p$	$(1-p)^3$
判决	000	000	000	111	000	111	111	111

§7.3.2　序列最大似然译码

解：

分别计算y的每一个可能序列与000和111的汉明距离，将汉明距离小的输入序列作为译码输出。

例如，接收为010，与000的距离为1，而和111的距离为1，所以译码输出为000；依次类推，得到表中的下面一行。

通过计算，得到正确率：$1-p_E=(1-p)^3+3(1-p)^2p$

错误率：$p_E=p^3+3(1-p)p^2$

未编码错误率为p，与PE 差值小于等于0。

§7.4 费诺(Fano)不等式

★ 主要内容：

（1）信道疑义度

（2）费诺(Fano)不等式

信道疑义度

设信道输入与输出分别是X、Y,条件熵 $H(Y|X)$ 为信道疑义度包含如下定义：

（1）信道疑义度表示接收到Y条件下X的平均不确定性；

（2）根据 $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$，信道疑义度又表示X经信道传输信息量的损失；

（3）接收的不确定性由信道噪声引起，在无噪声情况下，$H(X|Y)=0$。

费诺(Fano)不等式

★ 费诺不等式：

设信道输入与输出分别是X、Y，输入符号的数目为r，那么信道疑义度满足

$$H(X|Y) \le H(p_E) + p_E \log(r-1) \qquad (7.29)$$

其中，p_E 为平均错误率。

费诺(Fano)不等式

证明

设译码规则由（7.4）确定，那么

$$H(X|Y)-H(p_E)-p_E\log(r-1)$$

$$=-\sum_x\sum_y p(xy)\log p(x|y)+p_E\log p_E+(1-p_E)\log(1-p_E)-p_E log(r-1)$$

$$=-\sum_y\sum_{x\neq x^*}p(xy)\log p(x|y)+\sum_y\sum_{x\neq x^*}p(xy)\log\frac{p_E}{r-1}$$

$$-\sum_y p(x^*y)\log p(x^*|y)+\sum_y p(x^*y)\log(1-p_E)$$

$$=\sum_y\sum_{x\neq x^*}p(x\,y)\log\frac{p_E}{(r-1)p(x|y)}+\sum_y p(x^*y)\log\frac{1-p_E}{p(x^*|y)}$$

$$\leq\{\sum_y\sum_{x\neq x^*}p(xy)[\frac{p_E}{(r-1)p(x|y)}-1]+\sum_y p(x^*y)\,[\frac{1-p_E}{p(x^*|y)}-1]\}(\log e)$$

费诺(Fano)不等式

证明

$$\le\{\sum_{y}\sum_{x\neq x^*}p(xy)[\frac{p_E}{(r-1)p(x|y)}-1]+\sum_{y}p(x^*y)\,[\frac{1-p_E}{p(x^*|y)}-1]\}(\log e)$$

$$=\{\sum_{x\neq x^*}\sum_{y}p(y)\frac{p_E}{(r-1)}-\sum_{y}\sum_{x\neq x^*}p(x,y)+\sum_{y}(1-p_E)p(y)-\sum_{y}p(x^*y)\}(\log e)$$

$$=p_E-p_E+(1-p_E)-(1-p_E)=0$$

当下面两个条件同时成立时，等号成立：

（1） $\frac{p_E}{(r-1)p(x|y)}-1=0\Rightarrow p(x|y)=\frac{p_E}{r-1}\Big|_{x\neq x^*}$ （7.30a）

（2） $\frac{1-p_E}{p(x^*|y)}-1=0\Rightarrow p(x^*|y)=1-p_E$ （7.30b）

上面条件表明，当Y给定后判决错误的概率相等时，不等式取等号。证毕。

费诺(Fano)不等式

★ 注：

(1)无论什么译码规则，费诺不等式成立；译码规则变化只会改变 p_E 的值。

（2）信道疑义度由信源、信道及译码规则所限定；因为信源决定p(x)，r，而p(x)，p(y|x)及译码规则决定 p_E。

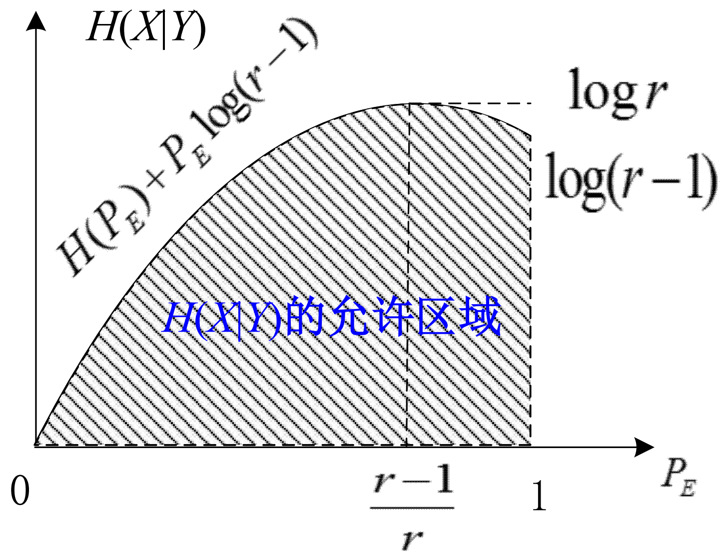
（3）对不等式含义的理解：当接收到Y后，关于X平均不确定性的接触可以分成两步来实现：

第1步：确定传输是否有错，接触这种不确定性所需信息量为 $H(p_E)$；

第2步：当确定传输出错后，判断究竟是哪一个出错，解除这种不确定性所需最大信息量是 $\log(r-1)$ 。

费诺(Fano)不等式

下图为费诺不等式示意图。图中，曲线下面的区域为信道疑义度被限定的区域。现求曲线的极大值。



费诺(Fano)不等式

$$H(p_E)+p_E\log(r-1)=p_E\log\frac{r-1}{p_E}+(1-p_E)\log\frac{1}{1-p_E}$$

$$\leq\log[p_E\frac{r-1}{p_E}+(1-p_E)\frac{1}{1-p_E}]=\log r$$

仅当 $\frac{r-1}{p_E}=\frac{1}{1-p_E}$ 即 $p_E=\frac{r-1}{r}$ 时等式成立。

由于 $p_E\leq 1$ ，当 $p_E=1$ 时，有

$$H(p_E)+p_E\log(r-1)=\log(r-1)$$

§7.5 有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理（香农第二定理）：

设有一离散无记忆平稳信道的容量是C，则只要信息传输率$R<C$，总存在一种编码，使当码序列长度n足够长时，译码错误概率p_E任意小；反之，当信息传输速率$R>C$，对任何编码方式，译码差错率大于0。

1. 随机编码

★ 定义：

每个n长码字的每一个符号概率按照达到信道容量的输入概率p(x)独立选取，从而随机产生2^{nR}个码字，这种编码方式称为随机编码。

★ 说明：

码符号的选择是随机的，从而码字的选择是随机的，码字集合的选择也是随机的。

“随机”仅指选择方式“随机”，当选择后，码集合便确定。

2. 联合典型序列译码

★ 译码准则：

设接收序列为y，如果下面条件满足，则译码器输出第m条消息：

（1）(c_m, y) 是典型序列

（2）没有其他消息对应的码字 $c_k(k \neq m)$ 使得 (c_k, y) 是典型序列

3. 译码平均错误率

★ 译码平均错误率 p_E 的估计：

由于寻找最佳，即 p_E 最小时的编码很困难，所以采用求 $\overline{p_E}$ 的方法。

即对所有的随机编码进行平均，$\overline{p_E} = E_C\{p_E(C)\}$

若 $n \to \infty$ 时，$\overline{p_E}$ 任意小，那么至少有一种编码满足要求。

4. 定理的意义

★ 定理的意义：

该定理纠正了人们认为的提高可靠性必须要降低有效性的传统观念，提出高效（接近容量）和高可靠性的编码是存在的，为信道编码理论和技术的研究指明了方向。

定理给出了信道编码的理想极限性能，是信道编码理论的基础。

5. 定理的补充说明

★ 信息传输速率为R=(logM)/n，表示每个码符号携带的信息量。

★ 定理仅指出编码的存在性，并未给出编码的具体方案。

★ 寻找最佳信道编码的困难
- 要求编码序列足够长，“难实现”；
- r^{nM} 很大，“难寻找”；
- 采用随机编码，“难分析”。

★ 信道容量是进行可靠传输的最大信息传输速率。

§ 7.5.1　有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之正定理的证明

利用联合典型序列的方法证明。首先进行如下假设：

离散无记忆平稳信道的转移概率：p_{ij}；

输入与输出序列：$\vec{x}=[x_1,\ldots,x_n]$ 和 $\vec{y}=[y_1,\ldots,y_n]$，n为序列长度；

达到信道容量的输入概率：$P(x_k=i)=p_i$，$1\le k\le n$

信道输出：$P(y_k=j)=\sum_i p_i p_{ij}$

输入与输出的联合概率：$P(x_k y_k=ij)=p_i p_{ij}$

输入/输出序列：$\overrightarrow{xy}=[x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n]$

序列中 $x_k y_k$ 取值ij的数目：n_{ij}

§7.5.1 有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之正定理的证明

可得到$p(\overrightarrow{xy}) = \prod_{i,j} (p_i p_{ij})^{n_{ij}}$

如果$n_{ij} = np_i p_{ij}(1 \pm \delta)$，对每个$i$，$j$成立，称$\delta$－为$\overrightarrow{xy}$ 典型序列。

对任何δ－ 典型序列 $\overrightarrow{xy}$ ，有

$$\frac{\log p(\overrightarrow{xy})}{n} = \sum_{i,j} p_i p_{ij} (1 \pm \delta) \log(p_i p_{ij}) = H(XY)(1 \pm \delta)$$

设 n_i 为输入序列中取值i的符号数，那么

$$n_i = \sum_j n_{ij} = \sum_j np_i p_{ij} (1 \pm \delta) = np_i (1 \pm \delta)$$

§7.5.1 有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之正定理的证明

所以，如果 $\overrightarrow{xy}$ 是 $\delta-$ 典型序列，满足如下关系：

$$p(\overrightarrow{xy}) = 2^{-nH(XY)(1\pm\delta)} \tag{7.32}$$

$$p(\vec{x}) = 2^{-nH(X)(1\pm\delta)} \tag{7.33}$$

$$p(\vec{y}) = 2^{-nH(Y)(1\pm\delta)} \tag{7.34}$$

$\vec{x}$,$\vec{y}$也是 $\delta-$ 典型序列，定义 $\overrightarrow{xy}$ 是$\delta-$ 典型序列的 $\vec{x}$ 集合为 $F_{\vec{y}}$。

$$\left.\begin{array}{l} p(\vec{y}) \le 2^{-nH(Y)(1-\delta)} \\ p(\overrightarrow{xy}) \ge 2^{-nH(XY)(1+\delta)} \end{array}\right\} p(\vec{x}/\vec{y}) \ge 2^{-nH(XY)(1+\delta)+nH(Y)(1-\delta)}$$

$$1 = \sum_{x} p(\vec{x}\,|\,\vec{y}) \ge |F_{\vec{y}}|\, 2^{-nH(XY)(1+\delta)+nH(Y)(1-\delta)}$$

$F_{\vec{y}}$ 中的元素个数为 $|F_{\vec{y}}|$

§7.5.1　有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之正定理的证明

所以，$\left|F_{\vec{y}}\right| \le 2^{nH(XY)(1+\delta)-nH(Y)(1-\delta)}$

下面，选择由M个输入序列$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_M$（每个序列长度为n）组成的码，随机选择每个序列中的每个符号，且每个符号的概率使信道达到容量。译码原则采用仙农提出的“典型序列”原则：

给定一接收序列 $\vec{x}_{m'}$ ，选择唯一的消息 m'，使得码字 $\vec{y}$ 在 $F_{\vec{y}}$ 中。

如果 $F_{\vec{y}}$ 中不包含任何码字或包含多于一个的码字，就拒绝译码，此时译码出错。如果编码器的输入是消息 m ，那么仅当 $\vec{x}_m\vec{y}$ 不是典型序列或者对任何其他码字 m' ，有 $\vec{x}_{m'} \in F_{\vec{y}}$ 时，译码出错。

§7.5.1 有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之正定理的证明

设 T_δ 为 $\delta-$ 典型序列 $\overrightarrow{xy}$ 的集合，在随机编码集合中，错误概率不依赖于消息m，且序列集合 $X_m^n Y^n$ 的每一个元素 $x_k y_k$ 都独立地以概率 $p_i p_{ij}$ 选取，所以错误率的上界为

$$P(E) \le (1-P(T_\delta)) + (M-1)P(X_{m'}^n \in F_{\vec{y}}) \qquad (7.38)$$

除发送码字 X_m^n 之外的每个其他码字独立于接收序列 Y^n，而每个 $\delta-$ 典型序列 $X_{m'}^n$ 的概率最大为 $2^{-nH(X)(1-\delta)}$，$C=\max\limits_{p(x)}[H(X)-H(X|Y)]$

因此

$$P(X_{m'}^n \in F_{\vec{y}}) \le 2^{-nH(X)(1-\delta)}\,2^{n\{H(X/Y)+\delta[H(XY)+H(Y)]\}} = 2^{-n\{C+\delta[H(X)+H(XY)+H(Y)]\}} \qquad (7.39)$$

§7.5.1　有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之正定理的证明

信息传输速率是$R=(\log_2 M)/n$比特/符号. 如果$R<C$，则$\eta=C-R>0$

错误率的上界式中用M-1用M代替，得

$$P(E)\le(1-P(T_\delta))+2^{-n\{\eta+\delta[H(X)+H(XY)+H(Y)]\}}\qquad(7.40)$$

选择$\delta=\eta/\{2(H(X)+H(XY)+H(Y))\}$，那么上式变成

$$P(E)\le(1-P(T_\delta))+2^{-n\eta/2}$$

对于任何$\varepsilon>0$，选择n足够大，使得$P(T_\delta)\ge1-\varepsilon/2$且$2^{-n\eta/2}\le\varepsilon/2$

对于足够大的n，有$P(E)\le\varepsilon$。

§7.5.1 有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之逆定理的证明

当信息传输率R>C时，传输错误率必大于0。

证明

仍然证明DMC情况。对于图7.5.1，由数据处理定理有

$I(U^L;V^L)\le I(X^n;Y^n)$ 因为信道无记忆，$I(X^n;Y^n)\le nC$ ，所以

$I(U^L;V^L)\le nC$ ， 即：$H(U^L)-H(U^L|V^L)\le nC$

根据Fano不等式，有

$$H(U^L)-nC\le H(U^L|V^L)\le L[H(\langle p_E\rangle)+\langle p_E\rangle\log(r-1)] \qquad (7.41)$$

§7.5.1 有噪信道编码定理

★ 有噪信道编码定理之逆定理的证明

当信息传输率R>C时，传输错误率必大于0。

证明

将$H(U^L)=LH_L(U)$ 代入上式，得到

$$LH_L(U)-nC\le L[H(\langle p_E\rangle)+\langle p_E\rangle\log(r-1)]$$

$$\frac{L}{N}H_L(U)-C\le\frac{L}{N}[H(\langle p_E\rangle)+\langle p_E\rangle\log(r-1)]$$

此处$R=\frac{L}{N}H_L(U)$ 为信息传输速率。

当$\frac{L}{N}H_L(U)-C>0$ 时，上式的右边大于0，所以p_E不为0，即出现译码差错。

§7.5.2　无失真信源信道编码定理

★ 无失真信源信道编码定理：

设有一离散无记忆平稳信道的每秒容量是C，一个离散信源每秒的熵是H，那么，如果$H<C$，总存在一种编码系统，使得信源的输出以任意小的错误概率通过信道传输；反之，如果$H>C$时，对任何编码系统，译码差错率$p>0$。

§7.5.2 无失真信源信道编码定理

例7.9

有个二元对称信道，错误率为p=0.02。设该信道以1500二元符号/秒的速率传送消息，现有一0,1独立更改，长度为14000的二元符号消息序列通过信道进行传输，问：

（1）该信道能否在10秒内将消息序列无差错传输？

（2）实现该消息序列无差错传输的最短时间是多少？

§7.5.2　无失真信源信道编码定理

解：

二元对称信道容量：

$C = 1 - H(0.02) = 1 - 0.1414 = 0.8586$ 比特/信道符号，

每秒信道容量：$C = 0.8586 \times 1500 = 1288$ 比特/秒，

信源熵：$H(X) = 0.5 \times \log 2 = 1$比特/信源符号，

每秒信源熵率：$H = 1 \times 14000 / 10 = 1400$ 比特/秒。

因为1400比特/秒>1288比特/秒，所以不能无差错传播.

实现无差错传播最短时间：$14000 / T < 1288$ ，得 $T > 10.87$ 秒。

7.6.1 线性分组码的编译码

1. 生成矩阵

一个（n，k）线性分组码中的码字可用n维矢量空间的一个n维行矢量 $\boldsymbol{v}$ 表示，记为 $v=(v_{n-1},\cdots,v_0)$，对应的信息分组用一个k维行矢量 $\boldsymbol{u}$ 表示，记为 $u=(u_{k-1},\cdots,u_0)$。在二进编码中，所有都取值0或1。$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{u}$ 之间的关系用矩阵表示

$$\boxed{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{uG}} \qquad (7.43)$$

其中，$\boldsymbol{G}$为分组码的生成矩阵，阶数为k × n。

7.6.1　线性分组码的编译码

将 $\boldsymbol{G}$ 写成

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{g}_1^T,\cdots,\boldsymbol{g}_k^T)^T \qquad (7.44)$$

其中 $g_i(i=1,\cdots,n)$ ，为k维行矢量，T为转置。

由（7.43），有

$$\boldsymbol{v}=u_{k-1}\boldsymbol{g}_1+\cdots u_0\boldsymbol{g}_k \qquad (7.45)$$

可见，码字是生成矩阵各行的线性组合。为保证不同的信息分组对应不同的码字，g_i 应该是线性无关的。

7.6.1 线性分组码的编译码

对于码字的前k位是信息位，后n-k位是校验位的系统码，有 $v_{n-i} = u_{k-i}(i = 1,\cdots,k)$ 。所以通常的系统分组码生成矩阵 $\boldsymbol{G}$ 为如下形式：

$$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{I}_k \vdots \boldsymbol{P}_{kr}) \qquad (7.46)$$

其中，I_k 为k 阶单位矩阵，P_{kr} 为k×r(r=n-k)阶矩阵。将（7.46）代入（7.43），得

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} \vdots \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}_{kr}) \qquad (7.47)$$

所以，矩阵 P_{kr} 确定了分组码校验位和信息位的关系。

7.6.1　线性分组码的编译码

例7.10　设C1为一个（7，4）系统分组码，其生成矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\qquad（7.48）$$

求信息分组0011，1100对应的码字。

解：设信息分组0011，1100对应的码字分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$，那么

$$\boldsymbol{v}_1=(0011)\boldsymbol{G}=(0011110)$$

$$\boldsymbol{v}_2=(1100)\boldsymbol{G}=(1100001)$$

2. 奇偶校验矩阵矩阵

例7.10（续） 导出该码校验位与信息位的关系。

解

设3个校验位分别为w_2, w_1, w_0，根据（7.47），有

$$(w_2\, w_1\, w_0) = (u_3\, u_2\, u_1\, u_0)\boldsymbol{P}_{kr} = (u_3\, u_2\, u_1\, u_0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以

$$w_2 = u_3 + u_2 + u_1$$

$$w_1 = u_3 + u_2 + u_0$$

$$w_0 = u_3 + u_1 + u_0$$

2. 奇偶校验矩阵矩阵

在一般情况下，有

$$\left(\boldsymbol{P}_{kr}^{T} \vdots \ \ \boldsymbol{I}_{r}\right)\boldsymbol{v}^{T}=\left(\boldsymbol{P}_{kr}^{T} \vdots \ \ \boldsymbol{I}_{r}\right)\left(\boldsymbol{u} \vdots \boldsymbol{u}\boldsymbol{P}_{kr}\right)^{T}=\left(\boldsymbol{P}_{kr}^{T}\boldsymbol{u}^{T}+\boldsymbol{P}_{kr}^{T}\boldsymbol{u}^{T}\right)=\boldsymbol{0}^{T} \qquad (7.49)$$

上面，$\boldsymbol{0}$ 是一个n维行零矢量。

记

$$\boldsymbol{H}=\left(\boldsymbol{P}_{kr}^{T} \vdots \ \ \boldsymbol{I}_{r}\right) \qquad (7.50)$$

H称为分组码的奇偶校验矩阵，这是一个r× n（n=k+r）阶矩阵。

2. 奇偶校验矩阵矩阵

（7.49）意味着，对任何码字都必须满足

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}^{T}=\boldsymbol{O}^{T} \tag{7.51}$$

因此，（7.49）可用来验证某n维矢量是否为码字。

根据（7.43）、（7.51）可得

$$\boldsymbol{G}\boldsymbol{H}^{T}=\boldsymbol{O}_{n,n-k} \tag{7.52}$$

这里，$\boldsymbol{O}_{n,n-k}$ 表示一个k×（n-k）阶的全零矩阵。

2. 奇偶校验矩阵矩阵

例7.10（续）求分组码的奇偶校验矩阵H，并计算 GH^T 。

解

根据（7.50），得

$$
\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

2. 奇偶校验矩阵矩阵

$$GH^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

3. 伴随式

在传输过程中，接收码字v可能发生差错，设差错矢量为e，则接收矢量为

$$r = v + e \tag{7.53}$$

设

$$e = (e_{n-1}, \cdots, e_0) \tag{7.54}$$

如果 $e_i \neq 0$，就表示第i个码元 v_i 出错。

令

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{H}\mathbf{r}^T \tag{7.55}$$

称s 为分组码的伴随式。利用（7.53）和（7.51），得

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{H}(\mathbf{v}+\mathbf{e})^T = \mathbf{H}\mathbf{e}^T \tag{7.55}$$

3. 伴随式

注：

（1）伴随式仅与错误有关，是*H*各列的线性组合；

（2）伴随式是r=n-k维行矢量；

（3）可以建立伴随式与错误矢量之间的对应关系，这些错误矢量称为可纠错误图样，通常选择重量最小的错误矢量作为可纠错误图样。

4. 分组码译码

根据伴随式可以对分组码译码，译码过程如下：

（1）根据（7.55）计算伴随式s;

（2）根据伴随式s查找对应的可纠错误图样e ；

（3）计算 $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{r} + e$，$\hat{\boldsymbol{v}}$ 为纠错后的码字。

4. 分组码译码

例7.10（续）设接收序列为0111110，试利用伴随式进行译码。

解

计算伴随式：
$$\boldsymbol{s}^T=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&1&0\\1&0&1&1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=(110)^T$$

根据表7.2，得可纠错误图样e =（ 0100000 ），译码结果：

$$\hat{\boldsymbol{v}}=(0111110)\oplus(0100000)=(0011110)$$

4. 分组码译码

下面介绍标准阵列译码方法：

将码字集合$C=\{v\}$看成n维线性空间 Ω 的一个子集，

设 $s\in\Omega$ ，子集$\{v+s\}$称作陪集。通过选择不同的s，可以构成Ω 中 2^{n-k} 个互不相交的陪集，每个陪集中重量最小的n维矢量称做陪集首。按陪集首的重量由小到大将陪集排序，第1个陪集对应的是码字集合，陪集首是零矢量，构成标准阵列的第1行。

4. 分组码译码

如果差错图样是某陪集首，那么接收序列就是对应的陪集中的元素。如果接收序列就是某陪集中的元素，那么该矢量与其陪集首相加得到的码字（与接收序列位于同一列的码字）就是译码结果。这就是标准阵列译码原理。

例7.11（续）若接收序列为0111，试标准阵列进行译码。

解　接收序列为0111在陪集4，第3列，对应码子字为0101。

5. 分组码的译码错误率计算

从上面的分析可知，如果可纠错图样就是实际发生的错误，那么译码正确，否则译码错误。

所以译码错误率为

$$p_E = 1 - \text{可纠错图样的概率}$$

设i为重量i的错误图样的个数，那么

$$\boxed{p_E = 1 - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i (1-p)^{n-i}} \qquad (7.57)$$

其中，p为信道传输单符号错误率。

5. 分组码的译码错误率计算

例7.11（续）设消息通过一个错误率为10^{-2}的二元对称信道传输，计算译码错误率并与未编码系统比较。

解

陪集首就是可纠错图样，译码错误率为：

$$p_E = 1 - [(1-p)^4 + 3p^3(1-p)]\Big|_{p=10^{-2}} = 0.0103$$

对于未编码系统，4个消息可用00，01，10，11传送，传输错误率为：

$$p_E = 1 - (1-p)^2\Big|_{p=10^{-2}} = 0.0199$$

可见，编码系统比未编码系统的传输错误率低。

7.6.2 几种重要的分组码

1. 汉明码

这是一个纠单错的码，分组长度 $n=2^m-1$，信息位数 $k=n-m$，校验位数 $r=m, m\geq 3$，码的最小距离 $d_{min}=3$，码率为 $R=(n-m)/n=1-m/(2^m-1)$。汉明码可以是循环码。

2. **BCH码**

这是一类纠多重错误的码，分组长度 $n=2^m-1, m\geq 3$，校验位数 $n-k\leq mt$，码的最小距离 $d_{\min}\geq 2t+1$。BCH码是一种纠错能力很强的码，在码的参数选择上有较大的灵活性，可以选择码长、码率以及纠错能力等。

7.6.2 几种重要的分组码

3. 里德-所罗门码

简称RS码，是BCH码的一个子类，是非二进制码。该码的参数：每符号m比特，分组长度 $n=2^m-1$符号，信息符号数$k=n-2t$，码的最小距离$d_{\min}\geq 2t+1$。RS码非常适合纠突发错误，并经常在级联码中用做外码。

7.6.3 卷积码简介

卷积码是信息序列通过一个有限状态卷积编码器产生的。常用的编码器由k个m级移位寄存器和n个模二加器组成。这些模二加器的输入来自移位寄存器的某些抽头。当编码器工作时，将输入序列分成每组k比特的并行数据流，依次进入k个移位寄存器，每次产生n个模二加 结果轮流从编码器的输出端输出。R=k/n称为编码器的码率，v=m+1称为卷积码的约束长度，常记为（n，k，m）卷积码。

这里研究k=1情况的卷积码。

7.6.3 卷积码简介

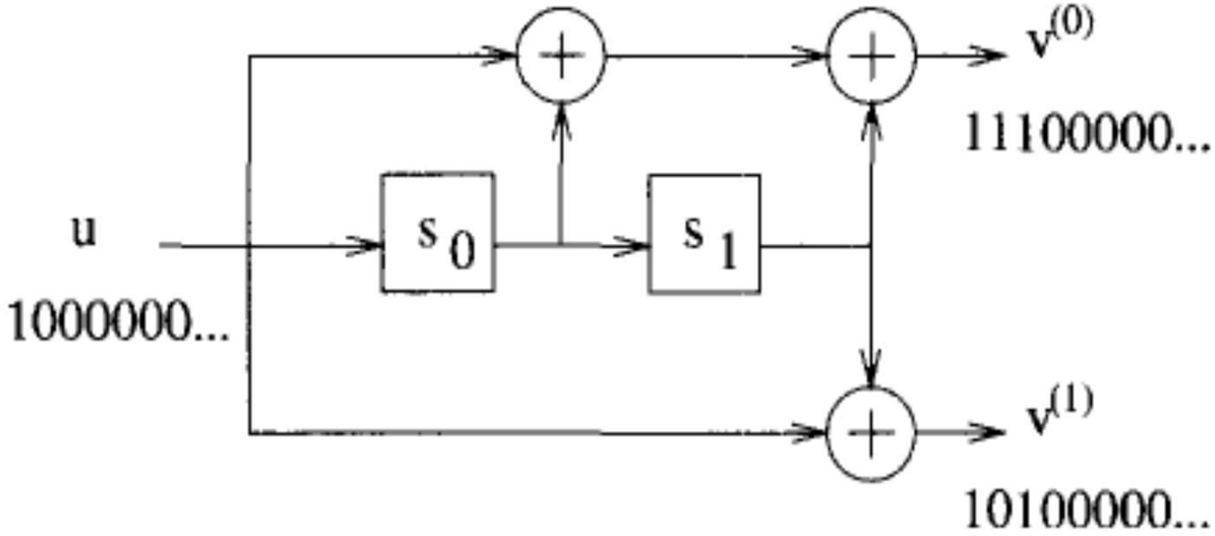


图7.4　卷积码工作原理

图7.4为一个（2，1，2）卷积码器的工作原理图。在编码器中，移位寄存器的各级与移位寄存器的连接关系可用生成多项式来表示，其中多项式的系数1表示连接，0表示不连接，为简化也可用行矢量表示。

7.6.3 卷积码简介

例如，图中，上、下支路输出对应的生成多项式分别为：

$$g_0(D) = 1 + D + D^2 \quad \text{和} \quad g_1(D) = 1 + D^2 \qquad (7.58)$$

也可简单表示为 $g_0 = (1\ \ 1\ \ 1)$ 和 $g_1 = (1\ \ 0\ \ 1)$。

移位寄存器的内容确定了编码器的状态，该编码器有 $2^2=4$ 个状态。通常，编码器的初始状态定为0状态。即移位寄存器的内容为全0。编码器工作时，输入信息序列按照时钟节拍脉冲不断进入编码器，在每个时钟周期先后产生两个模二加器的输出，从而产生编码序列，随后信息符号移入移位寄存器，使编码器进入新状态。

7.6.3　卷积码简介

设当前输入为X_n，移位寄存器的内容为X_{n-1}, X_{n-2}，那么对应的上、下支路输出就是 $X_n \oplus X_{n-1} \oplus X_{n-2}$和$X_n \oplus X_n \oplus X_{n-2}$，写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} y_{n0} & y_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.59}$$

7.6.3 卷积码简介

如果考虑输入序列是一条半无限长的序列，那么输入与输出的关系可写成如下矩阵形式：

$$\boxed{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\boldsymbol{G}} \qquad (7.60)$$

其中，x，y分别表示编码器的输入与输出半无限行矢量，G为卷积码的生成矩阵（设编码器从零状态开始）：

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ & \cdots & & & & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{pmatrix} \qquad (7.61)$$

这就是卷积码的矩阵表示。

除此之外，卷积码还有树图、网格图和状态转移图的表示。

7.6.3　卷积码简介

卷积码最主要的译码方法就是Viterbi算法，这是一种近似的最大似然译码算法，译码的复杂度明显降低，并能保持很好的译码性能。当前卷积码广泛应用在数字通信中，用做数字语音传输的信道编码和级联码的内码。

本 章 小 结

1．最佳译码原则

MAP准则：$g(y)=\arg\max_{x} p(x|y)$ （使平均错误率最小）

ML准则：$g(y)=\arg\max_{x} p(x|y)$ （用于输入等概率或概率未知）

最小汉明距离准则：$g(y)=\arg\max_{x} d(x,y)$ （用于二元对称信道）

本 章 小 结

2．最小码距离

$$d_{\min} = 2t + 1 \Leftrightarrow \text{能纠正}t\text{个错误}$$

3．费诺不等式

$$H(X/Y) \le H(P_E) + P_E \log(r-1)$$

4．有噪信道编码定理

$$R \le C \Leftrightarrow \text{存在使传输差错任意小的信道编码}$$

其中，R为码率，C为信道容量。

本 章 小 结

6. 线性分组码

●生成矩阵

●校验矩阵

●伴随式译码方法

7．卷积码

●表示法：生成矩阵、码树、网格图、状态图

●维特比译码算法：硬判决译码、软判决译码

谢谢！