第6章

离散信道及其容量

本章主要内容

6.1 概述

6.1.1 信道的分类

6.1.2 离散信到的数学模型

6.1.3 信道容量的定义

6.2 单符号离散信道及其容量

6.2.1 离散无噪信道的容量

6.2.2.一般离散信道的容量

6.2.3 离散对称信道的容量

6.3 级联信道及其容量

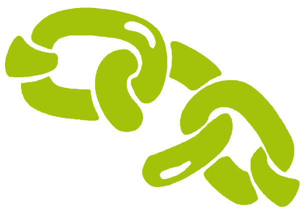
本章主要内容

6.4 多维矢量信道及其容量

- 6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质
- 6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量
- 6.4.3 并联信道及其容量
- 6.4.4 和信道及其容量

6.5 信道容量的迭代算法

6.6 有约束信道的容量



- 6.6.1 标号图的基本概念
- 6.6.2 有约束信道容量的计算

6.1 概述

6.1.1 信道的分类

6.1.2 离散信到的数学模型

6.1.3 信道容量的定义

§6.1.1 信道的分类

★ 数字通信系统的基本模型

★ 依据不同的条件，不同模块之间的通道可以划分为不同的信道

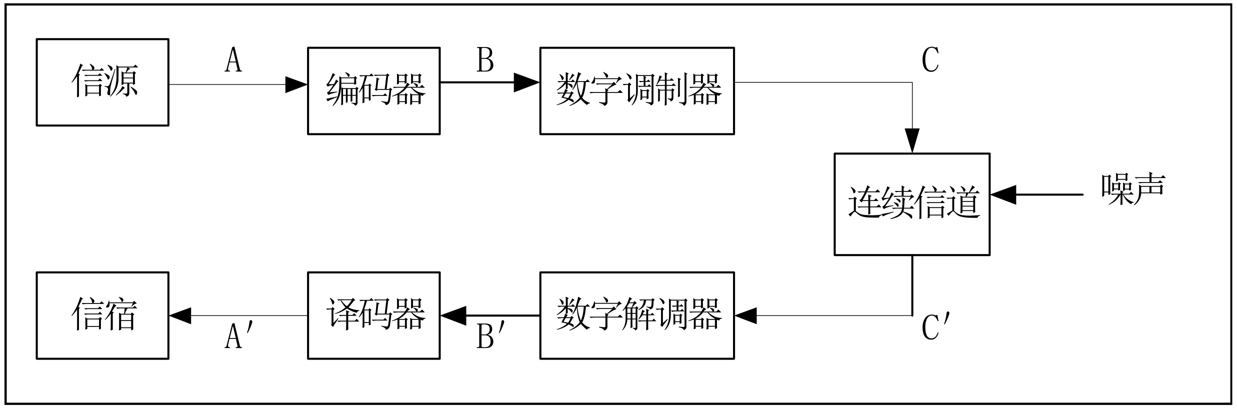


图6.1 数字通信系统模型与信道划分

6.1.1 信道的分类

按输入、输出集合的取值分类

1） 离散信道：输入和输出均为离散集，如B-B’

2） 连续信道：输入和输出均为连续集，也称波形信道，其特点是时间与取值都连续，如C-C’

3） 半连续（或半离散）信道：输入和输出一个为连续、一个为离散，如B-C’或C-B’

4） 时间离散连续信道：连续取值但时间离散，例如信道的输入和输出为模拟信号抽样的情况。

6.1.1 信道的分类

按输入、输出集合的个数分类

1）单用户信道：X,Y中各有一个事件集，称单路或单端信道

2）多用户信道：X,Y中至少有一端是多个事件集，也称多端信道。多用户信道包含两种特殊的信道，即多元接入信道和广播信道。

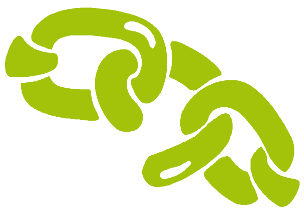
- 多元接入信道就是多个输入、单个输出的信道
- 广播信道就是单个输入、多个输出的信道

6.1.1 信道的分类

按信道转移概率的性质分类

1）无噪声信道
- 无损信道（每个输入对应多个输出）
- 确定信道（多个输入对应单个输出）
- 无扰信道（一个输入对应一个输出）

2）有噪声信道
- 无记忆信道 给定时间输出仅依赖于当前输入
- 有记忆信道 输出值不仅依赖于当前输入又依赖于以前的输入



6.1.1 信道的分类

★ 根据信道统计特性划分

1）恒参信道

统计特性不随时间变化（也称平稳信道）例如：卫星通信信道

2）变参信道

统计特性随时间变化。例如：短波，移动通信信道

§6.1.1 信道的分类

★ 根据信道噪声性质划分

1）高斯噪声信道

信道噪声为高斯分布（白噪声或有色噪声）

2）非高斯噪声信道

信道噪声分布不是高斯分布

§6.1.2 离散信道的数学模型

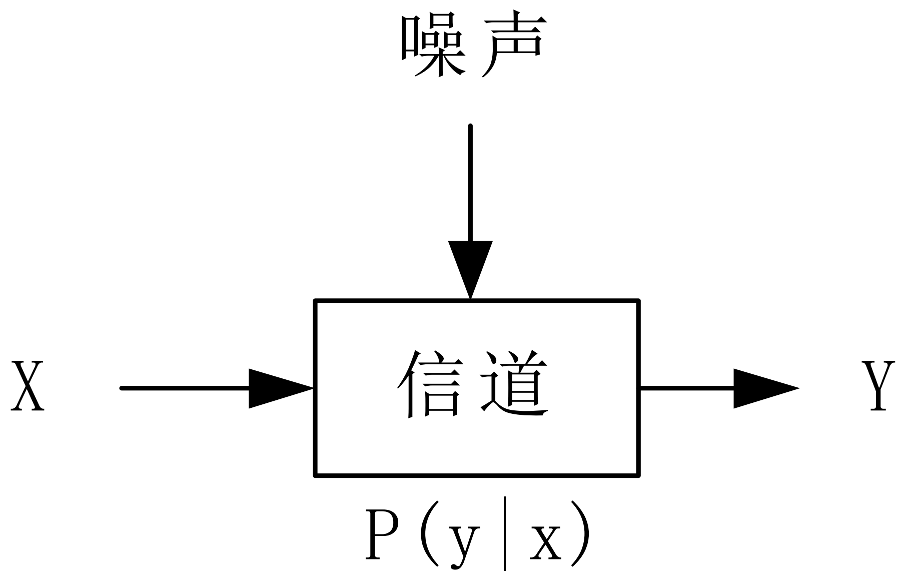


图6.2 信道模型

离散无记忆信道

离散无记忆信道

★ 一般的信道数学模型

★ 离散无记忆信道

★ 平稳（或恒参）信道

★ 单符号离散信道

一般信道的数学模型

★信道模型

$$\left\{X^N, p(\vec{y}\mid\vec{x}), Y^N\right\}$$

$$p(\vec{y}\mid\vec{x}) = p(y_1, y_2, \cdots y_N \mid x_1, x_2, \cdots x_N)$$

$$X^N = X_1X_2\cdots X_N \qquad \vec{x} = x_1, x_2, \cdots, x_N \qquad \vec{x}\in X^N$$

$$Y^N = Y_1Y_2\cdots Y_N \qquad \vec{y} = y_1, y_2, \cdots y_N \qquad \vec{y}\in Y^N$$

离散无记忆信道

★ 若信道的转移概率满足

$$p(\vec{y}\mid\vec{x})=\prod_{n=1}^{N}p(y_n\mid x_n) \qquad （6.1）$$

则称为此信道为离散无记忆信道（DMC），其数学模型为：（Discrete Memoryless Channel）

$$\{X,p(y_n\mid x_n),Y\}$$

利用给定时刻的输出符号仅依赖于当前输入符号的条件可以推出。

平稳(或恒参)信道

★ 如果对于任意正整数m、n，和 $a_i \in A, b_i \in B$

离散无记忆信道的转移概率满足：

$$p(y_n = b_j \mid x_n = a_i) = p(y_m = b_j \mid x_m = a_i) \tag{6.2}$$

则称为**平稳或恒参信道**

可见，对于平稳信道，$p(y_n \mid x_n)$不随时间变化。这样，平稳信道的模型就是

$$\{X, p(y \mid x), Y\}$$

单符号离散信道

★ 对于**离散平稳无记忆信道**，可以用一维条件概率描述

★ 这种用一维条件概率描述的信道为：单符号离散信道

其中，信道的输入X与输出Y都是一维随机变量集合，x∈X，取自字母表，$A=\{a_1,\dots,a_r\}$ 。y∈Y，取自字母表 $B=\{b_1,\dots,b_s\}$

★ 信道转移概率简记为：

$$p(y|x)=p(y=b_j|x=a_i)=P_{Y/X}(b_j|a_i)\equiv p_{ij} \tag{6.3}$$

单符号离散信道

★ 信道转移概率矩阵

$$[P]=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix}$$

p_{ij}是由a_i转移到b_j的概率

单符号离散信道

例：6.1

二元对称信道(BSC)，输入与输出符号集分别为 $A=\{0,1\}, B=\{0,1\}$，信道转移概率p(y/x)满足 $P_{Y/X}(0|0)=P_{Y/X}(1|1)=1-\varepsilon$， ε 称为错误率。写出信道的转移概率矩阵并画出转移概率图。

单符号离散信道

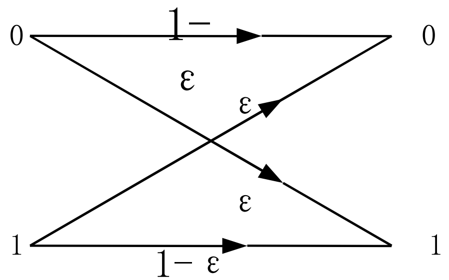
解：

转移概率矩阵

$$[P]=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

转移概率图

Binary Symmetric Channel



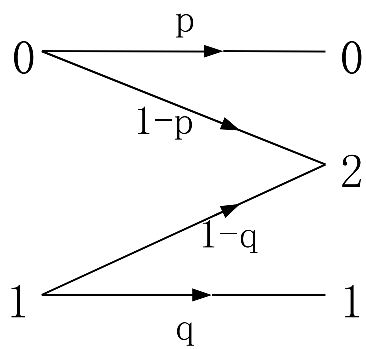
单符号离散信道

例：6.2　二元删除信道：其中A={0, 1}，B={0, 2, 1}
画出转移概率图和转移概率矩阵。

解：　转移概率矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & 1-q & q \end{bmatrix}$$

转移概率图



单符号离散信道

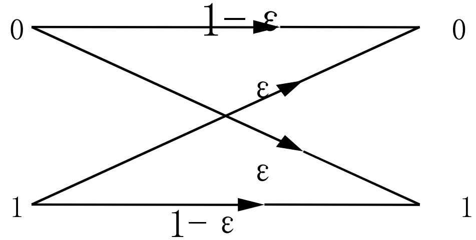
例：6.3

四个等概消息，编成的码字为 $M_1=000$，$M_2=011$
$M_3=101$，$M_4=110$，当通过下图所示二进制对称无记忆信道传输时，求:

1）“接收到第一个数字为0”与“发M1”的互信息

2)当“接收到第二个数字也为0”时，关于M1的附加信息

3)当“接收到第三个数字也为0”时，又增加多少关于M1的信息？



单符号离散信道

解：

1） $$q("0") = \sum_{i=1}^{4} p(M_i)p(0|M_i) = \frac{1}{4}[2(1-\varepsilon)+2\varepsilon] = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{互信息} I(M_1;"0")$$

$$= \log\frac{p(0|M_1)}{q("0")} = \log\frac{1-\varepsilon}{1/2} = \log[2(1-\varepsilon)]$$

单符号离散信道

$$2)\ q(''00'') = \sum_{i=1}^{4} p(M_i)p(00|M_i) = \frac{1}{4}[p(0|0)p(0|0)+p(0|0)p(0|1)+p(0|1)p(0|0)+p(0|1)p(0|1)]$$

$$= \frac{1}{4}[(1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1-\varepsilon) + \varepsilon^2] = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ 互信息 $I(M_1;''00'') = \log\dfrac{p(00|M_1)}{q(''00'')} = \log\dfrac{(1-\varepsilon)^2}{1/4} = 2\log[2(1-\varepsilon)]$

$\Rightarrow$ 附加信息 $= 2\log[2(1-\varepsilon)] - \log[2(1-\varepsilon)] = \log[2(1-\varepsilon)]$

单符号离散信道

3)

$$q(\text{"000"}) = \sum_{i=1}^{4} p(M_i)p(000|M_i) = \frac{1}{4}[(1-\varepsilon)^3 + 3(1-\varepsilon)\varepsilon^2] = \frac{1}{4}(1-\varepsilon)(4\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)$$

$$\Rightarrow \text{互信息} I(M_1;\text{"000"}) = \log\frac{p(000|M_1)}{q(\text{"000"})} = 2\log[2(1-\varepsilon)] - \log(4\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)$$

又增加的信息 $-\log(4\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1)$

§6.1.3 信道容量的定义

★ 平稳离散无记忆信道的容量C定义为输入与输出平均互信息I(X;Y)的最大值：

$$C \equiv \max_{p(x)} I(X;Y) \qquad (6.5)$$

1）单位为：比特/信道符号（奈特/信道符号）

2）当信道给定后，p(y|x)就固定

3）C 仅与p(y|x)有关，而与p(x)无关

4）C是信道传输最大信息速率能力的度量

多维矢量信道

★若X^N和Y^N分别为信道的N维输入与输出随机矢量集合，则信道容量定义为：

$$C \equiv \max_{p(x_1 \cdots x_N)} I(\mathbf{X}^N;\mathbf{Y}^N) \qquad （6.6）$$

其中，$p(x_1 \cdots x_N)$ 为信道输入矢量的联合概率

§6.2 单符号离散信道及其容量

6.2 单符号离散信道及其容量

6.2.1 离散无噪信道的容量

6.2.2. 一般离散信道的容量

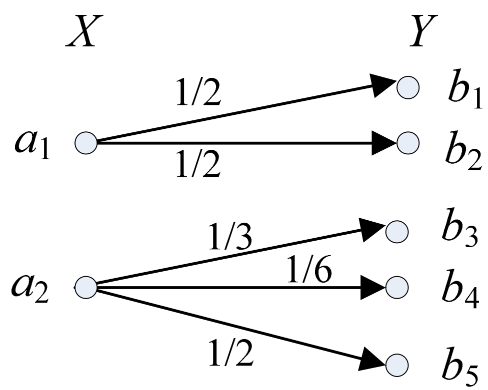
6.2.3 离散对称信道的容量

§6.2.1 离散无噪信道的容量

★ 无损信道： 输出符号只对应一个输入符号。

$$C = \max H(X) = \log r \quad (\text{比特/符号}) \tag{6.7}$$

其中r为输入符号集的大小

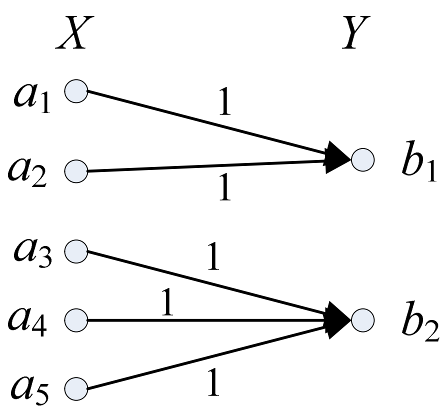


§6.2.1 离散无噪信道的容量

★ 确定信道：每个输入符号都对应一个输出符号

$$\boxed{C=\max H(Y)=\log s \text{ (比特/符号)}} \qquad (6.8)$$

其中s为输出符号集的大小

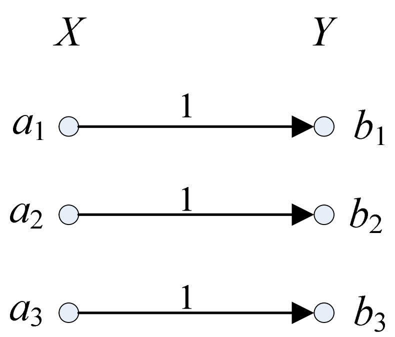


§6.2.1 离散无噪信道的容量

★ 无损确定信道：输入符号与输出符号是一一对应关系

$$\boxed{C=\max H(Y)=\log s=\log r \ \text{(比特/符号)}} \qquad (6.9)$$

其中r、s为输入与输出字母表的大小，且r=s



§6.2.2 一般离散信道的容量

信道转移概率矩阵可逆

$$\left.\begin{array}{l} I(X;Y)\text{为}p(x)\text{上凸函数} \Rightarrow \text{极大值存在} \\ p(x)\text{要满足非负且归一化条件} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

求信道容量归结为求有约束极值的问题

$$p_i = p(x), p_{ij} = P(y|x), \mathrm{q_j} = q(y)$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

求 $I(X;Y)=\sum_{i,j} p_i p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{q_j}$ 在约束 $\sum_i p_i = 1, p_i \ge 0$ 下的极值

① 利用拉格朗日乘子法，求函数 $J = I(X;Y) - \lambda \sum_i p_i$ 的极值

② 计算 $\frac{\partial J}{\partial p_k}$ 并使其为 0

$$\frac{\partial J}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left[\sum_{i,j} p_i p_{ij} \log p_{ij} - \sum_j q_j \log q_j - \lambda \sum_i p_i\right]$$

$$= \sum_j p_{kj} \log p_{kj} - \sum_j (p_{kj} \log q_j + p_{kj} \log e) - \lambda = 0$$

考虑到 $q_j = \sum_{i=1}^{r} p_i p_{ij}$ $\Rightarrow$ $\sum_j p_{kj} \log \frac{p_{kj}}{q_j} = \log e + \lambda$ （6.10）

§6.2.2 一般离散信道的容量

$$I(a_k;Y)=\sum_j p_{kj}\log\frac{p_{kj}}{q_j}\quad k=1,\ldots,r$$

$$\sum_k p_k I(a_k;Y)=I(X;Y)$$

$$C=\sum_k p_k I(a_k;Y)=\log e+\lambda$$

$$\sum_j p_{kj}\log\frac{p_{kj}}{q_j}=\log e+\lambda$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

$$\sum_j p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{q_j}=c\Rightarrow\sum_j p_{ij}\log p_{ij}=\sum_j p_{ij}(c+\log q_j)$$

$$\text{令}\beta_j=c+\log q_j\Rightarrow\boxed{\sum_j p_{ij}\beta_j=\sum_j p_{ij}\log p_{ij}}$$

$$\begin{cases}\beta_j=c+\log q_j\\ \sum_j q_j=1\end{cases}\Rightarrow\sum_j 2^{\beta_j-c}=1\Rightarrow c=\log\sum_j 2^{\beta_j}$$

$$q_j=2^{\beta_j-c}$$

$$q_j=\sum_i p_i p_{ij}\Rightarrow\{p_i\}\Longrightarrow\text{验证C的正确性}$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

用矩阵表示

$$\sum_j p_{ij}\beta_j = \sum_j p_{ij}\log p_{ij}$$

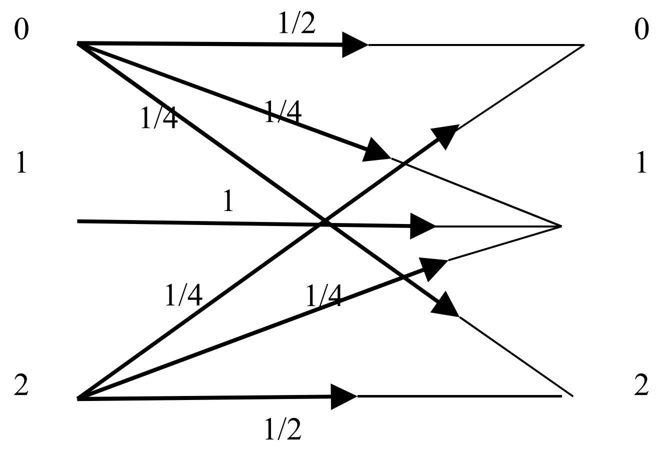
$$[P]=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{r1} & p_{r2} & \cdots & p_{rs} \end{bmatrix} = [p_{ij}] \qquad h_i = -\sum_{j=1}^{s} p_{ij}\log p_{ij}$$

$$C = \log\sum_j 2^{\beta_j} \qquad q_j = 2^{\beta_j - C} = 2^{\beta_j} / \sum_k 2^{\beta_k}$$

$$\Rightarrow [P][\beta] = -[h] \Rightarrow \boxed{[\beta] = -[P]^{-1}[h]}$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

例：6.6 一信道的转移概率如图所示，求信道容量和达到容量时的输出概率。



解：

$$p=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{4}\beta_2+\frac{1}{4}\beta_3=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\\ \beta_2=0\\ \frac{1}{4}\beta_1+\frac{1}{4}\beta_2+\frac{1}{2}\beta_3=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\log\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta_1=-2\\ \beta_2=0\\ \beta_3=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow c=\log(2^{-2}+2^{0}+2^{-2})=\log\frac{3}{2}=0.585\text{比特/符号}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}q_0=q_2=\frac{1}{6}\\ q_1=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_0=p_2=\frac{2}{9}\\ p_1=\frac{5}{9}\end{cases}$$

例6.4 利用 $[\beta]=-[P]^{-1}[h]$ 求例6.1 中二元对称信道容量。

解：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\neq 1/2\\&\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow [P]^{-1}=\frac{1}{1-2\varepsilon}\begin{bmatrix}1-\varepsilon & -\varepsilon\\ -\varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned}&[P]^{-1}=\frac{1}{1-2\varepsilon}\begin{bmatrix}1-\varepsilon & -\varepsilon\\ -\varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}\\&[h]=-\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon\\(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$[\beta]=-[P]^{-1}[h]=\frac{1}{1-2\varepsilon}\begin{bmatrix}1-\varepsilon & -\varepsilon\\ -\varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon\\(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon\\(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon\end{bmatrix}$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

$\Rightarrow$ 信道容量为

$$C=\log_2 2\cdot 2^{(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon}=1+(1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)+\varepsilon\log\varepsilon=1-H(\varepsilon)\ (比特/符号)$$

$$q_j=2^{\beta_j-C} \qquad \Rightarrow 输出概率为\ q_1=q_2=\frac{1}{2}$$

对应的输入概率为 $q_j=\sum_i p_i p_{ij}\Rightarrow\{p_i\}$

$$\Rightarrow 输入概率为\ p_1=p_2=\frac{1}{2}$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

定理6.1 对于离散无记忆信道，当且仅当

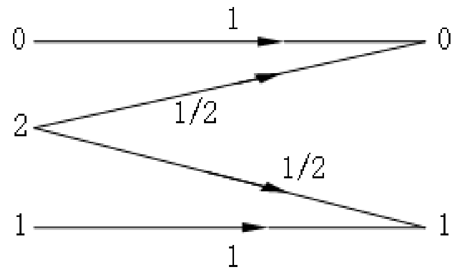
$$I(a_i;Y)=C\,,\text{对于}p_i>0$$
$$I(a_i;Y)\le C\,,\text{对于}p_i=0$$

I(X;Y)达到最大值，此时C为信道容量

$$I(a_i;Y)=\sum_j p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{q_j}$$

§6.2.2 一般离散信道的容量

例6.5　信道的转移概率如下图所示，求信道容量和达到容量时的输入出概率。



§6.2.2 一般离散信道的容量

解：　设输入、输出概率为p0, p1, p2. q0, q1

1）达到容量时，若输入概率全不为零

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\log q_0 &= C \quad (p_0 > 0) \\ (1/2)\log\frac{1/2}{q_0} + (1/2)\log\frac{1/2}{q_1} &= C \quad (p_2 > 0) \\ -\log q_1 &= C \quad (p_1 > 0) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\log q_0 &= C \quad (p_0 > 0) \\ -1-\frac{1}{2}\log q_0 q_1 &= C \quad (p_2 > 0) \\ -\log q_1 &= C \quad (p_1 > 0) \end{aligned}\right\}$$

解得 $q_0 = q_1 = 1/2$，C=1比特，但将结果代入第2式，使该式左边的值为0，出现矛盾。

§6.2.2 一般离散信道的容量

2）设p2=0，p0, p1, 不为零

$$-\log q_0 = -\log q_1 = C \implies q_0 = q_1 = 1/2, C = 1\text{比特/符号}$$

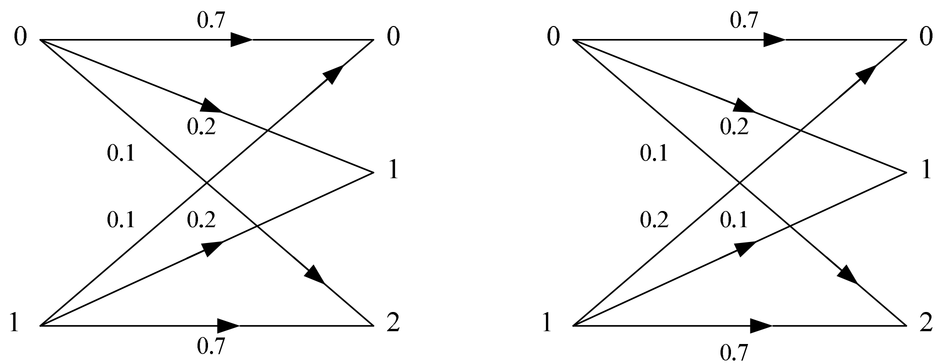
将结果代入第2式，该式左边的值为0<C。
所以，信道容量C=1比特/符号，达到容量时的输入概率为概率为

$$p_0 = p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = 0$$

§6.2.3 离散对称信道的容量

若一个信道的转移概率矩阵按**输出**可分为若干子集，其中每个子集都有如下特性：即每一行是其他行的置换，每一列是其他列的置换，则信道称为**对称信道**

例6.6 分析下图信道的对称性



(a) (b)

§6.2.3 离散对称信道的容量

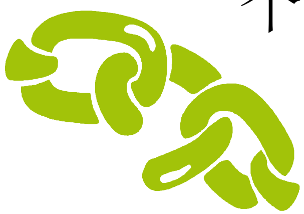
解：　(a)可分成两个子矩阵

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$ 所以为对称信道

(b)的概率转移矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$ 所以不是对称信道

有时将转移概率矩阵可分成多个子集的对称信道为**准对称或弱对称信道**，而只有一个子集的对称信道称**强对称信道**



§6.2.3 离散对称信道的容量

定理6.2 对于离散对称信道，当输入等概率时达到信道容量：

$$C = H(Y) - H(p_1, p_2, \ldots, p_s) \qquad (6.22)$$

H(Y)为输入等概率时输出的熵

H(p1, p2, …, ps)为信道转移概率矩阵某行元素

注释：对强对称信道,输入等概率时达到容量，此时输出等概率。

$$C = \log s - H(p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1s}) \qquad (6.24)$$

§6.2.3 离散对称信道的容量

例6.7　一信道的转移概率矩阵如图，求信道容量和达到容量时的输出概率。

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$$

解：　设输出概率为q_1, q_2, q_3。由于信道为强对称信道，故当输入等概率时达到容量C，此时输出也等概率

$$\Longrightarrow q_1 = q_2 = q_3 = 1/3$$

$$C = \log 3 - H(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}) = 1.126 \text{ 比特/符号}$$

§6.2.3 离散对称信道的容量

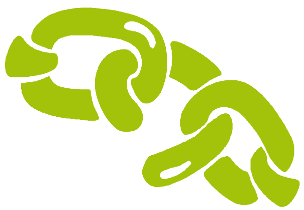
例6.8 一信道的转移概率矩阵如图，求信道容量和达到容量时的输入概率。

$$\begin{bmatrix} 1-p & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \frac{p}{r-1} & 1-p & \cdots & \frac{p}{r-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & 1-p \end{bmatrix}$$

解： 设输入输出概率为 $p_i, q_j, i=1,2,\cdots,\mathrm{r}$ 由于信道为强对称信道，故当 $p_1=\ldots=p_r=1/r$ 时，达到容量。

$$C=\log r+[(1-p)\log(1-p)+(r-1)\frac{p}{r-1}\log\frac{p}{r-1}]$$

$$=\log r-H(p)-p\log(r-1)$$



特别是，当r=2时，信道容量为C=1-H(p)比特/符号。

§6.2.3 离散对称信道的容量

例6.9　一信道的转移概率矩阵如图，求信道容量和达到容量时的输出概率。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

解：设输出概率为q_1, q_2, q_3, q_4准对称信道，当输入等概率时达到信道容量。可计算输出概率为

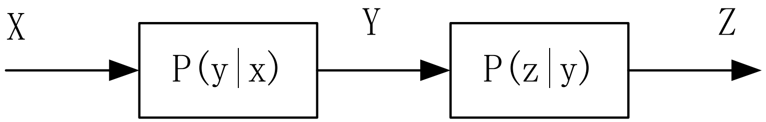
$$q_1 = \frac{1}{2}[\frac{1}{6}+\frac{1}{3}] = \frac{1}{4} \qquad q_2 = \frac{1}{2}[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}] = \frac{1}{3} \qquad q_3 = \frac{1}{2}[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}] = \frac{1}{6} \qquad q_4 = \frac{1}{4}$$

$$C = H(\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{4}) - H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$$

$$= 0.041\text{比特 / 符号}$$

§6.3 级联信道及其容量

★ 级联的含义是被连接的信道输入只依赖于前面相邻信道的输出而和前面的其它信道的输出无直接关系

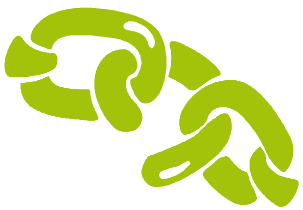


★ 若随机变量集合(X,Y,Z)构成马氏链，则称信道X-Y与Y-Z构成级联信道。由于当Y给定时，Z不依赖于X，即P(z|y)=P(z|xy)

★ 如果(X,Y,Z)构成马氏链，则

$$I(X;Z|Y)=0 \qquad (6.26)$$

$$I(XY;Z)=I(Y;Z) \qquad (6.27)$$



§6.3 级联信道及其容量

定理6.3 若X, Y, Z构成一马氏链，则：

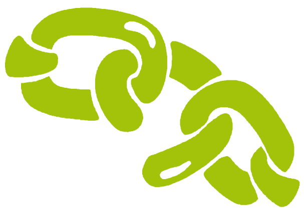
$$\boxed{I(X;Z) \le I(X;Y)} \qquad (6.28)$$

$$\boxed{I(X;Z) \le I(Y;Z)} \qquad (6.29)$$

证：

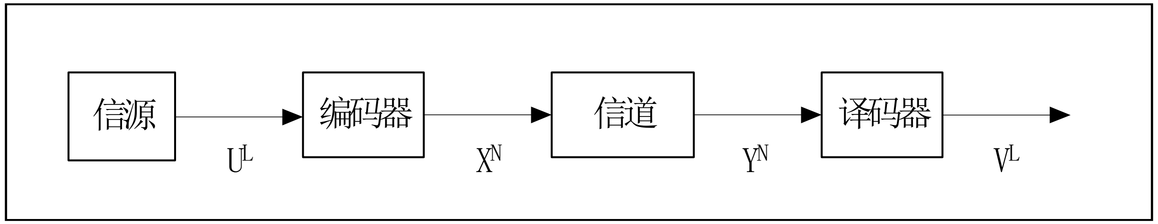
$$\left.\begin{aligned} & I(X;YZ) = I(X;Y) + I(X;Z|Y) = I(X;Z) + I(X;Y|Z) \\ & \text{马氏链} \Rightarrow I(X;Z|Y) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I(X;Z) \le I(X;Y)$$

同理可证 $I(X;Z) \le I(Y;Z)$



§6.3 级联信道及其容量

★ 通信系统模型各部分的级联



信道传输后，译码器收到N长序列为Y^N，译码后传给信宿的消息序列为V^N。

§6.3 级联信道及其容量

定理6.4 数据处理定理

$$\boxed{I(U^L;V^L)\le I(X^N;Y^N)} \qquad (6.30)$$

证： (U^L,X^N,Y^N)构成马氏链 $\Rightarrow I(U^L;Y^N)\le I(X^N;Y^N)$

(U^L,Y^N,V^L)构成马氏链 $\Rightarrow I(U^L;V^L)\le I(U^L;Y^N)$

★ 定理的含义：从信宿得到的关于信源的信息经过编译码器、信道的处理后会减少，而且处理的次数越多，减少得越多。

§6.3 级联信道及其容量

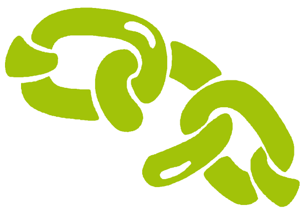
★ 级联信道的转移概率矩阵

级联信道为马氏链 ⇒ 一级级联相当于状态的一步转移

⇒ 级联信道的转移概率矩阵为级联信道中各矩阵依次相乘

★ 级联信道的容量

根据级联信道的转移矩阵特点，按照前面介绍的离散信道容量的计算方法即可计算其信道容量。



§6.3 级联信道及其容量

例6.10　给定二元对称信道其状态转移矩阵如下，计算两级级联信道的概率转移矩阵。如果信道输入 0、1 等概率，求在两级级联和三级级联情况下输入与输出的平均互信息。

$$[P]=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}$$

解：　1) 两级级联信道的概率转移矩阵

$$[P][P]=\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2 & 2\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) & (1-\varepsilon)^2+\varepsilon^2\end{bmatrix}$$

§6.3 级联信道及其容量

2)设原信道输入与输出集分别为X、Y，两级级联和三级级联情况下输出集合分别为Z、U

$$\begin{bmatrix} X \\ P_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} Y \\ P_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Z \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

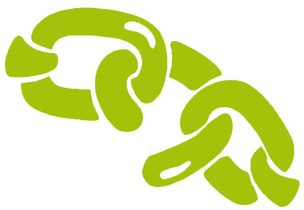
$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = 1 - H(\varepsilon)$$

$$I(X;Z) = 1 - H(Z|X) = 1 - H[2\varepsilon(1-\varepsilon)]$$

其中$H(\varepsilon) = -\varepsilon \log \varepsilon - (1-\varepsilon)\log(1-\varepsilon)$

类似地,可计算三级信，级联的情况：

$$I(X;U) = 1 - H[3\varepsilon(1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^3]$$



结论：信道串联后增加信息损失，串联级数越多，损失越大。

§6.3 级联信道及其容量

例6.10（续）设错误概率 ε 为1/3，计算两级级联信道的容量及达到容量时的输出概率。

解：两级级联信道的转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\1/3 & 2/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\1/3 & 2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/9 & 4/9\\4/9 & 5/9\end{pmatrix}$$

该级联信道是一个强对称信道，因此当输入等概时达到信道容量，此时输出也等概。所以

$$q_1=q_2=1/2$$

$$C=\log 2-H(\frac{5}{9},\frac{4}{9})=\log 2+(\frac{5}{9}\log\frac{5}{9}+\frac{4}{9}\log\frac{4}{9})=0.0089\text{ 比特/符号}$$

§6.4 多维矢量信道及其容量

6.4 多维矢量信道及其容量

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

★ 对于多维矢量信道，输入与输出平均互信息为:

$$I(X^N;Y^N)=H(X^N)-H(X^N|Y^N)$$

$$=H(Y^N)-H(Y^N|X^N)$$

$$=\sum_{X^N,Y^N} p(\vec{x}\vec{y})\log\frac{p(\vec{y}|\vec{x})}{q(\vec{y})}$$

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

引理6.1 设信道的输入输出分别为 X^N, Y^N，其中$X^N = X_1 \cdots X_N$，$Y^N = Y_1 \cdots Y_N$，则：

（1）
$$H(X^N | Y^N) \le \sum_{i=1}^{N} H(X_i | Y_i) \qquad (6.31)$$

当且仅当$p(\vec{x} | \vec{y}) = \prod_{i=1}^{N} p(x_i | y_i)$时等式成立

（2）
$$H(Y^N | X^N) \le \sum_{i=1}^{N} H(Y_i | X_i) \qquad (6.32)$$

仅当信道无记忆时等式成立

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

定理6.5 对于离散无记忆信道，有：

$$\boxed{I(X^N;Y^N) \le \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i)} \qquad （6.33）$$

证：

$$I(X^N;Y^N)=H(Y^N)-H(Y^N|X^N)=H(Y^N)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)$$

$$\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)=\sum_{i=1}^{N}H(Y_i)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)$$

$$H(Y^N)=H(Y_1...Y_N)\le\sum_{i=1}^{N}H(Y_i)$$

仅当输出独立时等式成立。

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

★当输入独立时

$$p(\vec{x})=p(x_1)...p(x_N)$$

$$p(\vec{y})=\sum_{X^N}p(\vec{x})p(\vec{y}\,|\,\vec{x})=\sum_{X_1}\cdots\sum_{X_N}\{\prod_{i=1}^{N}p(x_i)p(y_i\,|\,x_i)\}=\prod_{i=1}^{N}\{\sum_{X_i}p(x_i)p(y_i\,|\,x_i)\}=\prod_{i=1}^{N}p(y_i)$$

即当信源信道都无记忆时，等式成立。

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

定理6.6 对于无记忆信源，有：

$$\boxed{I(X^N;Y^N) \geq \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i)} \qquad (6.34)$$

证： $I(X^N;Y^N)=H(X^N)-H(X^N|Y^N)$

$$\sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i)=\sum_{i=1}^{N} H(X_i)-\sum_{i=1}^{N} H(X_i|Y_i) \qquad H(X^N)=\sum_{i=1}^{N} H(X)$$

等式成立条件： $p(\vec{x}|\vec{y})=\prod_{i=1}^{N} p(x_i|y_i)$

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

★当信道无记忆时

$$p(\vec{x}\,|\,\vec{y}) = \frac{p(\vec{x})p(\vec{y}\,|\,\vec{x})}{p(\vec{y})} = \frac{\prod_i \{p(x_i)p(y_i\,|\,x_i)}{\sum_{x_1,x_2,\cdots x_N} p(x_1)p(y_1\,|\,x_1)p(x_2)p(y_2\,|\,x_1)\ldots}$$

$$= \frac{\prod_i p(y_i)p(x_i\,|\,y_i)}{\prod_i p(y_i)} = \prod_{i=1}^{N} p(x_i\,|\,y_i)$$

即当信源信道都无记忆时，等式成立。

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

★ 结论：

1）对于无记忆信源和无记忆信道，有：

$$I(X^N;Y^N)=\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$$

2）对于平稳信源，因为Xi、Yi同分布，因此：

$$I(X_i;Y_i)=I(X;Y)$$

$$\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)=NI(X;Y)$$

$\Rightarrow$ 对于平稳离散无记忆信道(DMC)的N次扩展信道，当信源无记忆时，有

$$I(X^N;Y^N)=NI(X;Y)$$

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

例6.11 设离散无记忆信道的输入 $X^N=X_1\ldots X_N$ ，输出 $Y^N=Y_1\ldots Y_N$ ，且有 $X_1=Y_1=X_2=Y_2,\ldots,X_N=Y_N=X$

计算 $I(X^N;Y^N)$ 和 $\sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_j)$

解：

$$I(X^N;Y^N)=H(Y^N)-H(Y^N|X^N)=H(Y^N)-\sum_{i=1}^{N}H(Y_i|X_i)=H(Y^N)$$

$$=H(X_1\ldots X_N)=H(X_1)+H(X_2|X_1)+\ldots+H(X_N|X_1\ldots X_{N-1})$$

$$=H(X_1)=H(X)\le NH(X_1)$$

$$\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)=\sum_{i=1}^{N}[H(X_i)-H(X_i|Y_i)]=\sum_{i=1}^{N}H(X_i)=NH(X)$$

此时 $I(X^N;Y^N)\le\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$

§6.4.1 多维矢量信道输入与输出的性质

例6.12　设无记忆信源X的熵为H，X的5次扩展源为X5，信道为下面矩阵所示的置换信道，其中第1行为输入的序号，第2行为信道输出的序号，例如X1输出到Y4，X2输出到Y2等。计算 $\sum_{i=1}^{5} I(X_i;Y_i)$和$I(X^5;Y^5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

解：

$$I(X_1;Y_1)=I(X_1;X_3)=0$$

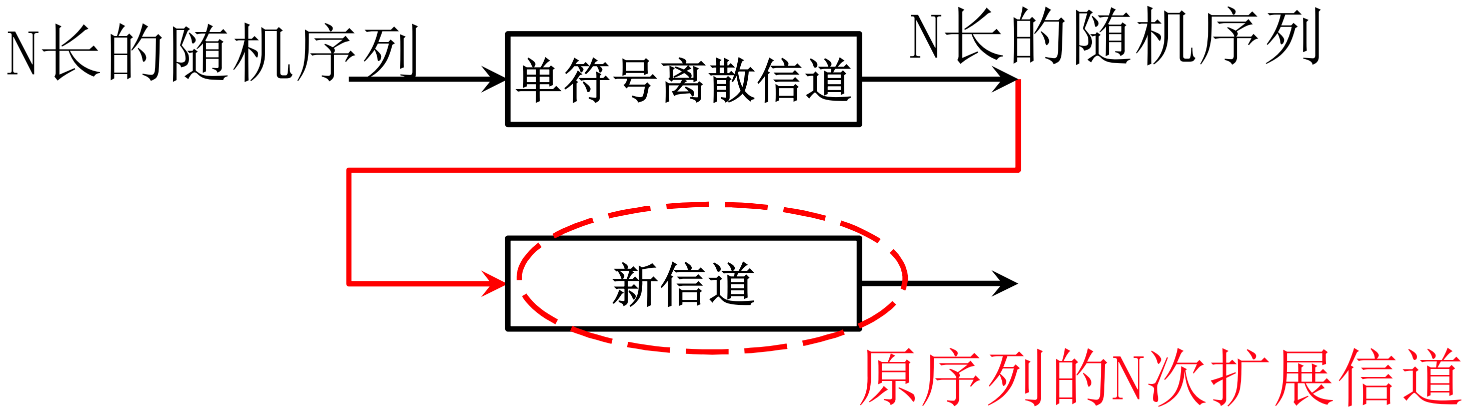
$$I(X_2;Y_2)=I(X_2;X_2)=H \qquad \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} I(X_i;Y_i)=H$$

$$I(X_3;Y_3)=I(X_4;Y_4)=I(X_5;Y_5)=0$$

$$I(X^5;Y^5)=H(X^5)-H(X^5\mid Y^5)=H(X^5)=5H$$

§6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量

★ N次扩展信道



§6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量

★ N次扩展信道的描述要满足一般的信道数学模型的描述，但符号集为同分布符号的扩展，即各Xi的分布都相同

★ 信道的输入和输出集合分别为 $X^N = X_1X_2\cdots X_N$ 和 $Y^N = Y_1Y_2\cdots Y_N$ ，所包含的矢量分别为 $\vec{x} = x_1 \ldots x_N$，$\vec{y} = y_1 \ldots y_N$

★ 信道可通过下式来计算

$$\pi_{kl} = P_{Y^N/X^N}(\vec{y} = \beta_l \mid \vec{x} = \alpha_k) = p(\vec{y} \mid \vec{x}) = p(y_1 \ldots y_N \mid x_1 \ldots x_N) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i \mid x_i)$$

§6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量

★ 一个信道的N次扩展信道是N个原信道的Kroneck乘积

设输入与输出符号集的尺寸分别为r、s， 则N次扩展信道的输入与输出符号集的尺寸分别为 $R=r^N, S=s^N$

则，信道的转移概率为：

$$\Pi=\begin{bmatrix}\pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1S}\\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2S}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \pi_{R1} & \pi_{R2} & \cdots & \pi_{RS}\end{bmatrix}$$

满足$\sum_{l=1}^{s^N}\pi_{kl}=1$，对所有$k=1,\dots,r^N$

§6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量

例6.13　求错误概率为p的二元对称信道的二次扩展信道的转移概率矩阵。

解：　$\alpha_k \in \{00,01,10,11\}$，$\beta_l = \{00,01,10,11\}$

$$\pi_{kl} = P_{Y^2|X^2}(\vec{y} = \beta_l \mid \vec{x} = \alpha_k) = p(y_1 \mid x_1)p(y_2 \mid x_2)$$

2次扩展信道的转移概率矩阵：

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) & p^2 \\ p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 & p(1-p) \\ p(1-p) & p^2 & (1-p)^2 & p(1-p) \\ p^2 & p(1-p) & p(1-p) & (1-p)^2 \end{bmatrix}$$

§6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量

★ 离散无记忆N次扩展信道的容量

$$C^N = \max_{p(\vec{x})}\{I(X^N;Y^N)\} \le \sum_{i=1}^{N}\max_{p(x_i)}\{I(X_i;Y_i)\} \le \sum_{i=1}^{N} C_i \qquad (6.35)$$

$$C_i = \max_{p(x_i)}\{I(X_i;Y_i)\}$$

当信源为无记忆时，等式成立

当信道平稳时：

$$C_i = C \Rightarrow \boxed{C^N = NC} \qquad (6.36)$$

§6.4.2 离散无记忆扩展信道及其容量

例6.13（续） 求该二次扩展信道的容量。

解：由例6.8可得，错误概率为p的二元对称信道的容量 ，根据式(6.4.6),该信道的二次扩展信道容量为

$$C^2 = 2C = 2 - 2H(p)\text{比特/扩展符号}$$

§6.4.3 并联信道及其容量

★并联信道的定义

- 由若干并行的单符号子信道组成
- 在每单位时间，发送端都同时通过每个子信道发送不同符号集的消息
- 每子信道的输出仅与该子信道的输入有关

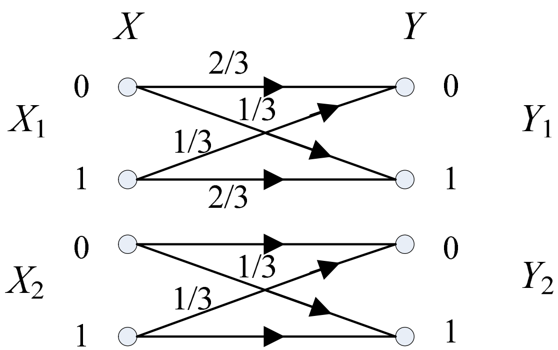
$$X^N = X_1 \ldots X_N \qquad Y^N = Y_1 \ldots Y_N$$

$$C = \max_{p(X_1 \ldots X_N)} \{I(X^N;Y^N)\} \le \max_{p(X_1,\cdots,X_N)} \sum_{i=1}^{N} I(X_i;Y_i) = \sum_{i=1}^{N} C_i$$

各子信道输入相互独立时达到信道容量

§6.4.3 并联信道及其容量

例6.14 求下图信道的容量和达到容量时的输入概率分布。



解：从信道的转移概率图可以看出，两个子信道是独立的，所以构成一个二维并联信道。所求信道容量为

$$C = C_1 + C_2 = 2C_1 = 2[1 - H(\frac{1}{3})] = 0.164\text{比特/符号}$$

达到容量时，输入 X_1X_2 相互独立，且均为等概率分布。

§6.4.4 和信道及其容量

★和信道的定义

- □一个信道分为若干子信道，且各子信道输入之间互不相交，输出之间也互不相交
- □信道总的输出与输入集合分别为各子信道输出与输入之并集
- □每次传输只能用一个子信道

§6.4.4 和信道及其容量

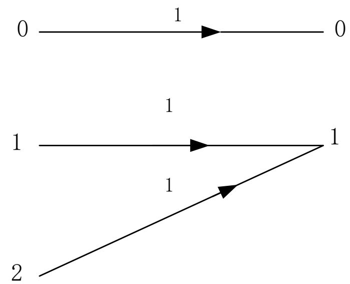
定理6.7

对于和信道，信道容量为 $C=\log_2\sum 2^{C_i}$ 比特/符号，其中 Ci 为每个子信道的容量，第i个子信道使用概率为 $r_i=2^{C_i-C}=\dfrac{2^{C_i}}{\sum_{i=1}^{N}2^{C_i}}$ ，达到容量的输入概率为各子信道达到容量时的概率再乘以 r_i 。

§6.4.4 和信道及其容量

例6.15　一信道的转移概率如图所示，求信道容量和达到容量时的输入概率。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



解：

$$C_1 = C_2 = 0, r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{2}$$

$$C = \log_2 2 = 1bit \qquad p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{p}{2}, p_2 = \frac{1-p}{2}$$

其中p为不大于1的正数

关于信道容量的注释

★ 信道达到容量时的输入概率分布不一定唯一。（对于对称信道是唯一的）

★ 达到容量时的输出概率严格为正。

★ 对应于信道容量的输出概率是唯一的。

★ 对于任意的离散信道的转移概率分布，要利用迭代算法进行计算。

§6.5 信道容量的迭代算法

先给出（2.29）式， $$I(X;Y)=\sum_i\sum_j p_i p_{ij}\ln\frac{p_{ij}}{\sum_i p_i p_{ij}} \qquad (6.38)$$

求信道容量C就是在 p_i 的约束下，求 $I(X;Y)$的极大值。
首先引入反条件概率， $P_{X|Y}(a_i|b_j)=q_{ji}$， 则

$$q_{ji}=\frac{p_i p_{ij}}{\sum_i p_i p_{ij}} \qquad (6.39)$$

得（ 6.38 ）

$$I(X;Y)=\sum_i\sum_j p_i p_{ij}\ln\frac{q_{ij}}{p_i} \qquad (6.40)$$

迭代算法的要点是，当信道固定（p_{ij} 固定 ）时，$I(X;Y)$

看成函数 $f(p_i,q_{ji})$，用式（6. 40）进行信道容量的迭代
。

§6.5 信道容量的迭代算法

每次迭代由两步组成：

① 将 $p_i^{(n)}$ 固定，在约束 $\sum_i q_{ji}=1$ 的条件下变动 q_{ji}，得 $I(X;Y)$ 极大值，记为 $I(X;Y)=C(p_i^{(n)};q_{ji}^{(n)})=C(n,n)$。此时

$$q_{ji}^{(n)}=\frac{p_i^{(n)}p_{ij}}{\sum_i p_i^{(n)}p_{ij}} \qquad (6.41)$$

② 将 $q_{ji}^{(n)}$ 固定，在约束 $\sum_i p_i=1$ 的条件下变动 p_i，得 $I(X;Y)$

极大值，记为 $I(X;Y)=C(p_i^{(n+1)};q_{ji}^{(n)})=C(n+1,n)$ 此时 $p_i^{(n+1)}$ 满足（6.43）

$$p_i^{(n+1)}=\frac{e^{\sum_j p_{ij}\ln q_{ji}^{(n)}}}{\sum_i e^{\sum_j p_{ij}\ln q_{ji}^{(n)}}} \qquad (6.42)$$

§6.5 信道容量的迭代算法

式（6.41）和（6.42）是迭代的基本公式。先取一组 $p_i^{(n)}(n=1)$

的初始值，由式（6.41）计算$q_{ji}^{(n)}$；再代入式（6.42）计算 $p_i^{(n+1)}$

依次反复计算下去。每次迭代都要用式（6.40）计算$I(X;Y)$。可以设置门限值，当相邻两次计算 $I(X;Y)$ 的误差小于门限值时，结束迭代过程，此时 $I(X;Y)=C$

如何避免计算反向条件概率：将式（6.41）代入式（6.42）得

$$p_i^{(n+1)}=\frac{p_i^{(n)}e^{\sum_j p_{ij}\ln(p_{ij}/q_j^{(n)})}}{\sum_i p_i^{(n)}e^{\sum_j p_{ij}\ln(p_{ij}/q_j^{(n)})}} \qquad (6.43)$$

其中 $$q_j^{(n)}=\sum_i p_i^{(n)}p_{ij} \qquad (6.44)$$

§6.5 信道容量的迭代算法

将上式代入式（6.40），得

$$C(p_i^{(n+1)};q_{ji}^{(n)})=\ln\sum_i p_i^{(n)}e^{\sum_j pij\ln(p_{ij}/q_j^{(n)})} \qquad (6.45)$$

可以证明：

①随着迭代次数n的增大，$I(X;Y)=C(n,n)$ 收敛于信道容量C；

②信道容量C满足不等式：

$$\ln\sum_i p_i^{(n)}e^{\sum_j pij\ln(p_{ij}/q_j^{(n)})}\le C\le\ln\left[\max_i\left(e^{\sum_j pij\ln(p_{ij}/q_j^{(n)})}\right)\right] \qquad (6.46)$$

仅当输入分布 $p_i^{(n)}$ 使信道达到容量时，等式成立。

§6.5 信道容量的迭代算法

算法归纳如下：设信道输入与输出符号集的大小分别为 r, s，且 ε 为一个小的正数。取初始概率分布为均匀分布，即设 $p_i = 1/r$

①计算 $q_j = \sum_i p_i p_{ij}$

②计算 $\alpha_i = \exp\left[\sum_j p_{ij} \ln(p_{ij}/q_j)\right] \quad i = 1,\cdots,r$

③计算 $u = \sum_i p_i \alpha_i$

④计算 $I_L = \log_2(u);\ I_U = \log_2(\max_i(\alpha_i))$

⑤若 $(I_U - I_L) < \varepsilon$，转到⑥，否则 $p_i = p_i \alpha_i / u, i = 1,\cdots,r;$ 返回①

⑥输出信道容量的值 $C = I_L$（比特/符号）

§6.6 有约束信道的容量

6.6 有约束信道的容量

6.6.1 标号图的基本概念

6.6.2 有约束信道容量的计算

§6.6 有约束信道的容量

对传送符号有约束的信道称为**有约束信道**。

自从信息论产生以来，有约束信道编码理论和技术取得重大进展，在光、磁记录和通信领域得到广泛的应用。

无论是传统的还是现代的有约束系统中的约束都可以用**标号图**来表示。

§6.6.1 标号图的基本概念

一个标号图 G 由一个有限状态集合（$V = V_G$）和一个有限边（$E = E_G$）集合以及边标号（$L = L_G$： $E \rightarrow \sum$，其中 $\sum$ 为有限字母表 ）组成，每条边e($e \in E$) 都有一个初始状态和一个终止状态，这些状态都属于 V。标号图记为 $G =（V, E, L）$。

§6.6.1 标号图的基本概念

标号图的特点：

(1)有向图，每条边只有一个方向（由起始状态指向终止状态），每条边和一个标号对应。

(2)每条边也是其初始状态的输出边，又是终止状态的输入边。

(3)对于每个状态，都允许存在从自身起始并终止到自身的边，这种边称为自环。

§6.6.1 标号图的基本概念

标号图的特点：

(4)从给定状态到某一状态允许存在多条边，但每条边要有不同的标号，而从一状态到不同状态的边可以有相同的标号。

(5)为用标号图产生有限符号序列，可沿图中选定的路径依次读出所经过边对应的标号，这就产生一串符号序列。

(6)如果根据信道的约束得到一个对应的标号图，那么沿标号图的任何路径所产生的符号序列就是满足给定约束的序列。

§6.6.1 标号图的基本概念

一个标号图例子如图6.12。该图有3个状态$\{1,2,3\}$；有限字母表为 $\sum=\{\mathrm{a},b,c,d\}$；图中有6条边，状态1存在自环，从状态3到状态1有两条边，但标号不同；从而状态3到状态1和从状态3到状态2有两条相同标号 (c) 的边；沿路径 $1\to2\to3\to1\to1$ ，可产生序列 $bbda$ 。沿标号图的所有路径读出的标号所产生的序列集合，称为一个有约束系统，记为 S 。

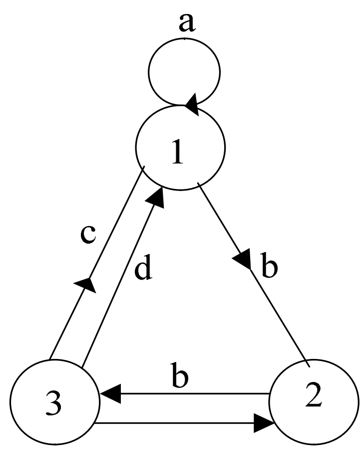


图6.12标号图示例

§6.6.1 标号图的基本概念

由于标号图是有向图，所以可用连接矩阵描述。设一个状态的标号图 G ，定义连接矩阵 D_G （或简记 D ）为阶矩阵：$N \times N$ 。如图6.12的标号图连接矩阵是：

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad i, j = 1, \cdots, N$$

设 G 是一个标号图，G 的 N 次幂用 N 表示，也是一个状态集合与相同的标号图，每条边都与在G中产生的长度为N的路径相对应。所以G^N的每条边对应标号是一条长度为N且满足G的约束的序列。G^N的连接矩阵D_{G^N}就是D_G的N次幂D_G^N，即 $D_{G^N}=D_G^N=[D^N]_{ij}$

§6.6.1 标号图的基本概念

6.16 求图6.12所示有约束系统，由状态3到状态2所能构成的长度为3的序列的数目，并列出这些序列。

解：计算$D^3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 2 & 1\\4 & 3 & 2\end{bmatrix}$

所求序列数为$[D^3]_{32}$=3，这3条序列是：cbc, dab, cab。

§6.6.1 标号图的基本概念

★ 等价状态合并

★ 状态节点的吸收

§6.6.1 标号图的基本概念

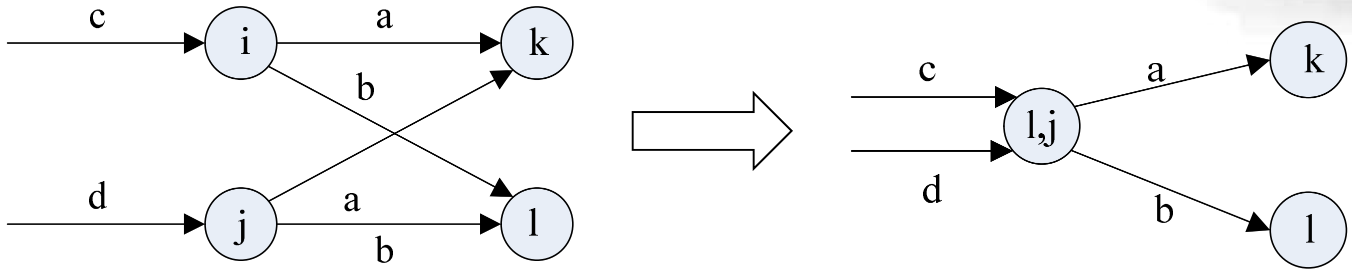
在标号图中，状态s_1，s_2，…，s_J是等价的，当且仅当对每一个可能的输入序列，不管s_1，s_2，…，s_J中哪一个是初始状态，所产生的序列完全相同。

可验证，对于两状态s_i，s_j，如果它们具有相同数目和对应相同标号的输出边，并且具有相同标号边的终止状态也相同，那么s_i和s_j是等价的。

等价状态满足自反性、对称性和传递性，等价状态可以合并成一个状态。

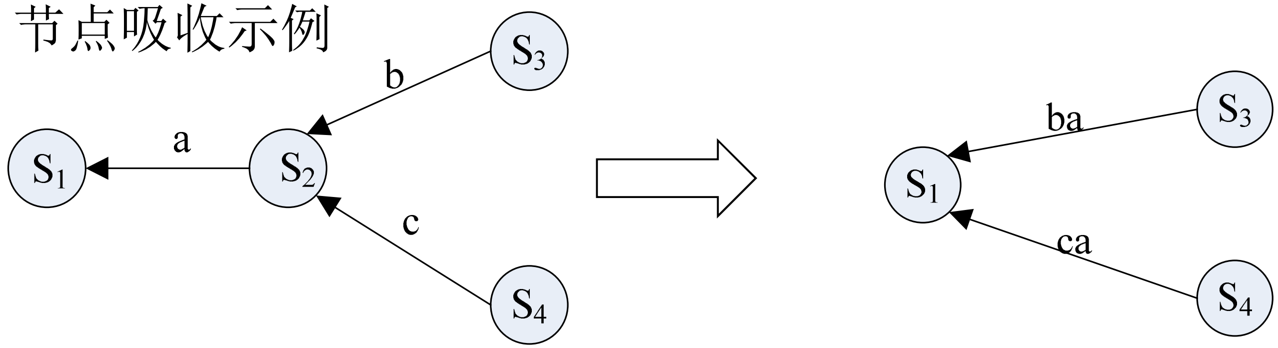
§6.6.1 标号图的基本概念

图6.13 等价状态合并



（a）i, j状态合并前　　　　　　　　　（b） i, j状态合并后

图6.14 节点吸收示例



（a）S_2节点被吸收前　　　　　　　　（b）S_2节点被吸收后

§6.6.1 标号图的基本概念

例　6.17 在摩尔斯电码中，容许的符号有3个，分别为“点”、“划”、“空”，如果规定不能出现3个连续的“空”。试画出摩尔斯电码所对应的状态图。

解：将“点”、“划”、“空”、“空空”作为图的4个状态，由题意，“空空”后面不能接“空”。所求状态图如图6.15所示。图中，状态集合$V=\{$点，划，空，空空$\}$，边标号集合$\sum=\{$点，划，空$\}$。

§6.6.1 标号图的基本概念

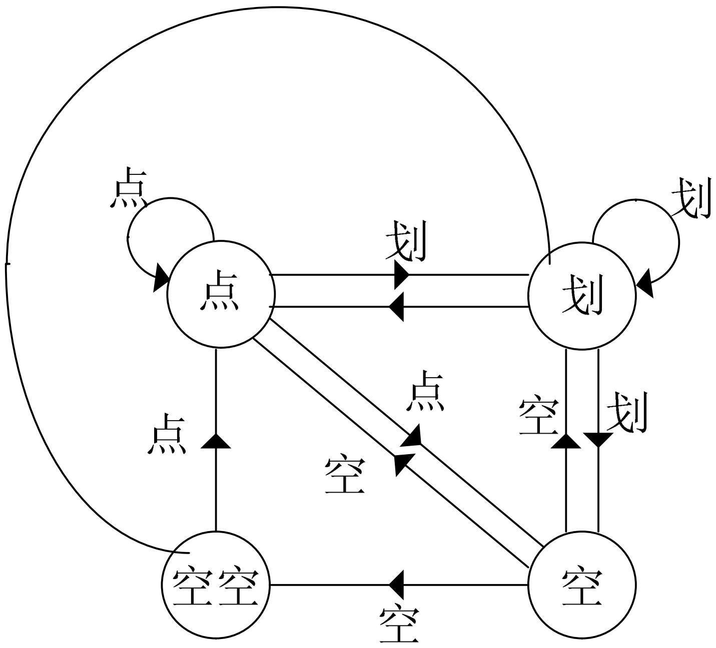


图6.15 Morse电码状态图

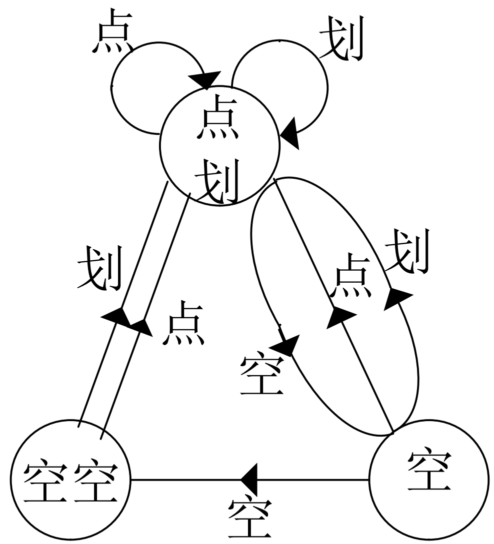


图6.16 合并后的状态图

§6.6.1 标号图的基本概念

例 6.17 利用节点吸收原则对图6.15状态图化简。

解：将状态节点“空空”吸收可得到图6.17（a）的状态图。此时的标号集合为$\Sigma=\{$点，划，空，空点，空划$\}$。还可以将“空”节点吸收，成为1个状态的图，如图6.17（b）所示。此时的标号集合为

$\Sigma=\{$点，划，空点，空划，空空点，空空划$\}$。

由于只有1个状态，所以可看成无约束系统，标号集中的标号可以无约束地结合，不会出现不允许的情况。

§6.6.1 标号图的基本概念

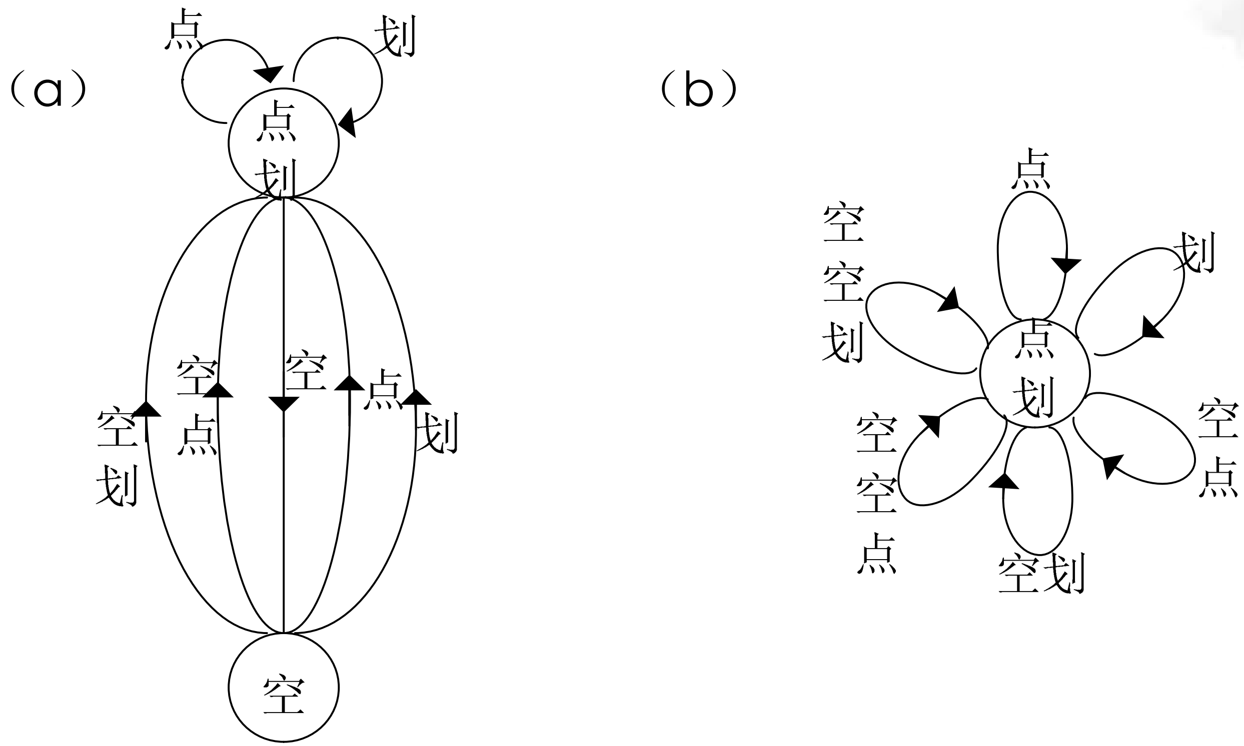


图6.17 状态节点吸收后状态图

§6.6.2 有约束信道容量的计算

一个有约束信道的容量C定义为：

$$C=\lim_{T\to\infty} logM(T)/T \quad （6.49）$$

其中，M（T）为时间长度T内所允许的序列个数。这些不同排列构成的序列可以代表信源的不同输出。根据渐近均分特性，当T足够大时，信源输出序列接近等概率出现；再根据离散最大熵定理，当这M（T）种序列等概率时，达到最大熵。式（6.49）表示在单位时间内所能传输的最大信息量。

§6.6.2 有约束信道容量的计算

定理6.8 等时长有约束信道的容量等于系统连接矩阵最大特征值的对数，即 $C = log_2\lambda_{max}$（比特/符号）其中λ_{max}为系统连接矩阵最大特征值。

证： 设每信道符号为单位时长1,有约束系统的连接矩阵为D，总状态数为N，那么从状态i出发长度为$t+1$（t为正整数）的不同序列数$M_i(t+1)$应等于从状态i出发终止到以状态j出发的长度为t的所有序列数的总和，有如下差分方程组：

$$M_{\mathrm{i}}(t+1)=\sum_{j=1}^{N}d_{ij}M_{j}(t) \qquad i=1,\cdots,N$$

其中，d_{ij}为矩阵D的第(i,j)元素。

解此线性常系数齐次差分方程组，解为λ^t的线性组合。

§6.6.2 有约束信道容量的计算

设 $M_i(t) = y_i\lambda^t$为方程的特解，代入$M_i(t+1)$ ，得

$$\lambda^t(\lambda y_i) = \lambda^t \sum_{j=1}^{N} d_{ij} y_j, i = 1, \cdots, N$$

另 $y^T = (y_1, \cdots, y_N)$，将方程组写成矩阵形式，有$\lambda y = Dy$

λ应为D的特征值。当t很大时，只有最大的特征值起作用，所以

$M_i(t) \approx a_i \lambda_{\max}^t$ a_i为独立于t的常数，$\lambda_{\max}$为矩阵D的最大实特征值，即为特征方程 $|D - zI| = 0$ 的最大实根。

将 $M_i(t)$ 值代入$C = \lim\limits_{T\to\infty} \log M(T)/T$可得$\boldsymbol{C} = \log_2 \boldsymbol{\lambda_{max}}$

§6.6.2 有约束信道容量的计算

例 6.18 设一个有约束系统的标号图如图所示，其中0,1符号等时长，

写出系统的连接矩阵和特征方程，并求d = 1时有约束信道的容量。

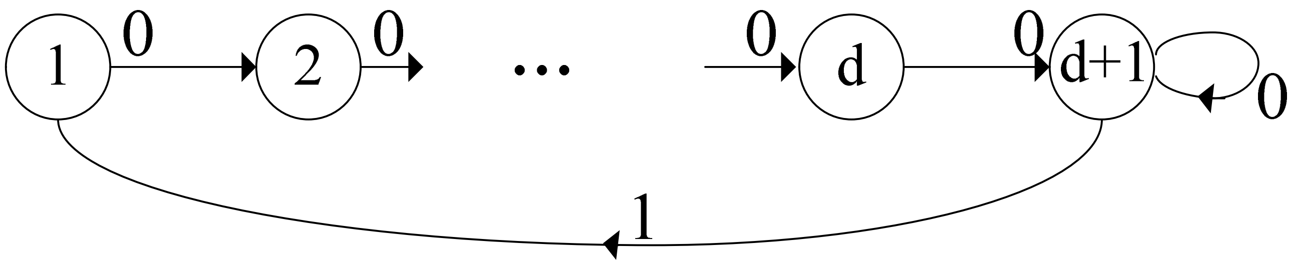


图6.18 等时长约束系统

§6.6.2 有约束信道容量的计算

解：连接矩阵D为如下$(d+1)\times(d=1)$阶矩阵：

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\left|D-zI\right|=0$，得 z^{d+1}-z^{d}-1=0 令d $=1$，上式变为z^{2}-z -1=0

解得$\lambda_{\max}$=$(1+\sqrt{5})/2$

信道容量 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{log_2\lambda_{max}}$=$\log_2[(1+\sqrt{5})/2]$=0.694比特/符号

设信源符号a_1，a_2，…，a_N的时间长度分别为t_1，t_2，…，t_N，其中

每个t_i是某单位时长的整数倍，**方程$\boldsymbol{z^{-t_1}+z^{-t_2}+\cdots+z^{-t_N}}$=1称为系统的特征方程。**

§6.6.2 有约束信道容量的计算

定理6.9 不等时长无约束信道容量等于系统特征方程最大实根的对数，$C=log_2\lambda_{max}$（比特/符号）

证　设M（t）表示在时间长度t内序列的个数。由于传输无约束，所以

差分方程成立：

将方程的一个解$M(t)=yz^t$代入上式，得$yz^t=\sum_{i=1}^{N}yz^{t-t_i}$；两

边除以yz^t，得$z^{-t_1}+z^{-t_2}+\cdots+z^{-t_N}$=1

令λ_{max}为方程①最大实根，可得信道容量：$C=\lim_{t\to\infty}log_2M(t)/t=$ $log_2\lambda_{max}$（比特/单位时长）

§6.6.2 有约束信道容量的计算

例　6.19 在摩尔斯电码中，设“点”、“划”、“空”的时长分别为$2t_0$，$4t_0$，$3t_0$，（其中t_0为单位时长），求无约束信道的容量。

例　6.20 将例6.6.5中的标号图化简成一个状态，然后求无约束信道的容量。

§6.6.2 有约束信道容量的计算

定理6.10 设$\boldsymbol{l_{ij}^{(s)}}$为所允许的从状态**i**到状态**j**的第**s**符号的时长，则信道容量$\boldsymbol{C = log\lambda}$，其中$\boldsymbol{\lambda}$为下面方程的最大实根：

$$\left| \sum_{s} \lambda^{-l_{ij}^{(s)}} - \delta_{ij} \right| = 0 \quad （6.61）$$

其中，$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

定理6.10可以把定理6.8与6.9作为特例来处理。例如对于等时长情况，设$\boldsymbol{l_{ij}^{(s)}}$=1，方程②变为$\left|d_{ij}\lambda^{-1} - \delta_{ij}\right|$=0，这与 $\left|D - zI\right| = 0$ 等价。对于不等时长无约束情况，式6.61中相当于只含有一项，而$\boldsymbol{l_{ij}^{(s)}}$包含了所有符号的时长，这归结于$z^{-t_1} + z^{-t_2} + \cdots + z^{-t_N}$=1

§6.6.2 有约束信道容量的计算

例　6.21 在例6.19中引入两个“空”后不能再接“空”的约束，求信道容量。

提示：利用无约束系统求解，求出标号集合中的符号长度，将这些数值代入$z^{-t_1}+z^{-t_2}+\cdots+z^{-t_N}=1$，可得结果。

本 章 小 结

1．平稳离散无记忆信道模型：$\{X, p(y|x), Y\}$

2．平稳离散无记忆信道的容量：$C \equiv \max\limits_{p(x)} I(X;Y)$

3．特殊离散无记忆信道的容量的计算

★ 对称信道：输入等概率时达到容量，且

$$C = H(Y) - H(p_1, p_2, \ldots, p_s)$$

★ 一般离散信道

[P]有逆阵时 $c = \log \sum\limits_j 2^{\beta_j}$ $[\beta] = -[P]^{-1}[h]$

本 章 小 结

★利用定理列方程组求解 $I(a_i;Y)=C$，对于$p_i>0$

$I(a_i;Y)\le C$，对于$p_i=0$

★ 级联信道：转移概率矩阵为各级联信道矩阵的乘积，再计算容量。

★ 离散平稳无记忆N次扩展信道 $C^N = NC$

★ 并联信道 $C=\sum_{i=1}^{N} C_i$ 当信源无记忆时信道达到容量

★ 和信道 $C=\log_2 \sum 2^{C_i}$ 达到容量的输入概率为各子信道达到容量时的概率再乘以 r_i

本 章 小 结

4. 离散无记忆信道容量的迭代计算

当信道固定（即 p_{ij} 固定）时，把 $I(X;Y)$ 看成 p_i, q_{ji} 的函数，利用 $I(X;Y)=\sum_i\sum_j p_i p_{ij}\ln\frac{q_{ij}}{p_i}$ 计算的迭代。

5. 有约束序列可用标号图描述，根据标号图的连接矩阵就可求出有约束系统的容量C

$$C=\log_2\lambda_{\max}$$

其中，$\lambda_{\max}$ 为连接矩阵的最大特征值。

谢谢!