第10章

网络信息论初步

本章内容

10.1 概述

10.2 多址接入信道

10.2.1 二址接入信道的容量

10.2.2 多址接入信道的容量

10.2.3 不同多址方式下的接入信道容量

本章内容

10.3　广播信道

10.3.1　概述

10.3.2　退化广播信道的容量区

10.4　中继信道

10.4.1　概述

10.4.2　退化中继信道的容量

10.5　分布信源编码

10.5.1　无损分布信源编码

10.5.2　具有边信息的有损分布信源编码

10.5.3　分布信源编码的应用

§10.1 概述

本章网络信息论的最基本内容：

（1）在网络环境下的多用户信道特性，初步探讨网络环境下的信息可靠传输问题

（2）在网络环境下的相关信源压缩编码，初步探讨网络环境下的信息有效传输问题

§10.1 概述

信息可靠传输问题的信道模型：

（1）多输入单输出信道（多址接入信道）

（2）单输入多输出信道（广播信道）

（3）中继站协助转发信道（中继信道）

§10.1 概述

多用户信道研究的主要问题：

（1）多用户信道的信道容量

（2）多用户信道编码定理

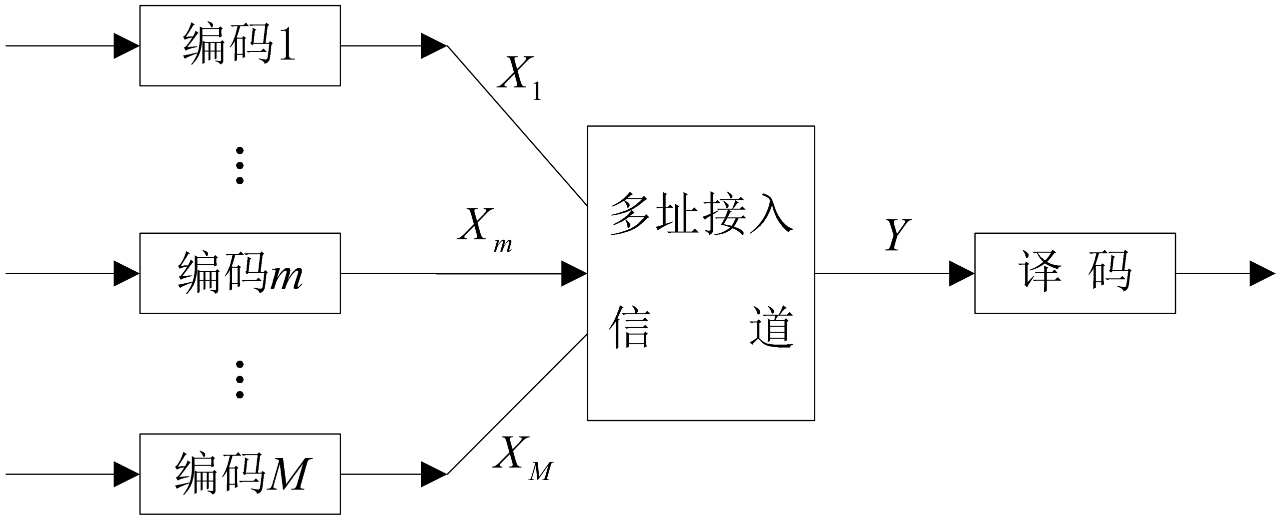
（3）实现编码定理的码结构问题

§10.2 多址接入信道

10.2　多址接入信道

- 10.2.1 二址接入信道的容量
- 10.2.2 多址接入信道的容量
- 10.2.3 不同多址方式下的接入信道容量

§10.2 多址接入信道

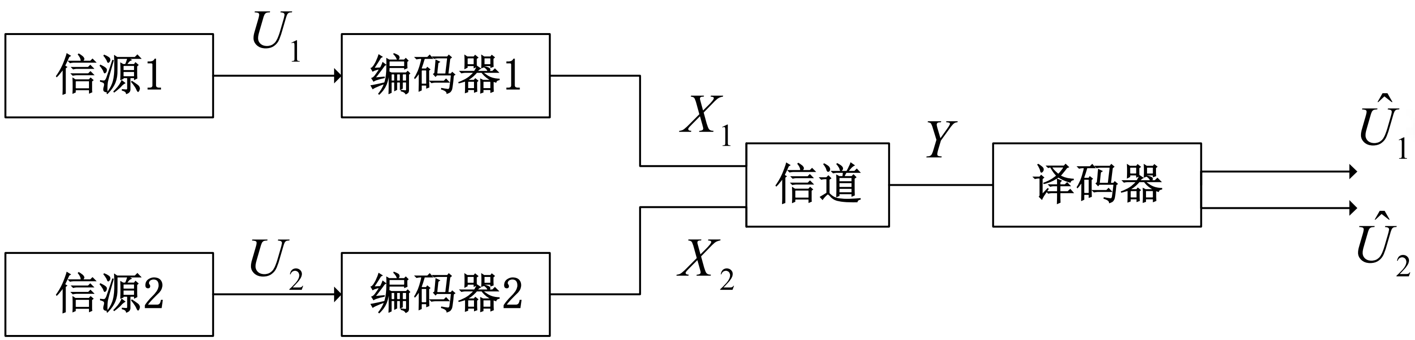


二址接入信道的容量

多址接入信道的容量

不同多址方式下的接入信道容量

§ 10. 2. 1 二址接入信道的容量



★信道无记忆：

$$p\left(y\,|\,\vec{x}_1\vec{x}_2\right)=\prod_{i=1}^{n}p\left(y_i\,|\,x_{1i}x_{2i}\right) \qquad （10. 1）$$

其中 $\vec{x}_k=\left(x_{k1},\cdots,x_{kn}\right),\left(k=1,2\right)$

★二址接入信道（两个输入）：$\left\{X_1X_2,p\left(y\,|\,x_1,x_2\right),Y\right\}$

§ 10. 2. 1 二址接入信道的容量

定理10. 1 一个无记忆二址接入信道的容量是一个满足下面条件的凸集合：

$$R_1 < I(X_1;Y \mid X_2) \quad (10.2)$$

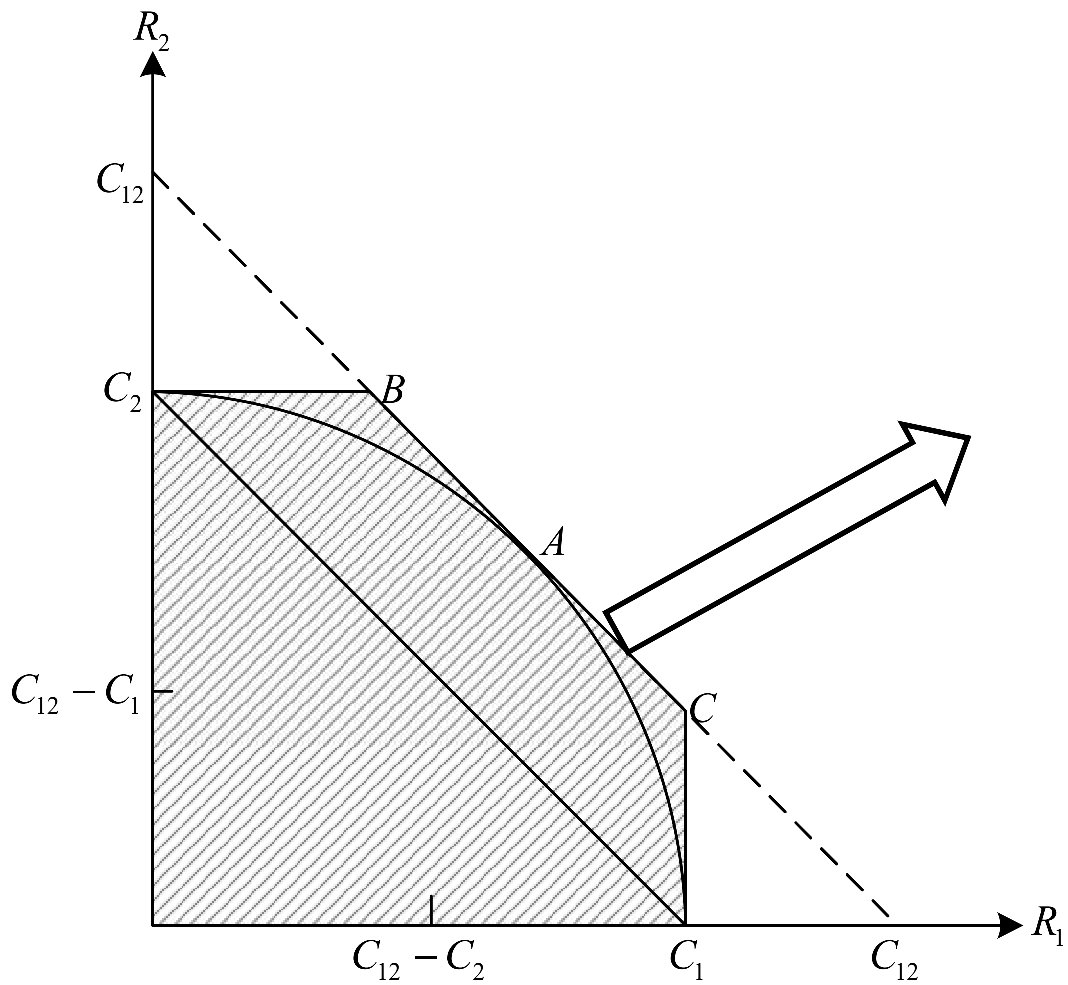
$$R_2 < I(X_2;Y \mid X_1) \quad (10.3)$$

$$R_1 + R_2 < I(X_1X_2;Y) \quad (10.4)$$

其中，X_1 和 X_2 分别为信源符号 U_1 和 U_2 的每个符号所对应的长度为n的码字集合，且 U_1 的符号集为 $\{1,2,\cdots,2^{nR_1}\}$，U_2 的符号集为 $\{1,2,\cdots,2^{nR_2}\}$。R_1和 R_2 分别为信源符号 U_1 和 U_2 信道编码后的信息传输速率。

§10.2.1 二址接入信道的容量

根据定理10.1可求得二址接入信道的可达 $p(y|x_1,x_2)$ 速率区域（下图阴影部分）：



$$R_1 \le C_1$$

$$R_2 \le C_2$$

$$R_1 + R_2 \le C_{12}$$

§10.2.1 二址接入信道的容量

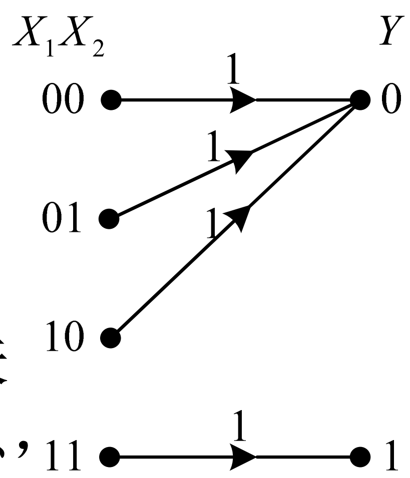
例10.1

二址接入二元乘积信道。设一个二址接入信道，输入$X_1=\{0,1\}$,$X_2=\{0,1\}$，输出$Y=\{0,1\}$，且$Y=X_1X_2$，求该信道的容量区域。

§ 10.2.1 二址接入信道的容量

解：

信道转移概率$P(y|x_1x_2)$是0-1分布（对所有x_1, x_2和y）。对任意输入概率分布都有$H(Y|X_1X_2)=0$。又当X_2固定取值为1时，X_1与Y是一一对应的确定关系，又因为X_1与X_2相互独立，所以，



$$I(X_1;Y|X_2=1)=H(X_1|X_2=1)-H(X_1|X_2=1,Y)=H(X_1)$$

$$I(X_1X_2;Y)=H(Y)-H(Y|X_1X_2)=H(Y)$$

§10.2.1 二址接入信道的容量

解：

由（10.1）得到速率对 (R_1,R_2) 的可达区域为：

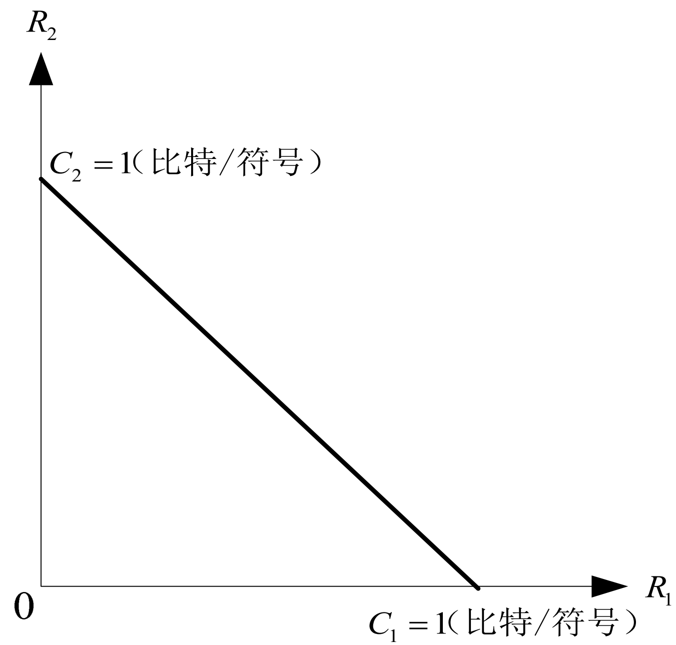
$$\left\{(R_1,R_2):0\le R_1\le H(X_1),0\le R_2\le H(X_2),0\le R_1+R_2\le H(Y)\right\}$$

求得 $C_1=\max\limits_{p(x_1)}H(X_1)=1$ 比特/符号

$C_2=\max\limits_{p(x_2)}H(X_2)=1$ 比特/符号

$C_{12}=\max\limits_{p(x_1)p(x_2)}H(Y)=1$ 比特/符号

因此二元乘积信道的容量区域如右图所示。



§10.2.1 二址接入信道的容量

例10.2

二址接入二元删除信道。设信道输入$X_1=\{0,1\}$，$X_2=\{0,1\}$，输出$Y=\{0,1,2\}$，且$Y=X_1+X_2$，其中“+”为代数和，因此也称为二元和信道，求信道的容量区域。

§10.2.1 二址接入信道的容量

解：

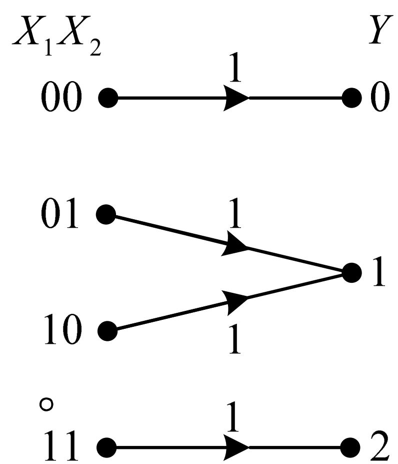
如右图所示为信道的转移概率 $P(y|x_1x_2)$ 图。当 X_2 已知时，由(10.5)式可求得

$$C_1=\max_{p(x_1)} I(X_1;Y|X_2)=\max_{p(x_1)} H(X_1)=1\text{比特/符号}$$

同理，当X_1 已知时，可求得

$$C_2=1 \text{ 比特/符号}$$

下面在 X_1 和 X_2 统计独立的条件下求C_{12}。



§10.2.1 二址接入信道的容量

解：

由(10.10)式，有 $C_{12}=\max\limits_{p(x_1)p(x_2)} I\left(X_1X_2;Y\right)$ 。

设X_1：$p_0=p$ ，$p_1=1-p$ ；X_2 ：$p_1'=p'$ ，$p_0'=1-p'$ 。则有

$$Y：q_0=p(1-p'),q_1=pp'+(1-p)(1-p'),q_2=p'(1-p)$$

而 $I(X_1X_2;Y)=H(Y)-H(Y|X_1X_2)$，但信道无噪声，$H(Y|X_1X_2)=0$ ，所以

$$I(X_1X_2;Y)=H(Y)=-p(1-p')\log[(1-p')p]-(1-p)p'\log[(1-p)p']$$
$$-[pp'+(1-p)(1-p')]\log[pp'+(1-p)(1-p')]$$

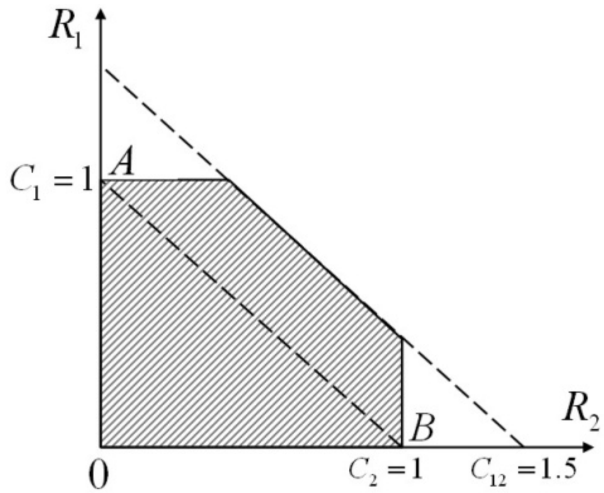
§ 10. 2. 1 二址接入信道的容量

解：

令上式分别对p 和 p' 的偏导数为零，可得当 $p = p' = 1/2$ 时，

$$C_{12} = -\frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = 1.5 \text{ 比特}$$

信道的容量区域如右图所示。

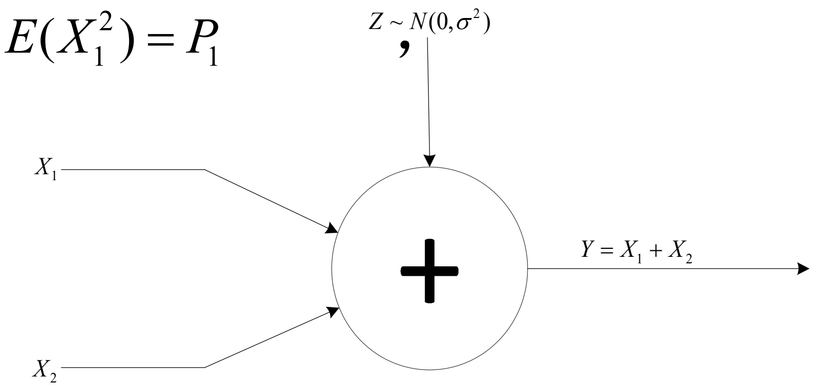


§10.2.1 二址接入信道的容量

例10.3

二址接入二元高斯信道。设X_1和X_2都是取值于$(-\infty,\infty)$的随机变量，其概率密度分别为$p_{X_1}(X_1)$和$p_{X_2}(X_2)$。信道输出$Y=X_1+X_2+Z$，Z为零均值、方差为σ^2的高斯白噪声，如图所示，设输入均值为零，平均功率受限即$E(X_1^2)=P_1$，$E(X_2^2)=P_2$，且与Z相互独立。

求该信道的容量区域。



§ 10. 2. 1 二址接入信道的容量

解：

信道的转移概率密度为

$$P(Y\mid X_1X_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp[-\frac{(y-x_1-x_2)^2}{2\sigma^2}]$$

式中σ^2是Z 的方差，即噪声平均功率。

由于正态分布的熵与均值无关，只与方差有关，所以有$h(Y\mid X_1X_2)=\log(2\pi e\sigma^2)/2$，现求$C_1$、$C_2$和$C_{12}$ 。

$$C_1=\max_{p(X_1)p(X_2)}[h(Y\mid X_2)-h(Y\mid X_1X_2)]=\max_{p(X_1)p(X_2)}h(Y\mid X_2)-\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

§10.2.1 二址接入信道的容量

解：

已知限平均功率时，随机变量取正态分布的熵最大，因此求 $\max_{p(X_1)p(X_2)} h(Y \mid X_2)$ 就是要求X_1已知条件下Y是高斯分布的熵。当X_2已知时，Y的方差是$P_1+\sigma^2$，则

$$C_1 = \frac{1}{2}\log\frac{P_1+\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_1}{\sigma^2})$$

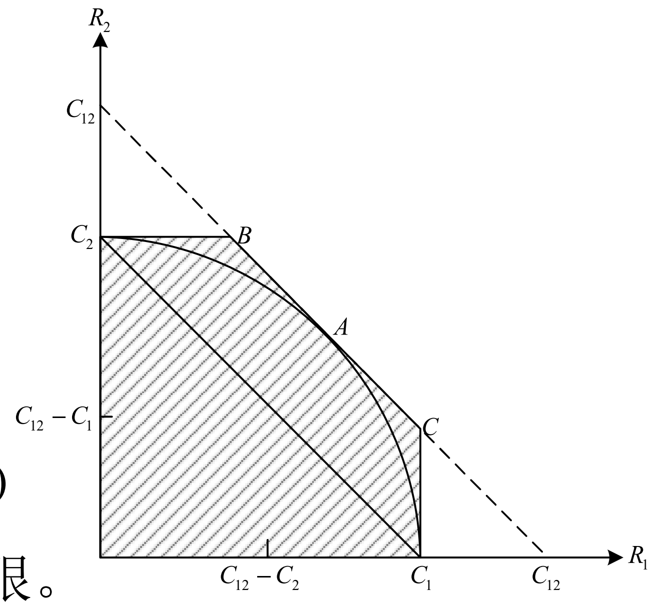
同理可得：

$$C_2 = \frac{1}{2}\log\frac{P_2+\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_2}{\sigma^2})$$

而$E(Y^2)=P_1+P_2+\sigma^2$，因此：

$$C_{12} = \frac{1}{2}\log\frac{P_1+P_2+\sigma^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_1+P_2}{\sigma^2})$$

利用上述的结果可以得到如图的容量界限。



§ 10. 2. 2 多址接入信道的容量

★由二址接入信道推广到多址接入信道

已给条件概率

$$p(y \mid x_1, \cdots, x_m)$$

分别规定各信源信息率限制：

$$R_r \le C_r = \max_{p_1(x_1)\cdots p_m(x_m)} I(X_r; Y \mid X_1 \cdots X_{r-1} X_{r+1} \cdots X_m) \qquad (r = 1, \cdots, m)$$

再规定各种联合限制，对任一 $S \subseteq \{1, \cdots, m\}$， （10. 15）

$$\sum_{r \in S} R_r \le C_S = \max_{p_1(x_1)\cdots p_m(x_m)} I(\prod_{r \in S} X_r; Y \mid \prod_{r \notin S} X_r) \qquad （10. 16）$$

也可证明，当各信源相互独立时，有

$$\sum_{r \in S} C_r \ge C_S \ge \max_{r \in S}[C_r] \qquad （10. 17）$$

§10.2.2 多址接入信道的容量

以上结果限定了具有m 个独立输入的多址接入信道的容量区域是一个截角 m维多面体。

这样，计算信道容量就是计算各 C_r 和 C_S 。

由于以上一系列公式都是熵的差，所以同时适用于离散变量和连续变量。

§10.2.2 多址接入信道的容量

★高斯多址接入信道

设多址接入包含 m 个发信机，平均功率约束为 $(P_1,\cdots,P_m)$，信道输出为 Y，噪声为零均值、平均功率为 N 的加性高斯白噪声，那么

$$Y=\sum_{i=1}^{m}x_i+z \qquad (10.18)$$

该信道称为 m 个用户的高斯多址接入信道。

§ 10. 2. 2 多址接入信道的容量

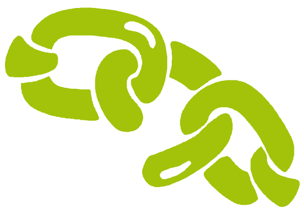
定理10. 2

m个用户高斯多址接入信道的容量区为：

$$\sum_{i\in S} R_i < C\left(\frac{\sum_{i\in S} P_i}{N}\right) \qquad (10.19)$$

如果各用户的平均功率约束都相同为P，那么（11. 19）变为

$$\sum_{i\in S} R_i < C\left(\frac{|S|P}{N}\right) \qquad (10.20)$$



§10.2.3 不同多址方式下的接入信道容量

★实际系统中常采用的多址方式有频分、时分和码分三种。三种多址方式下传输可达的信道容量是不完全一样的。

下面以二址接入信道为例对三种多址方式进行比较

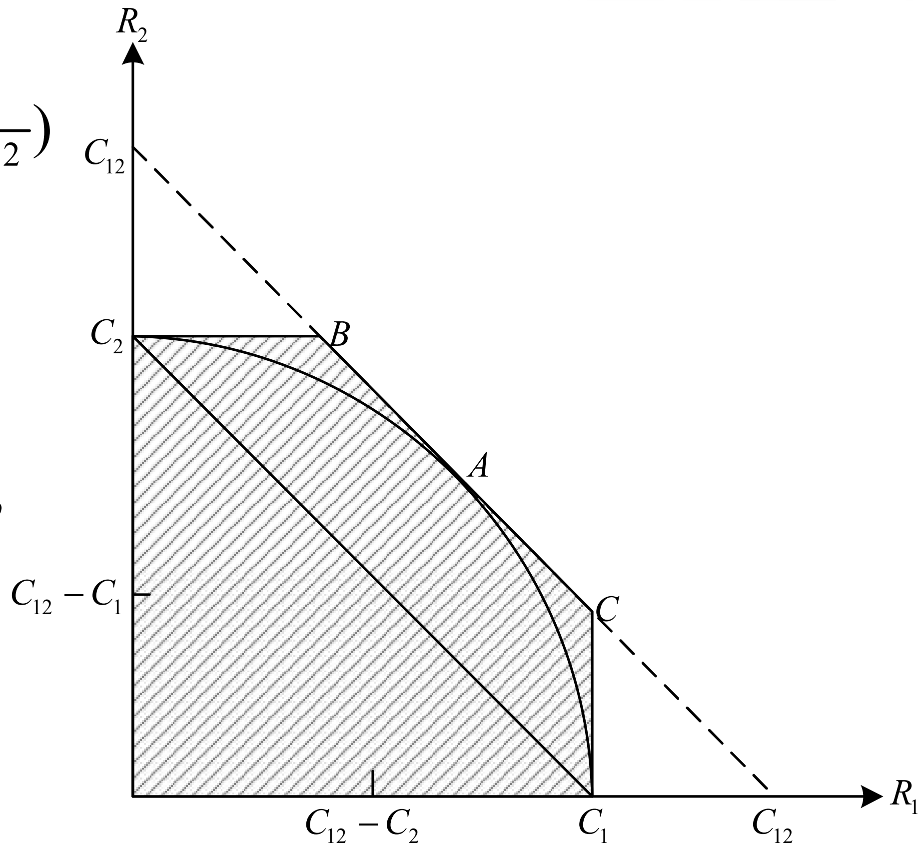
1. 时分方式

$$R_1 \le \theta C_1 = \frac{\theta}{2}\log(1+\frac{P_1}{\theta\sigma^2})$$

$$R_2 \le (1-\theta)C_2 = \frac{1-\theta}{2}\log(1+\frac{P_2}{(1-\theta)\sigma^2})$$

$$R_1 + R_2 \le C_{12} = \frac{1}{2}\log(1+\frac{P_1+P_2}{\sigma^2})$$

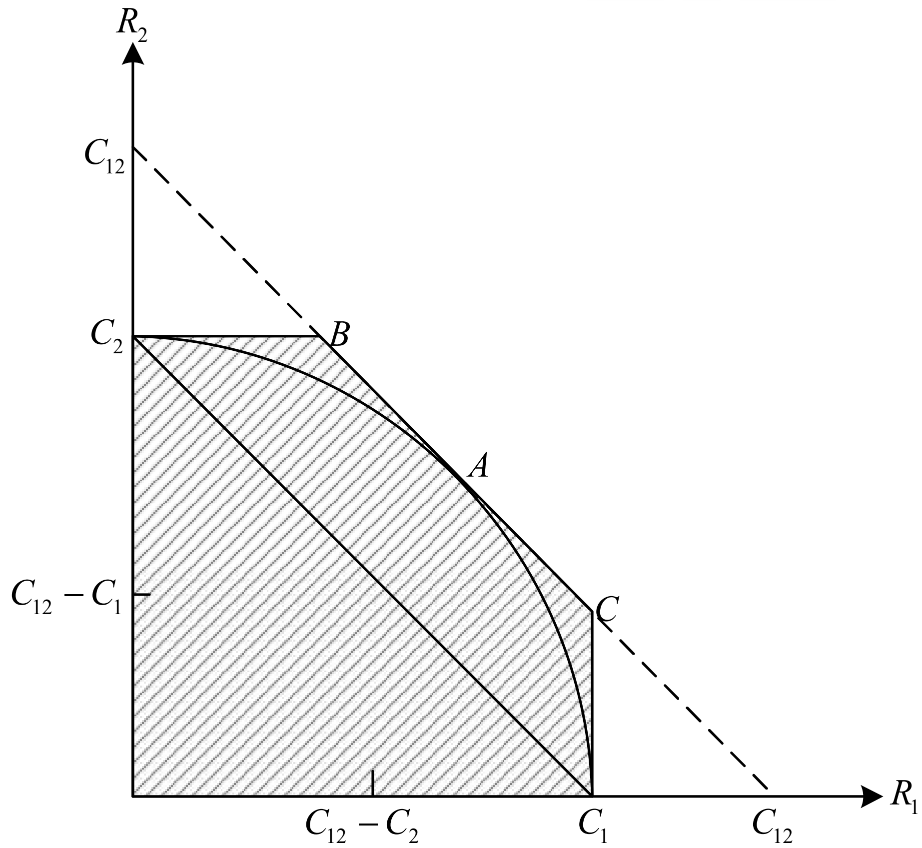
取不同的θ 得到不同的(R_1, R_2)，
从而可以得到右图C_1AC_2曲线。



1. 时分方式

★图中曲线以下的 (R_1, R_2) 是在信道中可能以任意小的差错率来传送消息的速率

★对于连续多址接入信道，时分方式不是最佳



2. 频分方式

利用限带加性白色高斯噪声信道容量的公式：

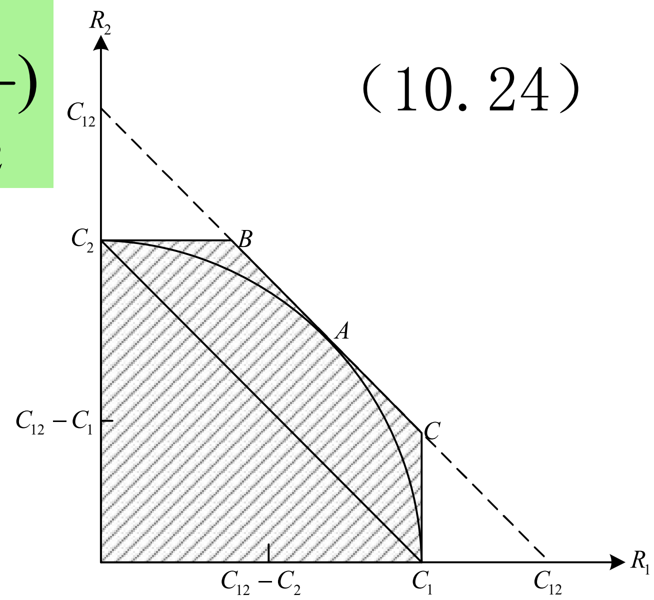
$$C = W\log(1+\frac{P_S}{N_0 W}) bit/s$$

设信道的总频带被分为 W_1和 W_2 两部分，则可以得到：

$$R_1 \le W_1\log(1+\frac{P_{S_1}}{N_0 W_1}), R_2 \le W_2\log(1+\frac{P_{S_2}}{N_0 W_2}) \qquad (10.24)$$

$W_1 = W, W_2 = 0$对应图中 C_1 ；

$W_1 = 0$, $W_2 = W$ 对应图中 C_2 。



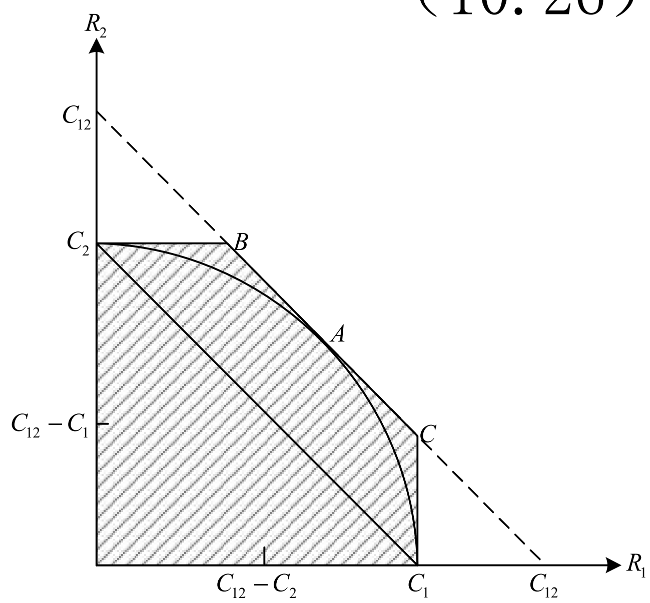
2. 频分方式

当W_1, W_2 的值满足 $\dfrac{W_1}{W} = \dfrac{P_{S_1}}{P_{S_1} + P_{S_2}}, \dfrac{W_2}{W} = \dfrac{P_{S_2}}{P_{S_1} + P_{S_2}}$ （10.25）

有 $R_1 + R_2 = W_1 \log(1 + \dfrac{P_{S_1} + P_{S_2}}{N_0 W}) + W_2 \log(1 + \dfrac{P_{S_1} + P_{S_2}}{N_0 W}) = W \log(1 + \dfrac{P_{S_1} + P_{S_2}}{N_0 W})$

（10.26）

所描述的曲线与图中BC线相切，此时频分多址的速率也达到理论容量域的最大值。



时分与频分方式的对比

★在平均功率受限的约束下，采用时分多址方式和频分多址方式的可达速率区域均小于理论给出的容量区域。

★但是通过设计时隙分配或带宽分配的比例，时分多址与频分多址又都可使速率达到理论容量域的最大值。

3. 码分方式

★码分多址方式中，所有信道输入信号都占用信道的全部带宽和时间，各信号间不存在时隙分配或带宽分配问题。

★理论上，两个信源采取相互正交的编码方式同时传输，可以充分地利用多址接入信道的容量。

★因此，达到理论容量的码分多址方式是存在的。

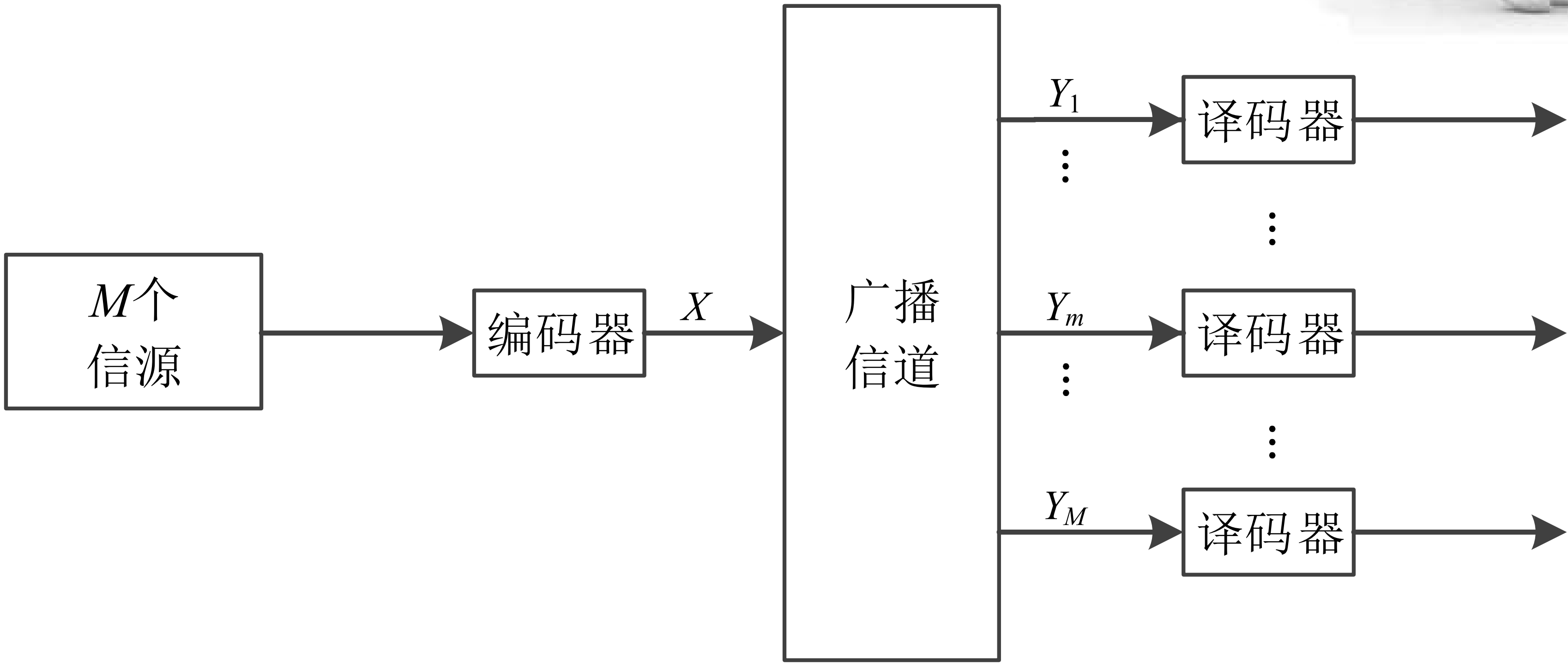
§10.3 广播信道

10.3 广播信道

10.3.1 概述

10.3.2 退化广播信道的容量区

§ 10. 3 广播信道



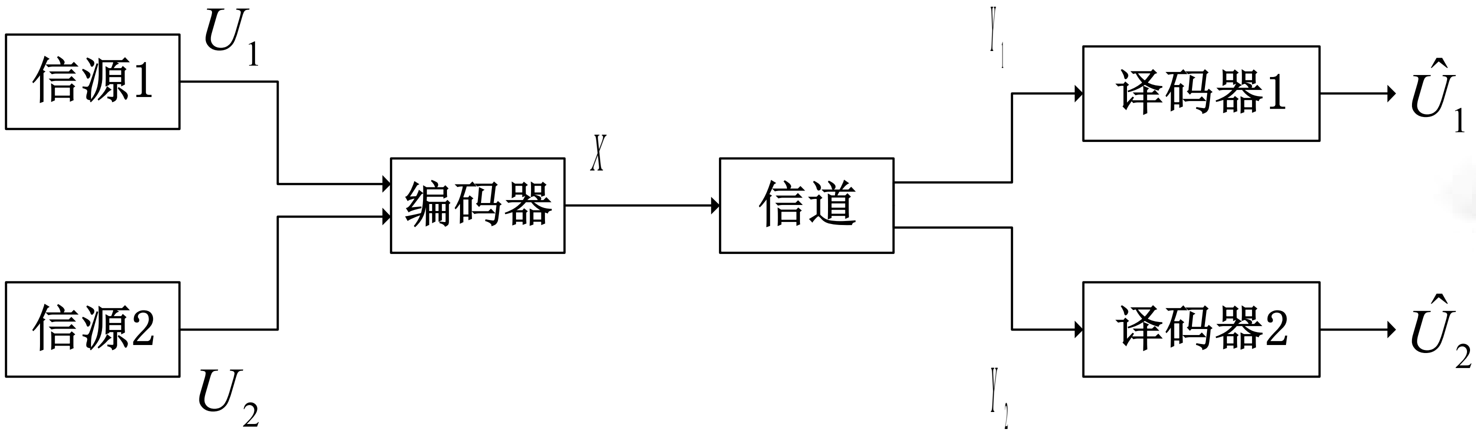
§10.3.1 概述

★广播信道中，译码只能分散地进行

★研究广播信道时，在一个信道中要发送不同的消息给每个接收端，而且每个接收端所对应的信道转移矩阵是不相同的。

★当广播信道向所有信宿传送相同的信息且每个接收端所对应的信道转移矩阵相同，广播信道的问题就退化为单用户信道问题。

§10.3.1 概述



上图为最简单的广播信道（单输入单输出无记忆广播信道）

信道表示：

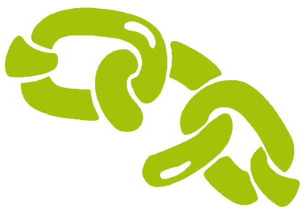
$$(X, p(y_1 y_2 \mid x), Y_1 Y_2)$$

信道无记忆：

$$p(\vec{y}_1 \vec{y}_2 \mid \vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} p(y_{1i} y_{2i} \mid x_i) \qquad (10.27)$$

其中

$$\vec{y}_k = (y_{k1}, \cdots, y_{kn}), (k = 1, 2)$$



★广播信道问题最早由Cover提出，到目前为止，只有在退化广播信道的情况下才得到基本解决。

§10.3.2 退化广播信道的容量区

★广播信道物理退化的条件：

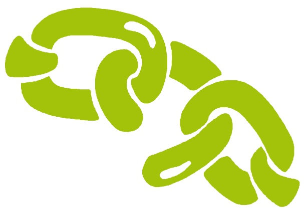
广播信道$(X, p(y_1y_2|x), Y_1Y_2)$ 满足$p(y_1y_2|x)=p(y_1|x)p(y_2|y_1)$

★广播信道随机意义上退化的条件：

一个广播信道的条件边际概率（或分布密度）与一个物理退化的广播信道的条件边际概率（或密度）相同。即存在某一边际概率（或密度）$p'(y_2|y_1)$，使得：

$$p(y_2|x)=\sum_{y_1} p(y_1|x)p'(y_2|y_1) \quad \text{(离散信道)} \qquad (10.28)$$

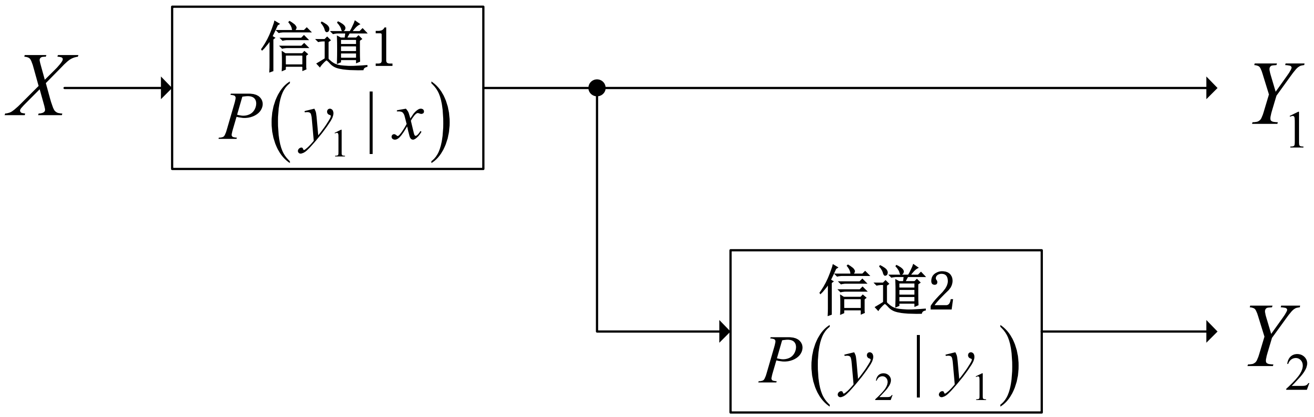
$$\int_{Y_1} p(y_1|x)p'(y_2|y_1)dy_1 = p(y_2|x) \quad \text{(连续信道)} \qquad (10.29)$$



§10.3.2 退化广播信道的容量区

★广播信道的容量仅与条件概率有关，因此
随机意义上退化的广播信道的容量区域对应的物理退化广播信道的相同

★对于退化的广播信道可看成两个信道级联，如图所示。



$X \to Y_1 \to Y_2$构成一个马氏链。

§10.3.2 退化广播信道的容量区

定理10.3

通过退化广播信道$X \to Y_1 \to Y_2$发送独立信息的容量区域是满足下式的所有的(R_1, R_2)的封闭集合的凸包：

$$\boxed{0 \le R_2 \le I(U;Y_2)} \qquad (10.30)$$

$$\boxed{0 \le R_1 \le I(X;Y_1 \mid U)} \qquad (10.31)$$

式中，对于某种联合分布 $p(u)p(x \mid u)p(y_1 y_2 \mid x)$，且辅助随机变量U的基数 $|U| \le \min\{|X|,|Y_1|,|Y_2|\}$ 。

§10.3.2 退化广播信道的容量区

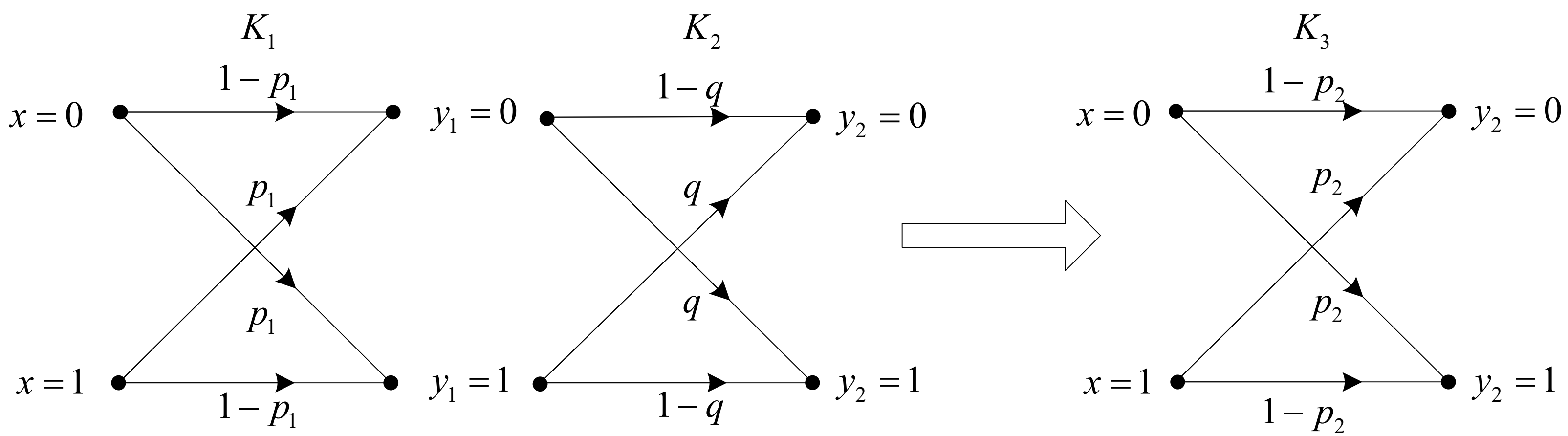
例10.4

两个二元对称信道K_1和K_2构成广播信道$(X, p(y_1y_2|x), Y_1Y_2)$，其中K_1的输入与输出分别为X和Y_1，错误概率为p_1，K_2的输入与输出分别为X和Y_2，错误概率为p_2，且$p_1 < p_2 < 1/2$。求此广播信道的容量区。

§10.3.2 退化广播信道的容量区

解：

设信道K_3的转移概率为 $p(y_2|y_1)$，根据(10.28)，K_2可以看成是K_1 和 K_3 的级联，其中 K_3 也是二元对称信道，设它的错误转移概率用q 表示，如图所示。



§ 10. 3. 2 退化广播信道的容量区

解：

有 $P(Y_2 \mid X) = \begin{bmatrix} 1-p_2 & p_2 \\ p_2 & 1-p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p_1 & p_1 \\ p_1 & 1-p_1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1-p_1)(1-q)+p_1 q & (1-p_1)q+(1-q)p_1 \\ (1-p_1)q+(1-q)p_1 & (1-p_1)(1-q)+p_1 q \end{bmatrix}$$

记 $p_2 = (1-p_1)q + (1-q)p_1 = p_1 * q$，其中* 为卷积运算。

我们构造一个二元随机信源U，根据对称性，$P(x \mid u)$也应为对称分布，因此 U 到 X 的对应关系相当于经过一个辅助信道。

§10.3.2 退化广播信道的容量区

解：

设此信道为错误转移概率为p_0 的二元对称信道，可计算得

$$I(U;Y_2)=H(Y_2)-H(Y_2|U)=1-H(p_0*p_1*q)=1-H(p_0*p_2)$$

而

$$I(X;Y_1|U)=H(Y_1|U)-H(Y_1|XU)=H(Y_1|U)-H(Y_1|X)=H(p_0*p_1)-H(p_1)$$

根据定理10.3，所求容量区为：

$$R_1<I(X;Y_1|U)=H(p_0*p_1)-H(p_1)$$
$$R_2<I(U;Y_2)=1-H(p_0*p_2)$$

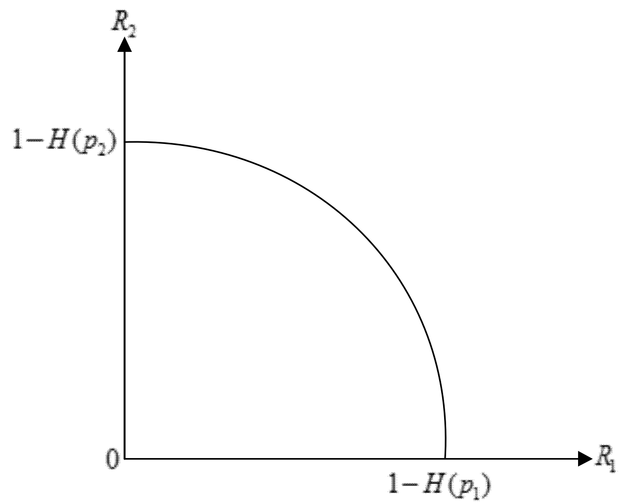
§ 10.3.2 退化广播信道的容量区

解：

当 p_0=0，有最大信息速率传输到 Y_2 即 $R_2=1-H(p_2)$，$R_1=0$。

当 p_0=$1/2$时，有最大信息速率传输到 Y_1 ，即$R_1=1-H(p_1)$ $R_2=0$，而没有信息传输到 Y_2 。

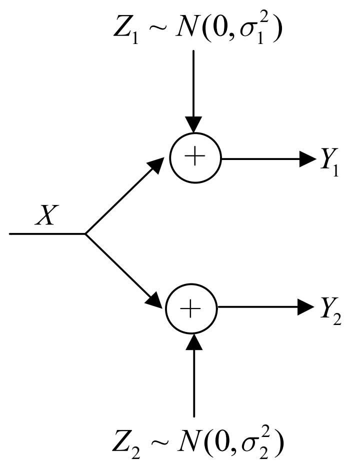
这就是可达速率的两个边界点，如图所示。



§ 10. 3. 2 退化广播信道的容量区

例10. 5

高斯广播信道。如图所示，设信道输入信号平均功率为 P_s，信道输出 $Y_1 = X + Z_1$，$Y_2 = X + Z_2$。对应两个子信道的噪声 Z_1 和 Z_2 都是均值为零且独立于 X 的高斯噪声，方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2（$\sigma_2^2 > \sigma_1^2$），求该信道的容量区域。



§10.3.2 退化广播信道的容量区

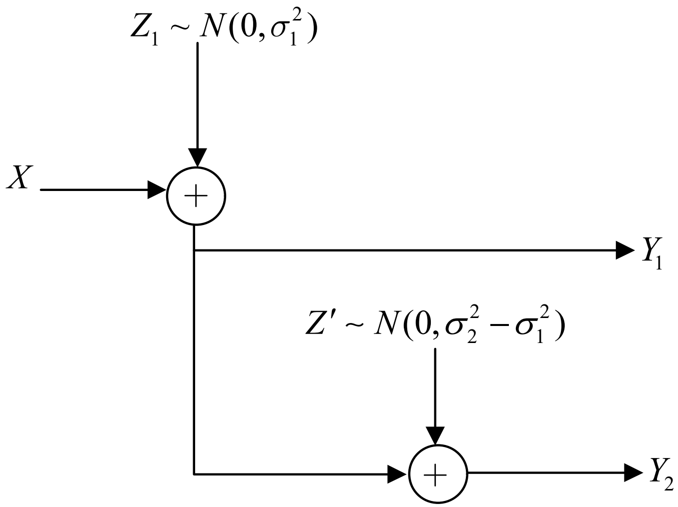
解：

根据题意，有 $E(y_1^2)=E(x^2)+\sigma_1^2$ ，$E(y_2^2)=E(x^2)+\sigma_2^2$ ，所以 $E(y_2^2)=E(y_1^2)+\sigma_2^2-\sigma_1^2$，设 $Y_2=Y_1+Z'$，其中 Z' 均值为零，独立于 Y_1 ，方差为 $\sigma_2^2-\sigma_1^2$的高斯噪声。所以该高斯广播信道也是退化的广播信道，如图所示。

存在如下的条件概率密度函数

$$P(y_2 \mid y_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}}\exp[-\frac{(y_2-y_1)^2}{2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}]$$

满足(11.29b)式的退化条件。



§10.3.2 退化广播信道的容量区

解：

引入辅助随机输入集合 $U=U_1U_2$，并令编码器是相加器，为了方便译码，发送端发送两个码，即 $X=U_1+U_2$，$Y_1=U_1+U_2+Z_1$，$Y_2=U_1+U_2+Z_2$；U_1和 U_2 相互独立。

设 $0\le\theta\le1$，将输入信号功率 P_s 分成两部分 θP_s 和 $(1-\theta)P_s$，U_1用于传输 θP_s 的平均功率为 U_2 ，用来传送的平均功率为 $(1-\theta)P_s$ 即 $E(X^2)=P_{s_1}+P_{s_2}=P_s$，$E(U_1^2)=P_{s_1}=\theta P_s$，其中，$P_s$是受限的信道输入平均功率，但 P_{s_1} 和 P_{s_2} 是可变的，可以通过在编码器的输入端改变 θ 的幅度来改变。

$$E(U_2^2)=P_{s_2}=(1-\theta)P_s$$

§10.3.2 退化广播信道的容量区

解：

从单用户的高斯分布的理论可知，要使退化高斯信道的输入输出的平均互信息最大，输入X 应为高斯分布，因而 Y_1 和Y_2 都将是高斯分布。

当U给定后，U_1为对应 Y_1的输入信号，而Z_1 为噪声，所以有当输入U_1 为高斯分布时，达到容量为

$$I(X;Y_1|U)=\frac{1}{2}\log(1+\frac{\theta P_s}{\sigma_1^2})$$

因为Y_2 和U_1 独立，所以

$$I(U;Y_2)=I(U_1U_2;Y_2)=I(U_2;Y_2)+I(U_1;Y_2|U_2)=I(U_2;Y_2)$$

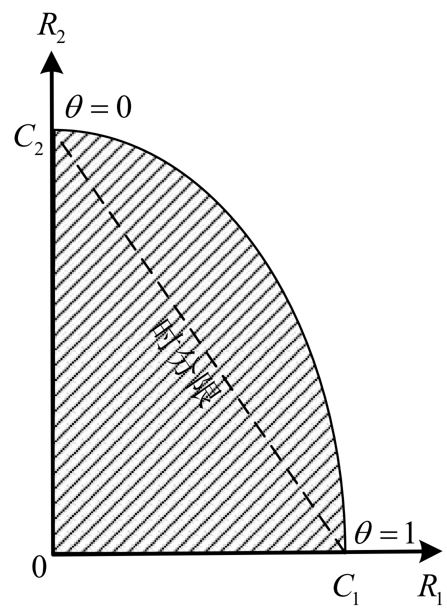
§10.3.2 退化广播信道的容量区

解：

此时，U_1相当于噪声，因此由 U_2 传输到 Y_2 的信噪比为 $\dfrac{(1-\theta)P_s}{\theta P_s+\sigma_2^2}$，所以有 $I(U_2;Y_2)=\dfrac{1}{2}\log(1+\dfrac{(1-\theta)P_s}{\theta P_s+\sigma_2^2})$

因此得信道容量区域为

$$R_1<\frac{1}{2}\log(1+\frac{\theta P_s}{\sigma_1^2})\qquad R_2<\frac{1}{2}\log(1+\frac{(1-\theta)P_s}{\theta P_s+\sigma_2^2})$$



实际通信工程中，M个信源以广播形式向M个信宿传送信息一般采用时分方式，但时分方式并不是最佳的。

虚线表示了在该例中通过变化时分因子θ得到的 $R_1+R_2=\theta C_1+(1-\theta)C_2$ 的容量边界，但明显小于理论的容量界。

§10.4 中继信道

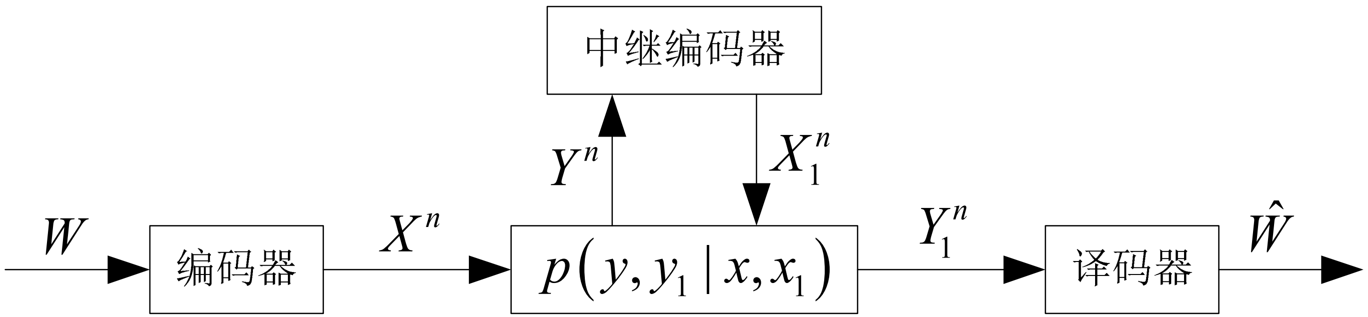
10.4 中继信道

10.4.1 概述

10.4.2 退化中继信道的容量

§ 10. 4. 1 概述

★ 离散无记忆中继信道模型



§10.4.1 概述

中继信道

可达码率　设消息集合 $\mathcal{W}=\{1,2,\ldots,2^{nR}\}$，消息变量W在W上均匀分布，$(2^{nR},n)$表示中继信道的一个编码，如果存在码序列$(2^{nR},n)$，使当 $n\to\infty$时，译码错误概率$p_e^{(n)}\to 0$成立，则称码率R可达。

信道容量　信道容量定义为可达码率集合的上确界，公式为

$$C=\lim_{k\to\infty}\sup_{p\left(x^k\right)} k^{-1}I\left(X^k;Y^k\right) \tag{10.33}$$

§10.4.1 概述

定理10.4 对任意中继信道 $\{\mathcal{X}\times\mathcal{X}_1, p(y,y_1|x,x_1), \mathcal{Y}\times\mathcal{Y}_1\}$ 它的容量受限公式为：

$$C \le \sup_{p(x,x_1)} \min\left\{I(X,X_1;Y), I(X;Y,Y_1|X_1)\right\} \qquad (10.34)$$

其中，上确界操作遍及 $X\times X_1$ 上所有联合分布 $p(x,x_1)$。

§10.4.2 退化中继信道的容量

★ 中继信道 $\{\mathcal{X}\times\mathcal{X}_1, p(y,y_1|x,x_1), \mathcal{Y}\times\mathcal{Y}_1\}$ 的转移概率 $p(y,y_1|x,x_1)$

如果满足:

$$\boxed{p(y,y_1|x,x_1)=p(y_1|x,x_1)p(y|y_1,x_1)} \qquad (10.35)$$

则称为物理退化中继信道。此时，$X\to(Y_1,X_1)\to Y$ 构成马氏链，目的节点是中继节点接收到信号的退化形式。

§10.4.2 退化中继信道的容量

定理10.5

物理退化中继信道的容量为：

$$C=\sup_{p(x,x_1)}\min\left\{I\left(X,X_1;Y\right),I\left(X;Y_1\mid X_1\right)\right\} \qquad (10.36)$$

其中，上确界操作遍及 $\mathcal{X}\times\mathcal{X}_1$上所有联合分布。

§10.4.2 退化中继信道的容量

退化高斯中继信道

$$y_1 = x + z_1$$
$$y = x + z_1 + x_1 + z_2 \qquad (10.37)$$

其中, z_1, z_2为独立、均值为零方差分别为N,和N2的高斯随机变量，中继编码为因果序列

$$x_{1i} = f_i(y_{11}, \cdots, y_{1i-1})$$

设发信机X使用功率和发信机X_1 ,使用功率约束为

$$n^{-1}\sum_{j=1}^{n} x^2(j) \le P$$

$$n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_{1\,i}^2(y_{11}, \cdots, y_{1i-1}) \le P_1$$

§10.4.2 退化中继信道的容量

定理10.6 高斯退化中继信道的容量为

$$C=\max_{0\le\alpha\le1}\min\left\{C\left(\frac{P+P_1+2\sqrt{\bar{\alpha}PP_1}}{N_1+N_2}\right),C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right)\right\}\qquad(10.38)$$

其中，$\bar{\alpha}=1-\alpha$, $C(x)=(1/2)\log(1+x)$

§10.4.2 退化中继信道的容量

★ 注：

(1) 如果 $P_1/N_2 \geq P/N_1$ ，那么 $I(XX_1;Y)=I(X;Y_1|X_1)$ 。中继可以无措转发协作信息到接收机。当 $\alpha=1$ 时，容量可达。这就是说，通过中继信道是无噪声的；

(2) 如果 $P_1/N_2 < P/N_1$ ，那么 $I(XX_1;Y)<I(X;Y_1|X_1)$ 。中继不能保证协作信息可靠传输。发信机必须发送协作信息到接收机，此时 α 严格小于1，所以

$$\frac{1}{2}\log(1+\frac{P+P_1+2\sqrt{\bar{\alpha}PP_1}}{N_1+N_2})=\frac{1}{2}\log(1+\frac{\alpha P}{N_1})$$

§10.5 分布信源编码

10.5　分布信源编码

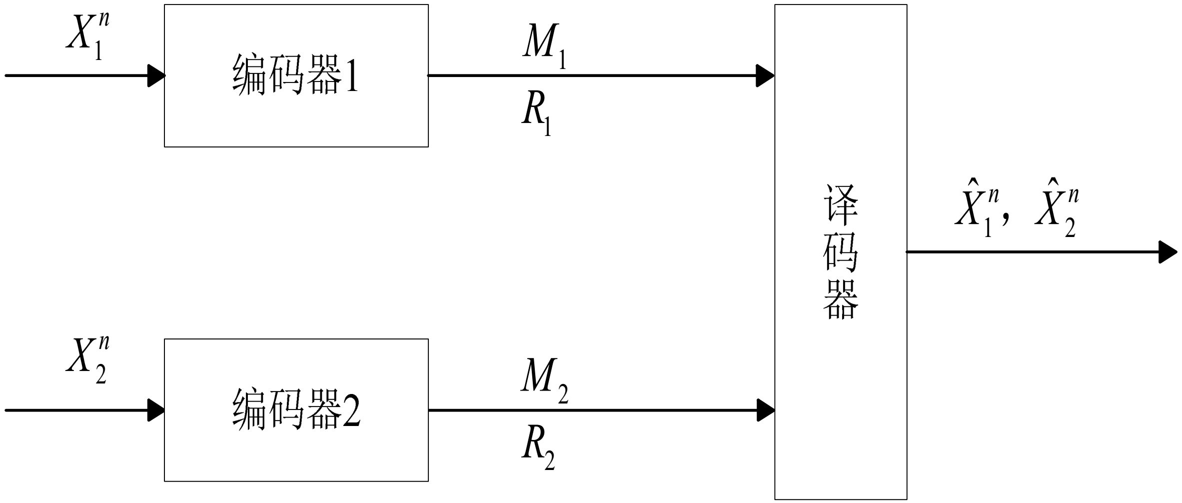
10.5.1　无损分布信源编码

10.5.2　具有边信息的有损分布信源编码

10.5.3　分布信源编码的应用

§10.5.1 无损分布基本原理

★ 两端分布信源编码框图



§10.5.1 无损分布基本原理

★两离散无记忆但相关信源 X_1,X_2 ，联合概率分布为 $p(x_1,x_2)$， 编码器1的速率为 R_1， 编码器2的速率为 R_2 。

★一个两端分布无损信源编码 $(2^{nR_1},2^{nR_2},n)$
包括：
①两个编码器各自独立编码。
②译码器基于接收到的 (m_1,m_2) 估计信源消息序列 $(\hat{X}_1^n,\hat{X}_2^n)$

§10.5.1 无损分布基本原理

定理10.7 端分布离散无记忆信源编码的最优速率区域满足

$$
\begin{aligned}
R_1 &\geq H(X_1 \mid X_2) \\
R_2 &\geq H(X_2 \mid X_1) \\
R_1 + R_2 &\geq H(X_1, X_2)
\end{aligned}
\qquad (10.39)
$$

★ 注：

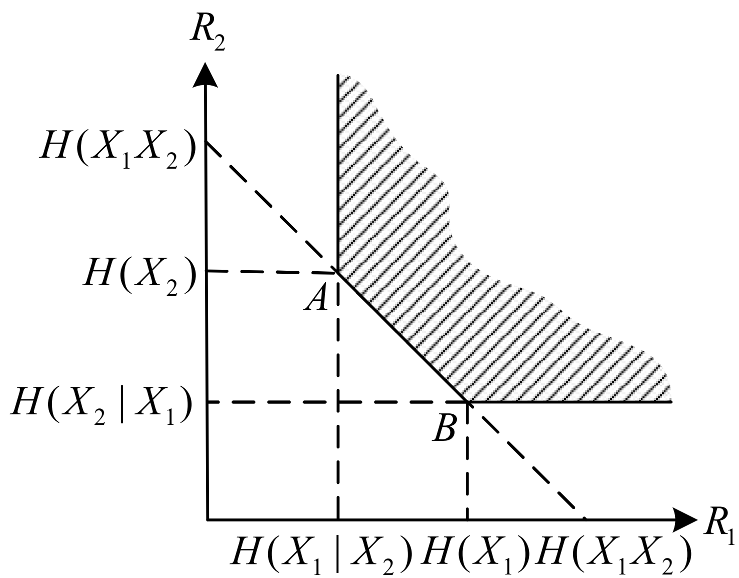
（1）定理的基本思想是采用“随机装箱”（Random Binning）的方式对信源各自编码，译码端基于联合典型序列进行译码。证明所用的方法是非构造性的，只证明了编码的存在性，但未给出如何进行编码的具体方法。

§ 10.5.1 无损分布基本原理

★ 注：

(2) SW定理表明，（11.39）是定理成立的充分条件（可达性），也是必要条件（逆定理）；

(3) 围成的可达速率区域如图所示，有截角的阴影部分表示可达码率区域，其中 $R_1 \geq H(X_1)$ 且 $R_2 \geq H(X_2)$ 的区域为无差错区域，而其他区域为渐近无差错区域，即对于足够长的信源序列，译码差错率趋近于零。



§10.5.1 无损分布基本原理

定理10.8 多端分布离散无记忆信源编码的最优速率区域满足

$$\boxed{\sum_{j\in\mathcal{S}} R_j \geq H(X(\mathcal{S})\,|\,X(\mathcal{S}^c))} \qquad (10.40)$$

其中，$X=(X_1,X_2,\ldots,X_k)$, 共有k个分布信源。S为集合$\{1,2,\ldots,k\}$，S^C为集合S的补集。

§10.5.1 无损分布信源编码

例10.6

X与Y为含8个等概率二元三维矢量离散无记忆信源，如果给定 $\mathbf{y}=(y_1y_2y_3)$，那么X等概率地取自 $\{y_1y_2y_3,\bar{y}_1y_2y_3,y_1\bar{y}_2y_3,y_1y_2\bar{y}_3\}$， 其中，$y_i(i=1,2,3)$ 取值为0或1。$\bar{y}_i$ 为 y_i 的反号，试设计一种分布信源编码系统，使得当Y作为译码器边信息的条件下实现X的最佳无损压缩；如果 $\mathbf{x}=(110)$，$\mathbf{y}=(100)$ ，试写出编译码过程。

§10.5.1 无损分布信源编码

解：

很明显，$H(\mathbf{X})=H(\mathbf{Y})=3$ 比特，$H(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y})=2$ 比特，$H(\mathbf{XY})=H(\mathbf{Y})+H(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y})=5$ 比特。因Y作为译码器边信息，所以传送所需码率为 $R_Y=H(\mathbf{Y})=3$ 比特，而根据Slepian-Wolf定理，用 $H(\mathbf{X}\,|\,\mathbf{Y})=2$ 比特而不是3比特的码率传送X，在译码器无损恢复X是有可能的。现把Y看成X通过一个虚拟信道传输的结果，而此信道最多出现一个错误，那么使用可纠一个错误的信道编码，就可以依据边信息Y完全恢复X。而重复码{000，111}就是能够纠一个错误的编码。

§10.5.1 无损分布信源编码

解：

分布信源编码系统工作原理如下：将8个二元三维矢量分成4个陪集：{000,111}，{001,110}，{010,101}和 {100,011}，对应的索引号分别为：(00)，(01)，(10)，(11)。编码器仅发送X所在的陪集索引号，需2比特。译码器根据接收的陪集号，确定X所在的陪集。在此陪集中，把与边信息y汉明距离最小的矢量作为译码输出。

§10.5.1 无损分布信源编码

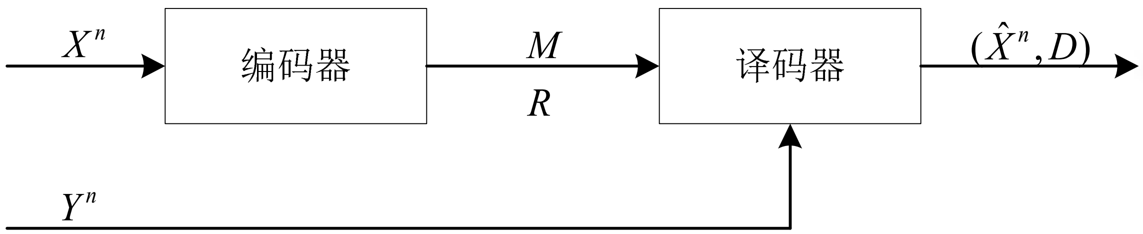
解：

重复码的奇偶校验矩阵为 $H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ；
已知 $\mathbf{x}=(110)$ ，

编码器：计算伴随式 $\mathbf{s}=\mathbf{x}H^T=(0\,1)$ ，发送陪集索引号(01)；

译码器：根据接收到的陪集索引号确定陪集为 $\{001, 110\}$，在此陪集中寻找与 $\mathbf{y}=(100)$ 最近的矢量，得 $\hat{\mathbf{x}}=(110)$ 。

§10.5.2 有损分布信源编码



★具有边信息的有损压缩框图如上，其中失真的定义及R(D)函数的含义与限失真信源编码部分类似，不同之处在于译码器能够获得更多的边信息Y^n。在不存在边信息的条件下，R(D)函数可以表达为：

$$R(D)=\min_{p(\hat{x}|x):E(d(X,\hat{X}))\le D} I(X;\hat{X}) \qquad (10.43)$$

§10.5.2 有损分布信源编码

定理10.10

两端分布式离散无记忆信源(X,Y)，失真测度为 $d(x,\hat{x})$ 。具有非因果边信息Y的信源X的率失真函数为

$$R_{X|Y}(D)=\min\left(I(X;U)-I(Y;U)\right)=\min I(X;U\,|\,Y),\qquad D\ge D_{\min} \tag{10.44}$$

其中，在所有条件概率函数 $p(u\,|\,x),|u|\le|x|+1$ 及函数 $\hat{x}(u,y)$ 上取最小值，并满足 $E[d(X,\hat{X})]\le D$ 。

$D_{\min}=\min\limits_{\hat{x}(y)}E[d(X,\hat{x}(Y))]$ 为具有非因果边信息Y条件下是真的最小值。

§10.5.3 分布信源编码的应用

- 无线传感器网络
- 协作通信
- 分布视频编码
- 超光谱图像分布式压缩

本章小结(1)

1. 二址接入信道的容量区

$$\left\{\begin{aligned} &0 \le R_1 \le C_1 = \max_{p(X_1)p(X_2)} I(X_1;Y|X_2) \\ &0 \le R_2 \le C_2 = \max_{p(X_1)p(X_2)} I(X_2;Y|X_1) \\ &R_1 + R_2 \le C_{12} = \max_{p(X_1)p(X_2)} I(X_1X_2;Y) \end{aligned}\right\}$$

X_1和X_2相互独立时，C_1、C_2和 C_{12} 之间必存在不等式：

$$\max(C_1, C_2) \le C_{12} \le C_1 + C_2$$

2. 二址接入高斯噪声信道容量区

$$\left\{0 \le R_1 \le C_1 = C\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right),\ 0 \le R_2 \le C_2 = C\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma^2}\right),\ R_1 + R_2 \le C_{12} = C\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma^2}\right)\right\}$$

本章小结(2)

3. 退化广播信道($X \to Y_1 \to Y_2$)容量区

$$\{R_2 \le I(U;Y_2), R_1 \le I(X;Y_1|U)\}$$

4. 退化高斯广播信道容量区

$$\left\{R_1 \le C\left(\frac{\alpha P}{\sigma_1^2}\right), R_2 \le C\left(\frac{(1-\alpha)P}{\alpha P+\sigma_2^2}\right)\right\}$$

5. 退化高斯中继信道容量

$$C = \max_{0\le\alpha\le1} \min\left\{C\left(\frac{P+P_1+2\sqrt{\bar{\alpha}PP_1}}{N_1+N_2}\right), C\left(\frac{\alpha P}{N_1}\right)\right\}$$

6. 对于分布信源 (X_1, X_2) 编码，可达速率的区域为

$$\{R_1 \ge H(X_1|X_2), R_2 \ge H(X_2|X_1), R_1+R_2 \ge H(X_1X_2)\}$$

其中，$C(x) = \frac{1}{2}\log(1+x)$

谢谢！