第9章

信息率失真函数

§9 信息率失真函数

9.1概述

9.1.1 系统模型

9.1.2 失真测度

9.1.3 率失真函数和失真率函数

9.2 限失真信源编码定理

9.2.1 码率的压缩

9.2.2 限失真信源编码定理

9.2.3 限失真信源信道编码定理

9.3 离散R(D)函数的性质与计算

9.3.1 离散R(D)函数的性质

9.3.2 离散R(D)函数的计算

§9 信息率失真函数

9.4 连续R(D)函数的性质与计算

9.4.1 连续R(D)函数的性质

9.4.2 连续R(D)函数的计算

9.4.3 差值失真测度下的R(D)函数

9.5 高斯信源的R(D)函数

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

9.6 一般连续信源的R(D)函数

§9 信息率失真函数

9.7 有损数据压缩技术简介

9.7.1 量化

9.7.2 预测编码

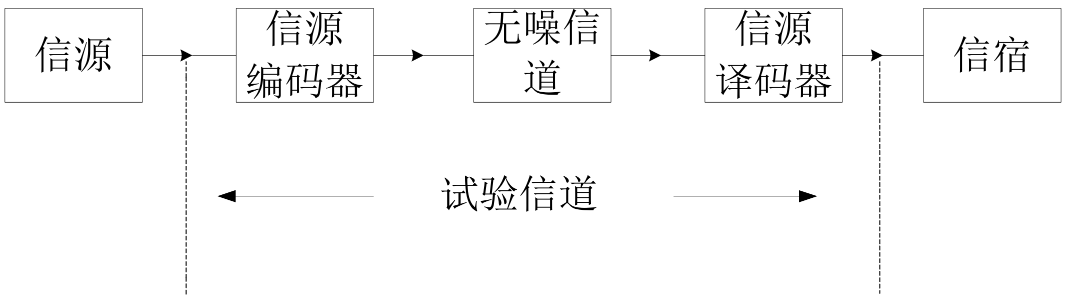
9.7.3 子带编码

9.7.4 变换编码

§9.1 概述

- 香农第三定理指出，信源编码的码率大于R(D)是存在平均失真不大于D的信源编码的充分与必要条件。
- 对有损压缩编码系统，确定失真测度是首要的工作，不同的失真测度会得到不同R(D)函数。

9.1.1 系统模型



限失真编码通信系统模型

- 一个有损压缩系统对信源发出的消息X进行有失真信源编码，经理想无噪声信道传输，到达信源译码器，输出为Y。由于编码有失真，所以Y不是X的精确复现。

9.1.2 失真测度

1．单符号失真测度

试验信道的输入x和输出y之间的失真用 $d(x,y)$表示，其中$x \in X, y \in Y$。

定义失真矩阵

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} d(a_1,b_1) & \dots & d(a_1,b_m) \\ d(a_2,b_1) & \dots & d(a_2,b_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ d(a_n,b_1) & \dots & d(a_n,b_m) \end{pmatrix} \qquad (9.1)$$

其中，$d(a_i,b_j) \ge 0$表示当试验信道的输入为a时，输出为b所产生的失真。

9.1.2 失真测度

如果规定

$$d(a_i,b_j)=\begin{cases}0 & i=j\\ 1 & i\neq j\end{cases} \qquad (9.2)$$

那么失真矩阵变为

$$\mathbf{d}=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & \cdots\\ 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (9.3)$$

单符号平均失真定义为：

$$D=E[d(x,y)]=\sum_{x,y}p(x)p(y\,|\,x)d(x,y) \qquad (9.4)$$

9.1.2 失真测度

2. 序列失真测度

设序列 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_N)$ 其中 x_i 取自符号集A；

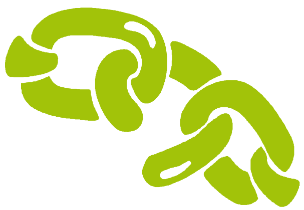
序列 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_N)$ 其中y_i取自符号集B；

序列失真测度定义为：

$$d_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d(x_i,y_i) \qquad (9.6)$$

上式表明序列的失真测度是所包含符号失真的算术平均。

序列平均失真定义为：



$$D_N=E[d_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E[d(x_i,y_i)] \qquad (9.7)$$

9.1.3 率失真函数和失真率函数

定义信息率失真函数(rate-distortion function)

为：

$$R(D)=\min_{p(y|x)\in P_D} I(X;Y) \qquad (9.12)$$

或

$$R(D)=\min_{p(y|x)\in P_D}\sum_{x,y}p(x)p(y\mid x)\log\frac{p(y\mid x)}{\sum_{x}p(x)p(y\mid x)} \qquad (9.13)$$

9.1.3 率失真函数和失真率函数

关于信息率失真函数的几点解释：

（1）在信源给定而不是信道给定条件下的传输，信息率失真理论要解决的问题就是计算满足失真要求的传输所需要的最小信道容量或传输速率，以达到降低信道的复杂度和通信成本的目的。

（2）根据R（D）为单调减函数的性质，固定平均互信息，选择信道的转移概率使平均失真最小，得到R（D）函数曲线，唯一的差别就是变量之间作用交换。这时就得到“失真率函数”。失真率函数定义为

$$D(R)=\min_{p(y/x):I(p(y/x))\le R} d(p(y/x)) \qquad （9.15）$$

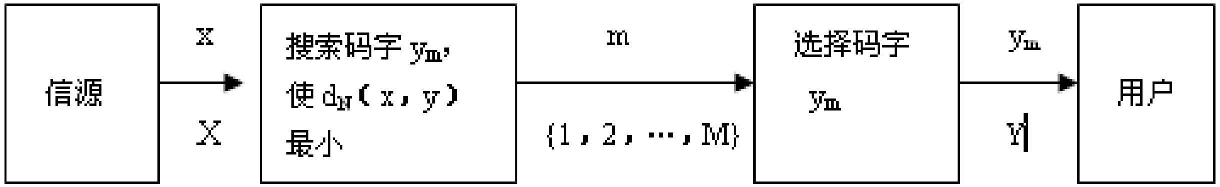
§9.2 限失真信源编码定理

- 限失真信源编码定理指出，当给定一个平均失真D时，对信源码率压缩的最低限度为R（D）。
- 而限失真信源信道编码定理指出，当信道容量C大于R（D）时，信息能够通过信道以不大于D的平均失真传输。

9.2.1 码率的压缩

设信源X发出长度为N的序列，而码字仅有M个，即仅对M个信源序列进行编码。设信源的熵为H，如果$M > 2^{NH}$，那么当N足够长时就存在无失真信源编码。令$R = (\log_2 M)/N$，就有$R > H$。但如果 $R < H$ ，编码就会产生失真。这就是限失真信源编码要解决的问题。由于压缩了码率，可以提高信息传输速率，从而减小了通信的成本。

9.2.1 码率的压缩



限失真信源编码系统

图中，信源发出的N长符号序列u（符号集U）进入编码器，编码器按照最小失真的原则搜索到一个码字，设为vm（其中码字集合为V）；设码字数为M，m为信源序列对应码字的序号；那么将vm的序号m发送到译码器，译码器根据接收的序号恢复原始码字，输出到用户。

9.2.1 码率的压缩

例9.1

设信源X，符号集为{a1,a2,…,a2n}，等概分布pi=1/2n，i=1,…,2n，给定失真测度为：

$$d_{ij}=\begin{cases}1 & i\neq j\\0 & i=j\end{cases}$$

设计一种单符号压缩算法使得平均失真D=1/2并求压缩后的码率R。

9.2.1 码率的压缩

解：

失真测度为汉明测度，实际上要求误码率为1/2。设Y为X的压缩编码，符号集为{b1,b2,…,bn}，下面为压缩算法和对应的试验信道转移概率矩阵：

$$
\begin{aligned}
&X \quad\quad Y\\
&a_i \to b_i (i = 1,\dots,n-1)\\
&\dots\\
&a_j \to b_n (j = n,\dots,2n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \\ \dots \\ a_{2n} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{array}\\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & \dots & 0\\
0 & 1 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & 0 & 1 & 0\\
0 & \dots & \dots & 0 & 1\\
\dots & \dots & \dots & \dots & 1\\
0 & \dots & \dots & \dots & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

9.2.1 码率的压缩

解：

平均失真 $D=\sum_{x,y} p(x)p(y/x)d(x,y)=\frac{1}{2n}\sum_{n+1}^{2n}1=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

算法满足要求。

因为 $b_j(j=1,\cdots,$ ）的概率分布为： $\overbrace{1/2n \quad \ldots \quad 1/2n}^{n-1},(n+1)/2n$

所以

$$H(Y)=\frac{n-1}{2n}\log 2n+\frac{n+1}{2n}\log\frac{2n}{n+1}$$

$$R=H(Y)=\log 2n-\frac{n+1}{2n}\log(n+1)$$

9.2.2 限失真信源编码定理

定理9.1 任意给定 $\varepsilon > 0$，总存在一种信源编码，使当 $R \geq R(D) + \varepsilon$时，平均失真 $\leq D + \varepsilon$；反之，如果$R<R(D)$，就不可能存在使平均失真 $\leq D$的编码。

9.2.3　限失真信源信道编码定理

定理9.2 设离散无记忆信源的信息率失真函数为 $R(D)$(比特/秒)，离散无记忆信道的容量为C（比特/秒），若满足

$$C \geq R(D) \qquad (9.20)$$

则信源序列通过信道传输后的平均失真 $\leq D$；

若 $C < R(D)$ 则信源序列通过信道传输后的平均失真大于D。

9.3.1 离散R(D)函数的性质

1、R(D)的定义域：

$$0 \le D_{\min} \le D \le D_{\max} \qquad (9.22)$$

且

$$D_{\min} = \sum_{x} p(x) \min_{y} d(x, y) \qquad (9.23a)$$

$$D_{\max} = \min_{y} \sum_{x} p(x) d(x, y) \qquad (9.23b)$$

9.3.1 离散R(D)函数的性质

2．R(D)是关于D的下凸函数

设D1,D2为任意两个平均失真，$0<\alpha<1$ 那么

$$R(\alpha D_1+(1-\alpha)D_2)\le \alpha R(D_1)+(1-\alpha)R(D_2) \qquad （9.24）$$

9.3.1　离散R(D)函数的性质

3、R(D)是(Dmin,Dmax)区间的连续和严格递减函数

证：R(D)在定义域内为凸函数，从而保证了连续性。

下面证明在定义域内也是非增函数。$R(D_1) \le R(D_2)$

由 $D_1 > D_2 \Rightarrow P_{D_1} > P_{D_2}$，在较大范围内求极小值一定不大于在所含小范围内求的极小值，所以　　　　　　　　。

由于在定义域内R(D)不是常数，而又是非增下凸函数，从而推出R(D)是严格递减函数

9.3.1 离散R(D)函数的性质

例9.2

设试验信道输入符号$\{a_1, a_2, a_3\}$，概率分别为1/3，1/3，1/3，失真矩阵如下所示，求Dmin和Dmax和相应的试验信道的转移概率矩阵。

$$(d_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9.3.1 离散R(D)函数的性质

解：

$$D_{\min}=\sum_{x}p(x)\min_{y}d(x,y)$$

$$=p(a_1)\min(1,2,3)+p(a_2)\min(2,1,3)+p(a_3)\min(3,2,1)$$

$$=1$$

令对应最小$d(a_i,b_j)$的$p(b_j\mid a_i)=1$，其它为0。

可得对应Dmin 的转移概率矩阵为：

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9.3.1　离散R(D)函数的性质

$$
\begin{aligned}
D_{\max} &= \min_y \sum_x p(x)d(x,y) \\
&= \min\{[p(a_1)\times 1 + p(a_2)\times 2 + p(a_3)\times 3] \\
&\qquad +[p(a_1)\times 2 + p(a_2)\times 1 + p(a_3)\times 2] \\
&\qquad\quad +[p(a_1)\times 3 + p(a_2)\times 3 + p(a_3)\times 1]\} \\
&= 5/3
\end{aligned}
$$

上式中第2项最小，所以令 $p(b_2)=1, p(b_1)=p(b_3)=0$ 。

可得对应Dmax 的转移概率矩阵为：

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

- 设试验信道输入X，符号集A={a1,…,an}，对应概率分布为p1,…,pn；信道输出 Y，符号集B={b1,…,bm}，对应概率分布为q1,…,qm，失真矩阵为

$$\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nm} \end{pmatrix} \qquad (9.25)$$

- 试验信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix} \qquad (9.26)$$

- 信道输出概率分布

$$q_j=\sum_i p_i p_{ij}$$

9.3.2　离散R(D)函数的计算

- 对于给定信源X，符号概率分布为p1,…,pn的已知，给定失真矩阵，求解R(D)，实际上是通过求约束极值，确定实验信道转移概率$p$ij。

$$\begin{cases} R(D) = \min\limits_{p_{ij}} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p_i p_{ij} \log \dfrac{p_{ij}}{q_j} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} \le D \\ \sum\limits_{j} p_{ij} = 1, i = 1, \cdots, n \end{cases} \qquad (9.27)$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

- 由于使R最小的p_{ij}总是在PD的边界上，所以在求极值时，平均失真约束条件的不等式取等号，即

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i p_{ij} d_{ij} = D \qquad (9.28)$$

- 由于约束条件有n+1个，其中1个为平均失真约束，n个条件概率归一化约束，未知数p_{ij}有mn个。下面用拉格朗日乘子法求有约束极值。

9.3.2　离散R(D)函数的计算

- 设s, μ_i (i=1,…,n)为常数，求下式极值（以e为底）：

$$J(p_{ij}) = \sum_i \sum_j p_i p_{ij} \log p_{ij} - \sum_j q_j \log q_j - s \sum_i \sum_j p_i p_{ij} d_{ij} - \sum_i \mu_i \sum_j p_{ij}$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}} = p_i (\log p_{ij} + 1) - p_i \log q_j - \frac{p_i}{q_j} q_j - s p_i d_{ij} - \mu_i = 0 \qquad q_j = \sum_i p_i p_{ij}$$

$$p_i \log \frac{p_{ij}}{q_j} - s p_i d_{ij} - \mu_i = 0$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

令 $\lambda_i' = \mu_i / p_i$ ，

得 $\log \dfrac{p_{ij}}{q_j} - sd_{ij} - \lambda_i' = 0$

其中 $p_{ij} = q_j e^{sd_{ij}+\lambda_i'} = q_j \lambda_i e^{sd_{ij}}$ （9.29）

$$\lambda_i = e^{\lambda_i'} = e^{-\mu/p_i}$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

所以 $$\sum_j p_{ij} = \lambda_i \sum_j q_j e^{sd_{ij}}$$

$$\lambda_i^{-1} = \sum_j q_j e^{sd_{ij}} \qquad (9.30)$$

当 $q_j \neq 0$ 时 $$\sum_i p_i p_{ij} = q_j \sum_i p_i \lambda_i e^{sd_{ij}}$$

$$\sum_i p_i \lambda_i e^{sd_{ij}} = 1 \qquad (9.31)$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

- 结合以上两式得

$$\sum_i p_i \frac{e^{sd_{ij}}}{\sum_j q_j e^{sd_{ij}}} = 1 \quad ，j=1,\ldots,m \qquad （9.32）$$

- 上式含m个方程，m个未知数qj(j=1,…,m)，而s为参量，一般能解。

9.3.2 离散R(D)函数的计算

- 带入分别得

$$D(s)=\sum_i\sum_j p_i p_{ij} d_{ij}=\sum_i\sum_j p_i \lambda_i q_j d_{ij} e^{sd_{ij}} \qquad (9.33)$$

$$R(s)=\sum_i\sum_j p_i p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{q_j}=\sum_{i,j} p_i p_{ij}\log(\lambda_i e^{sd_{ij}})$$

$$=\sum_{i,j} p_i p_{ij} s d_{ij}+\sum_{i,j} p_i p_{ij}\log\lambda_i$$

$$=sD+\sum_i p_i\log\lambda_i \qquad (9.34)$$

9.3.2 参量s的意义

- 现求R(D)对D的导数

$$\frac{dR}{dD}=\frac{\partial R}{\partial D}+\frac{\partial R}{\partial s}\frac{ds}{dD}+\sum_i\frac{\partial R}{\partial\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dD}$$

$$=s+D\frac{ds}{dD}+\sum_i\frac{p_i}{\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dD}$$

$$=s+(D+\sum_i\frac{p_i}{\lambda_i}\frac{d\lambda_i}{ds})\frac{ds}{dD} \qquad (9.36)$$

9.3.2 参量s的意义

- 在式 $\sum_i p_i \lambda_i e^{sd_{ij}} = 1$ 的两边，对s求导，得

$$\sum_i \left(\frac{d\lambda_i}{ds} p_i e^{sd_{ij}} + p_i \lambda_i e^{sd_{ij}} d_{ij}\right) = 0$$

- 两边都乘以$\sum_j q_j$，得

$$\sum_j q_j \sum_i \frac{d\lambda_i}{ds} p_i e^{sd_{ij}} + D = 0$$

- 根据 $\lambda_i^{-1} = \sum_j q_j e^{sd_{ij}}$，得

$$\sum_i \frac{p_i}{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{ds} + D = 0 \qquad (9.37)$$

- 代入 $\frac{dR}{dD} = s + (D + \sum_i \frac{p_i}{\lambda_i} \frac{d\lambda_i}{ds}) \frac{ds}{dD}$ ，得 $\frac{dR}{dD} = s$ （9.38）

9.3.2 参量s的意义

- 由此可得如下结论：

(1)s是R(D)函数的斜率；

(2)因为R(D)在$0<D<D_{max}$严格单调递减，所以$s<0$。

9.3.2 R(D)求解过程

- 现将R(D)求解的过程归纳如下：

（1）确定函数定义域；

$$D_{\min} = \sum_{x} p(x) \min_{y} d(x, y)$$

$$D_{\max} = \min_{y} \sum_{x} p(x) d(x, y)$$

9.3.2 R(D)求解过程

- 现将R(D)求解的过程归纳如下：

（2）求 λ_i ；

$$\sum_i p_i \lambda_i e^{s d_{ij}} = 1 \quad j \in V \tag{9.39}$$

$$\sum_i p_i \lambda_i e^{s d_{ij}} \le 1 \quad j \in B \tag{9.40}$$

9.3.2 R(D)求解过程

- 现将R(D)求解的过程归纳如下：

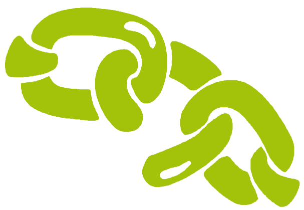
（3）求 q_j ，D(s)， R(D)；

$$\lambda_i^{-1} = \sum_j q_j e^{sd_{ij}}$$

$$D(s) = \sum_i \sum_j p_i \lambda_i q_j d_{ij} e^{sd_{ij}}$$

$$R(s) = sD + \sum_i p_i \log \lambda_i$$

（4）若定义域内其它区间的 R(D)未计算，则返回（2），否则结束；



9.3.2 R(D)求解过程

设 $A=(a_{ij})=(e^{sd_{ij}})$ $u_i=\lambda_i p_i$ $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)^T$

$\mathbf{1}=\underbrace{(1\dots1)^T}_{m}$ 为列矢量，

由 $\sum\limits_i p_i\lambda_i e^{sd_{ij}}=1$

得
$$\begin{cases} u_1a_{11}+u_2a_{21}+\dots+u_na_{n1}=1 \\ \dots \\ u_1a_{1m}+u_2a_{2m}+\dots+u_na_{nm}=1 \end{cases}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{A^T u = 1} \qquad (9.41)$$

9.3.2 R(D)求解过程

由 $\lambda_i^{-1} = \sum_j q_j e^{sd_{ij}}$

得 $\begin{cases} q_1 e^{sd_{11}} + q_2 e^{sd_{12}} + \ldots + q_m e^{sd_{1m}} = 1/\lambda_1 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ q_1 e^{sd_{n1}} + q_2 e^{sd_{n2}} + \ldots + q_m e^{sd_{nm}} = 1/\lambda_n \end{cases}$

写成矩阵形式为 $\boldsymbol{Aq} = \boldsymbol{v}$ （9.42）

其中， $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)^T$， $\mathbf{v} = [1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_n]^T$

9.3.2 R(D)求解过程

当m=n且$\boldsymbol{A}^{-1}$存在时，求解过程为：

①由 $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}=\boldsymbol{1}$ 解得 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{1}$

② $v_i = p_i / u_i$

③由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{v}$ 解得 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{v}$

④ 设矩阵为 $\mathbf{B}=(e^{sd_{ij}}d_{ij})$ ，有 $D=\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}$ （9.43）

$$\begin{aligned} R(D) &= sD+\sum_i p_i\log\lambda_i = sD+\sum_i p_i\log\frac{u_i}{p_i} \\ &= H(p)+sD+\sum_i p_i\log u_i \end{aligned} \quad (9.44)$$

其中，$H(p)$为信源的熵。

9.3.2　离散R(D)函数的计算

例9.3

- 一个二元信源，符号集A={0,1}，概率为p(0)=p1=p，p(1)=p2=1-p，其中p≤1/2；试验信道输出符号集B={0,1}，失真测度函数为汉明失真，求R(D)函数。

9.3.2 离散R(D)函数的计算

解：

（1）设 $A=(a_{ij})=(e^{sd_{ij}})$，所以

$$A=\begin{pmatrix} 1 & e^s \\ e^s & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-T}=A^{-1}=\frac{1}{1-e^{2s}}\begin{pmatrix} 1 & -e^s \\ -e^s & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{1-e^{2s}}\begin{pmatrix} 1 & -e^s \\ -e^s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/(1+e^s) \\ 1/(1+e^s) \end{pmatrix}$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

解：

（2）由$v_i=\dfrac{p_i}{u_i}$得 $v_1=(1+e^s)p$

$$v_2=(1+e^s)(1-p)$$

（3） 解得 $$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}=\frac{1}{1-e^{2s}}\begin{pmatrix} 1 & -e^s \\ -e^s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/(1+e^s) \\ 1/(1+e^s) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-e^s}\begin{pmatrix} p-e^s(1-p) \\ -pe^s+(1-p) \end{pmatrix}$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

解：

（4） $$D=\frac{1}{1+e^{s}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & e^{s}\\ e^{s} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{1-e^{s}}\begin{pmatrix}p-e^{s}(1-p)\\ -pe^{s}+(1-p)\end{pmatrix}=\frac{e^{s}}{1+e^{s}} \qquad (9.45)$$

$$R(D)=H(p)+sD+p\log\frac{1}{1+e^{s}}+(1-p)\log\frac{1}{1+e^{s}}$$

$$=H(p)+sD+\log\frac{1}{1+e^{s}} \qquad (9.46)$$

9.3.2 离散R(D)函数的计算

解：

由 $D=\dfrac{e^{s}}{1+e^{s}}$ 得 $s=\log[D/(1-D)]$

$$R(D)=H(p)+D\log\frac{D}{1-D}+\log(1-D)=H(p)-H(D)$$

图9.3 为二元信源在不同概率p条件下的R(D)函数曲线。可以看出，对于给定的失真测度D，信源分布越接近等概率，R（D）越大，也就是说越难压缩，反之，信源分布越不均匀，R（D）越小，越容易压缩。

9.3.2 离散R(D)函数的计算

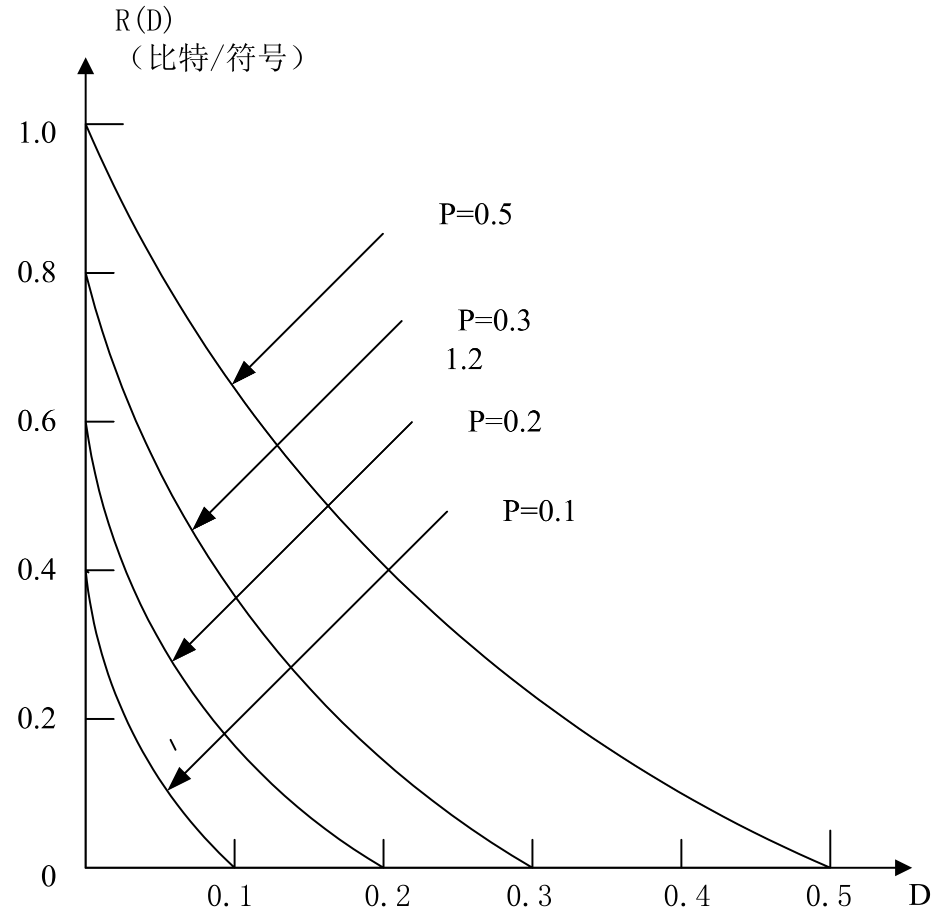


图9.3 二元信源的R(D)函数曲线

9.4.1 连续R(D)函数的性质

- 与离散信源类似，可以证明R(D)函数有以下性质：

（1）非负性；

（2） $0 < D < D_{max}$ 在区间是单调递减函数；

（3） $0 < D < D_{max}$ 在区间是下凸函数；

其中，D_{max} 对应着X，Y独立时的最小平均失真，所以

$$D_{max} = \inf_{y} \int p(x) d(x, y) dx \qquad (9.48)$$

9.4.1　连续R(D)函数的性质

- 与离散情况不同的是，在D=0时，R(D)并不连续。在D→0时，R(D) →∞，趋近信源的绝对熵。对离散情况，H(X)是R(0)的上界；对连续情况，h(X)不是R(0)的上界，因为h(X)还可能为负。

9.4.2 连续R(D)函数的计算

- 在连续信源情况下用条件概率密度来描述试验信道，在满足约束条件下，求R(D)函数的极小值确定试验信道的条件概率密度，归结为求有约束泛函极值的问题。即求

$$I(X;Y)=\iint p(x)p(y|x)\log\frac{p(y|x)}{q(y)}dxdy \qquad (9.51)$$

$$q(y)=\int p(x,y)dx$$

的极小值，满足约束为

$$D[p(y|x)]=\iint p(x)p(y|x)d(x,y)dxdy \qquad (9.58)$$

$$\int p(y|x)dy = 1 \qquad (9.53)$$

9.4.2 连续R(D)函数的计算

求泛函极值，等价于使下式的一阶变分为0。

$$J[p(y|x)] = \iint p(x)p(y|x)\log\frac{p(y|x)}{q(y)}dxdy$$
$$-\iint \mu(x)p(y|x)dxdy - s\iint p(x)p(y|x)d(x,y)dxdy$$

令 $\mu(x) = p(x)\log r(x)$ ，有

$$J[p(y|x)] = \iint p(x)p(y|x)[\log\frac{p(y|x)}{r(x)q(y)} - sd(x,y)]dxdy$$

9.4.2 连续R(D)函数的计算

推导得 $$p(y|x)=\lambda(x)q(y)e^{sd(x,y)} \qquad (9.55)$$

其中， $\lambda(x)=r(x)e^{f(x)}$

与离散情况相似，可得

$$\lambda(x)=[\int q(y)e^{sd(x,y)}dy]^{-1} \qquad (9.56)$$

9.4.2 连续R(D)函数的计算

- 当时$q(y)>0$，有 $\int \lambda(x)p(x)e^{sd(x,y)}dx = 1$ （9.57）

平均失真为

$$D=\iint p(x)p(y|x)d(x,y)dxdy$$

$$=\iint p(x)\lambda(x)q(y)d(x,y)e^{sd(x,y)}dxdy \qquad (9.58)$$

$$R(D)=\iint p(x)p(y|x)\log[\lambda(x)e^{sd(x,y)}]$$

$$=sD+\iint p(x)p(y/x)\log\lambda(x)dxdy$$

$$=sD+\int p(x)\log\lambda(x)dx \qquad (9.59)$$

可以证明，s是R(D)函数的斜率。

9.4.3　差值失真测度下的R(D)函数

- 平方误差测度

$$d(x,y)=(x-y)^2$$

- 和绝对值误差测度

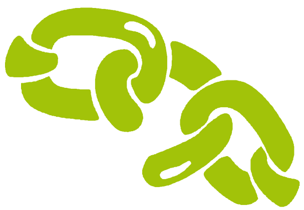
$$d(x,y)=|x-y|$$

- 在差值失真测度下，下式

$$\int \lambda(x)p(x)e^{sd(x,y)}dx=1$$

变为

$$\boxed{\int \lambda(x)p(x)e^{sd(x-y)}dx=1} \qquad (9.61)$$



9.4.3 差值失真测度下的R(D)函数

- 上式表示$\lambda(x)p(x)$与 $e^{sd(x)}$的卷积为1，所以 $\lambda(x)p(x)$的频谱与$e^{sd(x)}$的频谱乘积为冲激。而 $e^{sd(x)}$在整个频率域，所以$\lambda(x)p(x)$的频谱为冲激，因此， $\lambda(x)p(x)=k(s)$（常数）

$$k(s)=(\int e^{sd(z)}dz)^{-1} \tag{9.63}$$

其成立的条件是 $\int e^{sd(z)}dz<\infty$ 。

其中
$$\lambda(x)^{-1}=\int q(y)e^{sd(x-y)}dy \tag{9.64}$$

所以
$$p(x)=k(s)\int q(y)e^{sd(x-y)}dy=\int q(y)\frac{e^{sd(x-y)}}{\int e^{sd(z)}dz}dy \tag{9.65}$$

9.4.3 差值失真测度下的R(D)函数

- 可见，p(x)为q(x)与 $g_S(x)$的卷积，

$$p(x) = q(x) * g_S(x) \qquad (9.66)$$

- 其中 $$g_S(x) = \frac{e^{sd(x)}}{\int e^{sd(z)} dz} = k(s) e^{sd(x)} \qquad (9.67)$$

- 设$g_S(x)$表示随机变量e_s的概率密度，那么x=e_s+y，或e_s = x-y，所以$g_S(x)$表示误差的概率密度。
- 根据概率论的知识可知，e_s与y相互独立。此时的平均失真约束为

$$\int d(x) g_s(x) dx \le D \qquad (9.68)$$

9.4.3　差值失真测度下的R(D)函数

- 根据以上式子

$$R(s) = sD + \int p(x)\log\lambda(x)dx = sD + h(X) + \log k(s)$$

$$= h(X) + \int g_s(x)\log[k(s)e^{sd(x)}]dx = h(X) + \int g_s(x)\log g_s(x)dx$$

$$= h(X) - h(g_s) \qquad (9.69)$$

- 其中，$h(g_s)$表示分布密度$g_s(x)$的差熵，且

$$h(g_s) = -\int g_s(x)\log g_s(x)dx$$

- 类似于离散情况的论证，有

$$R(D) \geq h(X) - h(g_s) = R_{SLB}(D) \qquad (9.70)$$

§9.5　高斯信源的R(D)函数

- 本节就高斯信源和平方误差测度 $d(x,y)=(x-y)^2$ 的情况下研究R(D)函数。仅研究离散时间无记忆高斯信源和独立并联信源两种情况。

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

- 设 $p(x)\leftrightarrow P(\omega)$，$q(x)\leftrightarrow Q(\omega)$ ，$g_S(x)\leftrightarrow G_S(\omega)$，
- 其中 $P(\omega)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$，$G_S(\omega)=e^{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2s})\omega^2}$
- 由 $P(\omega)=Q(\omega)\cdot G_S(\omega)$
- 有 $Q(\omega)=\dfrac{P(\omega)}{G_S(\omega)}=e^{-\frac{1}{2}[\sigma^2+\frac{1}{2s}]\omega^2}$　　（9.74）
- 上式表明达到R(D)时，试验信道的输出也是高斯分布，方差等于 σ^2-D，并且与误差独立。

9.5.1　无记忆高斯信源的R(D)函数

- 由于 $q(y)$ 为高斯分布密度函数，所以

$$
\begin{aligned}
R(D) &= R_{SLB}(D) = h(X) - h(g_s) \\
&= (1/2)\log(2\pi e\sigma^2) - (1/2)\log(2\pi eD) \\
&= (1/2)\log(\sigma^2 / D)
\end{aligned}
$$

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

对以上结果，我们归纳为下面的定理：

定理9.7 一个无记忆任意均值、方差为 σ^2 的高斯信源，在平方误差准则下的信息率失真函数为：

$$R(D)=\frac{1}{2}\max(0,\log\frac{\sigma^2}{D})=\begin{cases}\frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D} & 0<D\le\sigma^2\\ 0 & D>\sigma^2\end{cases} \qquad (9.76)$$

其中，$0<D\le D_{\max}$ 且 $D_{\max}=\inf\int p(x)(x-y)^2\,dx=\sigma^2$

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

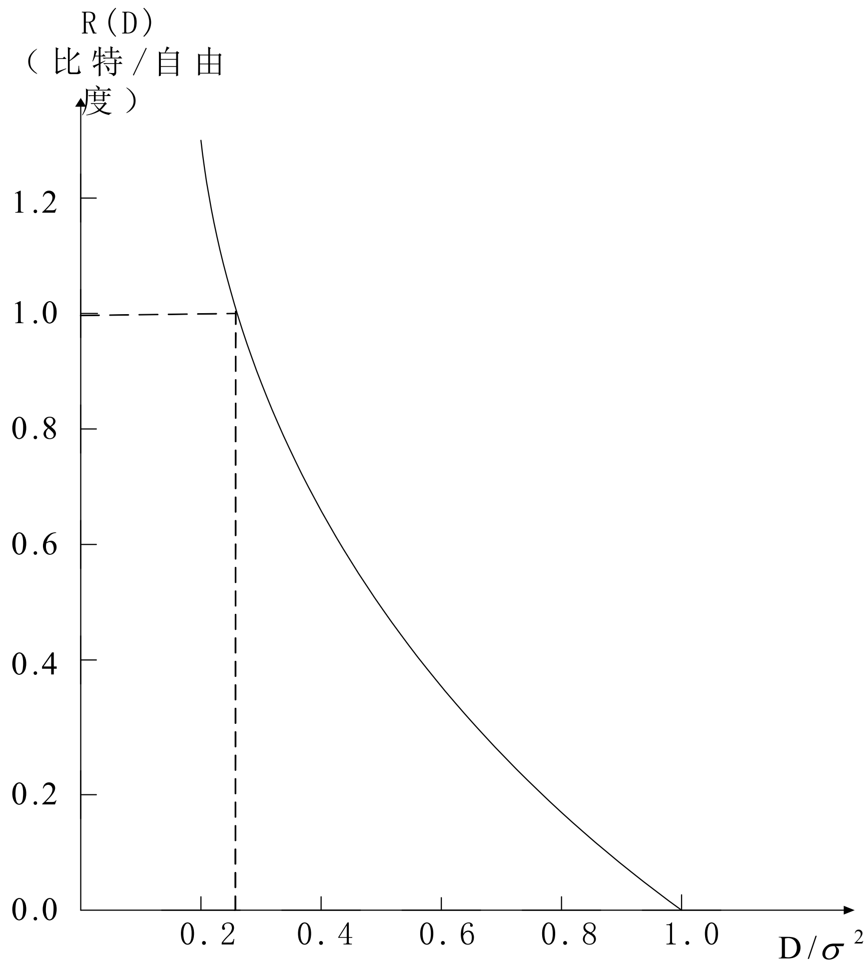


图9.4 高斯信源的R（D）函数

9.5.1　无记忆高斯信源的R(D)函数

下面为高斯信源R（D）函数的注释：

- （1）此R(D)函数是在均方准则下推出的，
  不适用其他准则；
- （2） R(D)函数是高斯信源实现平均失真小于等于D的
  有损编码可达到的最低速率。简单说明如下：

- 设一个有失真编码包含 $M=2^{nR}$ 个码字，每个信源序列的长度为n。所有信源序列都位于半径为 $\sqrt{n\sigma^2}$ 的大球内，且都应该位于以某个码字为中心，半径为 $\sqrt{nD}$ 的小球内。

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

- 因此为充满大球所需最少的小球数目
  也就是最少的码字数为

$$2^{nR} \geq \left(\frac{\sigma^2}{D}\right)^{n/2} = 2^{nR(D)} \qquad （9.77）$$

因此，只要 $R \geq R(D)$ ，就能使平均失真小于等于D。

- （3） σ^2 / D 称为有损压缩的信噪比；当信源功率给定，平均失真越大，信噪比越小，所需码率也越小。

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

- （4）当D=0时，R(D)= ∞；当D= σ^2时， R(D)=0。这说明，对于连续信源，当平均失真为0时，所需要的信息率为无限大。

- （5）高斯信源失真率函数

$$D(R)=\sigma^2 2^{-2R} \tag{9.78}$$

- 上式中，R为编码器的码率，单位为比特/符号。D(R) 表示当高斯信源有损压缩的码率为R时，可以达到的最小平均失真。所以对于任意码率为R的高斯信源有损编码器，其平均失真D，满足

$$D \geq \sigma^2 2^{-2R} \tag{9.79}$$

9.5.1　无记忆高斯信源的R(D)函数

例9.4

- 一个均值为零的离散时间高斯信源作为限失真信源编码器的输入，该编码器是一个量化器，输出256个量化电平，输出信噪比SNR用输入信号的均方值与均方误差的比来量度；

（1）求编码器的码率；

（2）SNR能否达到49dB？

9.5.1 无记忆高斯信源的R(D)函数

解：

- （1）编码器的码率： $R=\log_2 256=8$ 比特/信源符号；

- （2）SNR不能达到49dB。解释如下：

根据 $D\geq\sigma^2 2^{-2R}$

$$[SNR]_{dB}=10\lg\frac{\sigma^2}{D}\leq 10\lg 2^{2R}=10\lg 2^{2\times 8}=48.16dB<49dB$$

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 一个多维离散时间高斯信源 $\mathbf{X}^N = X_1 X_2 \cdots X_N$ ，其中，X1、X2、…XN是N个独立零均值、方差为σ_i^2 的高斯随机变量，称这种信源为独立并联高斯信源，其中各Xi为子信源。

- 设每个的失真测度为均方失真，即$d_i = (x_i - y_i)^2$ ，i=1，…，N；独立并联高斯信源X^N 的失真测度为

$$d_N(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (1/N)\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2 \qquad (9.80)$$

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 设信源X^N的信息率失真函数为$R(D)$，各并联信源的信息率失真函数为$R_i(D_i)$，i=1，…N；那么

$$D_N = E[d_N(\mathbf{x},\mathbf{y})] = (1/N)\sum_{i=1}^{N} E(x_i - y_i)^2$$

$$= (1/N)\sum_{i=1}^{N} D_i \qquad (9.81)$$

$$R(D) = (1/N)\min_{p(\mathbf{y}/\mathbf{x})\in P_D} I(\mathbf{X}^N;\mathbf{Y}^N) \qquad (9.82)$$

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 因为X1、X2、…X_N 是独立的，所以，

$$I(\mathbf{X}^N;\mathbf{Y}^N)\ge\sum_i I(X_i;Y_i)$$

- 仅当 $(X_i;Y_i)$ 各信道独立时等式成立，

即 $p(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})=\prod_i p(y_i\,|\,x_i)$ 时等式成立，所以

$$R(D)=(1/N)\sum_i \min_{p(y_i/x_i)\in P_{D_i}} I(X_i;Y_i)=(1/N)R_i(D_i) \qquad （9.83）$$

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 这样，相当于求约束极小值，与求并联高斯信道容量类似，采用拉格朗日乘子法。由于各 X_i 的方差为 σ_i^2，平均失真为D_i，所以令

$$\frac{\partial J(D)}{\partial D_i} = \frac{\partial}{\partial D_i}[1/(2N)\sum_i \log(\sigma_i^2 / D_i) - \lambda \sum_i D_i] = 0$$

- 得$D_i = B$（常数），但由于对各子信源，最大的失真就是方差，所以当 $B > \sigma_i^2$ 时，$D_i = \sigma_i^2$ ；

9.5.2　独立并联高斯信源的R(D)函数

- 综合起来，就有

$$D_i = \begin{cases} B, & \sigma_i^2 \geq B \\ \sigma_i^2, & \sigma_i^2 < B \end{cases} \qquad (9.84)$$

这是因为，对于每个 $R_i(D_i)$，D_i 的最大值就是 σ_i^2。

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 图9.5为平均失真分配示意图，称为倒注水原理。假定水池中的总水量表示总平均失真，并联信源各子信源的方差表示倒置在水池中的容器底部的高度，达到R（D）时，底部高的未注满水，且各个未注满水部分的水面高度是相同的，B就是水面高度，也就是分配的平均失真；底部低的部分已注满水，水面高度与底部高度同，分配的平均失真就是方差。

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 从所需码率的角度看，方差小于B的X_i的$R_i(D_i)$为0，即所需的码率为零，发送端仅对方差不小于B的X_i进行编码并传送，就能达到平均失真的要求。根据倒注水原理，有

$$\sum_{i:\sigma_i^2<B} \sigma_i^2 + \sum_{i:\sigma_i^2\geq B} B = ND \qquad (9.85)$$

B可通过下式来确定

$$B = (ND - \sum_{i,\sigma_i^2<B} \sigma_i^2)/K \qquad (9.86)$$

其中，K为满足$\sigma_i^2 \geq B$的子信源的个数，满足此条件的称为被使用的子信源。

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

- 所求R(D)函数为

$$R(D)=[1/(2N)]\sum_{i=1}^{N}\log(\sigma_i^2/D_i)$$

$$=[1/(2N)]\sum_{i,\sigma_i^2\geq B}\log(\sigma_i^2/B) \qquad （9.87）$$

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

注：

（1）如果对总失真有要求，那么重点处理功率大的信号；

（2）如果总失真允许较大，功率小的信号可以不予处理；

（3）只有满足 $\sigma_i^2 \geq B$ 的子信源对R(D)有贡献。

将每个子信源的方差按大小顺序排序，得

$$\sigma_{i1}^2 \leq \sigma_{i2}^2 \leq \cdots \leq \sigma_{iN}^2 \qquad （9.88）$$

在平均失真从0逐渐增大的过程中，从对所有子信源的全部使用开始，按上式表示的方差大小顺序，逐个从被使用的子信源集合中排除，直至所有子信源都不被使用，此时对应最大的平均失真，为所有子信源方差的和，对应的R(D) =0。

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

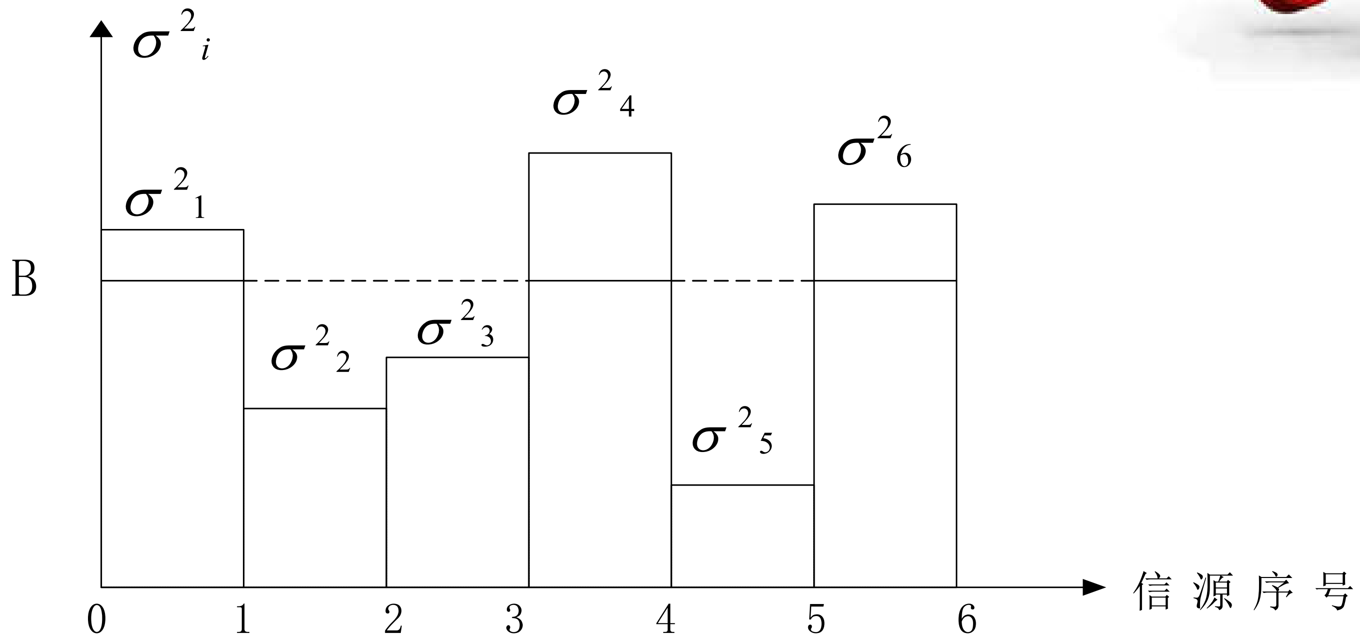


图9.5 平均失真分配的倒注水原理。

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

例9.5

一个二维独立高斯信源（X1X2），其中X1、X2均值都为零，方差分别为2和4，采用均方失真测度，求该信源的R(D)函数。

9.5.2　独立并联高斯信源的R(D)函数

解：

如果 X1、X2都使用，根据

$$\sum_{i:\sigma_i^2<B}\sigma_i^2+\sum_{i:\sigma_i^2\ge B}B=ND \text{ 和 } B=(ND-\sum_{i,\sigma_i^2<B}\sigma_i^2)/K$$

有 $B=2D/2$ 和 $B\le 2$，所以 $D\le 2$

$$R(D)=\frac{1}{4}\log\frac{2}{D}+\frac{1}{4}\log\frac{4}{D}=\frac{1}{2}\log\frac{2\sqrt{2}}{D}$$

9.5.2 独立并联高斯信源的R(D)函数

解：

如果仅使用X_2，有$B=2D-2$ 和$2 < B \le 4$，

得$2 < D \le 3$

$$R(D) = \frac{1}{4}\log\frac{4}{2D-2} = \frac{1}{2}\log\sqrt{\frac{2}{D-1}}$$

由 $2D_{\max} = 2+4=6$ 和 $D_{\max}=3$

所求 R(D)函数为

$$R(D) = \begin{cases} (1/2)\log(2\sqrt{2}/D) & 0 < D \le 2 \\ (1/2)\log\sqrt{2/(D-1)} & 2 < D \le 3 \\ 0 & D > 3 \end{cases}$$

§9.6　一般连续信源的R(D)函数

定理9.8　一均值为0,方差为σ_x^2的连续信源X，熵为h(X)，定义失真函数为　$d(x,y)=(x-y)^2$　，则

$$h(X)-\frac{1}{2}\log(2\pi eD)\le R(D)\le\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_x^2}{D} \tag{9.89}$$

仅当X为高斯信源时，等式成立。

§9.6　一般连续信源的R(D)函数

- 不等式的左边是均方失真准则下的香农低界（Shannon lower bound）。定理的结果表明，在均方失真准则下，相同方差的信源要达到同样的均方失真，高斯信源有最大的值。从数据压缩的角度看，高斯信源是最难压缩的信源。

§9.7　有损数据压缩技术简介

信息率失真理论是有损数据压缩的理论基础，但在相当长的时间内将这种理论应用于有损数据压缩实践的成效不大。原因是：

- 这种理论需要研究信源的统计模型；
- 对不同的信源，有效的失真测度难于确定；
- 有效编码的复杂度较大。

9.7.1 量化

- 1．标量量化

对于一维连续信源输出的量化称为标量量化。最佳标量量化就是使量化后的平均失真最小。量化后的信息率为$R=\log n$，也就是表示量化后每个样值所需的比特数。

在语音编码中，先对信号进行非线性压缩，再进行均匀量化。

标量量化主要分为：均匀标量量化和非均匀标量量化。

9.7.1 量化

- 2．矢量量化

　　矢量量化的基本原理就是将若干个标量数据构成一个矢量，然后在矢量空间中量化。

矢量量化主要分为：均匀矢量量化和非均匀矢量量化。

9.7.2　预测编码

- 预测编码是基于时域波形信源压缩的技术。
- 预测编码的基本思想是：量化器输入为信号样值和预测值的差，与原信号相比动态范围减小，从而使码率减小；且差值基本上不相关甚至独立。
- 对于联合高斯分布的随机变量，由条件期望所得的最佳预测函数就是线性函数，而对于其他分布，线性预测不是最佳预测。线性预测方法比求条件期望简单得多，所以常将线性预测用于所有的随机过程。

9.7.2 预测编码

- 线性预测在语音编码得到广泛应用。
- 在语音波形编码中，有Δ调制、DPCM调制和 APC编码（自适应预测编码）。
- 在参量编码中，有线性预测（LPC）声码器（ 利用线性预测技术对话音进行分析合成的系统）。
- 由于预测模型所采用的激励源不同，可分为三类不同的LPC声码器：经典LPC声码器、混合激励LPC声码器和残差激励线性预测（RELP）声码器。

9.7.2　预测编码

- 语音混合编码技术特点是

（1）编码器既利用声码器的特点（利用语音产生模型提取语音参数）又利用波形编码的特点（优化激励信号使其达到与输入语音波形的匹配）；

（2）利用感知加权最小均方误差准则使编码器成为一个闭环优化系统；

（3）在较低码率上获得较高的语音质量。

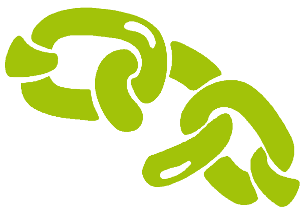
9.7.2 预测编码

•语音混合编码器包括：多脉冲激励线性预测编码，正规脉冲激励编码和码激励线性预测编码。

CELP语音编码器是最具有吸引力的语音压缩编码方式之一，它的特点是：

（1）使用矢量量化的码书对激励序列进行编码；

（2）采用包含感知加权滤波器和最小均方误差准则的闭环系统选择码矢量。



9.7.3 子带编码

- 子带编码的技术要点如下：

（1）信源通过一个带通滤波器组，滤波器的输出搬移到低通并进行抽取；

（2）每路时域信号用PCM或其他时域压缩技术编码；

（3）在接收机，每路信号被译码后，频谱搬移、内插；

（4）然后所有分量相加得到总的重建信号；

（5）采用正交镜象滤波器，以保证信号恢复时不失真。

9.7.3 变换编码

- 变换的目的就是使经变换后的信号能更有效地编码。
- 变换编码器对M长的输入信源的样值进行M点的离散变换，是一种可逆变换。
- 应该注意：变换本身并不压缩信源，仅当变换后才开始编码，即对变换系数进行量化然后进行熵编码。

9.7.3 变换编码

- 主要变换算法有：

（1）K-L变换：是最佳的变换，使变换后的系数不相关，但是需要关于信源统计特性的知识，而且需要复杂的计算；

（2）离散余弦变换（DCT）：具有好的能量紧凑性，并存在快速算法；

（3）小波变换：具有很好的能量集中性和可变的时间标度。

9.7.3 变换编码

- 变换编码首先应用于图象压缩然后用于语音和声音压缩。
- 大部分语音编码器使用离散余弦变换（DCT）。在16kbps基于变换的编码器容易达到高质量的语音，而且用感知编码和分析加综合的方法，降到4.8kbps仍能产生好的话音质量。
- 在图象编码中，DCT是最广泛使用的。

9.7.3　变换编码

- 小波变换开始用于语音编码，而且在速率、质量和复杂度上都可与预测编码竞争，当前正变成很多信源编码和静止图象和视频编码标准的选择。在演进的标准，例如JPEG-2000和MPEG4中，小波变换已经取代或补充到DCT中。

本 章 小 结

- 1、R（D）函数定义：

$$R(D)=\min_{p(y/x)\in P_D} I(X;Y)$$

- 2、R（D）函数的性质：

（1） 定义域： $0\le D_{\min}\le D\le D_{\max}$

$$D_{\min}=\sum_x p(x)\min_y d(x,y)$$

$$D_{\max}=\min_y \sum_x p(x)d(x,y)$$

（2）下凸性：R（D）是D的下凸函数

（3）连续严格递减函数：在（Dmin，Dmax）区间是D的严格递减函数

本 章 小 结

- 3、重要的R（D）函数

（1）对称二元信源（汉明失真）

$$R(D)=\begin{cases} H(p)-H(D) & 0\le D\le p \\ 0 & D>p \end{cases}$$

（2）高斯信源（均方失真）

单符号信源

$$R(D)=\begin{cases} \frac{1}{2}\log\frac{\sigma^2}{D} & 0<D\le\sigma^2 \\ 0 & D>\sigma^2 \end{cases}$$

本 章 小 结

- 独立并联信源

$$R(D)=[1/(2N)]\sum_{i,\sigma_i^2>B}\log(\sigma_i^2/B)$$

$$B=(ND-\sum_{i,\sigma_i^2<B}\sigma_i^2)/K$$

本 章 小 结

- 4、均方失真下的香农下界

$$R_{SLB}(D)=h(X)-(1/2)\log(2\pi eD)$$

- 5、限失真信源编码定理

限失真信源编码定理：

$R>R(D)\Leftrightarrow$ 存在平均失真 $\le D$ 的信源编码

限失真信源信道编码定理：

$C_{[bps]}>R(D)_{[bps]}\Leftrightarrow$ 存在平均失真 $\le D$ 的信源信道编码

本 章 小 结

- 6、信息传输不等式

$$D \geq R^{-1}(C)$$

- 7、有损信源编码技术
  - 量化
  - 预测编码
  - 子带编码
  - 变换编码

谢谢！