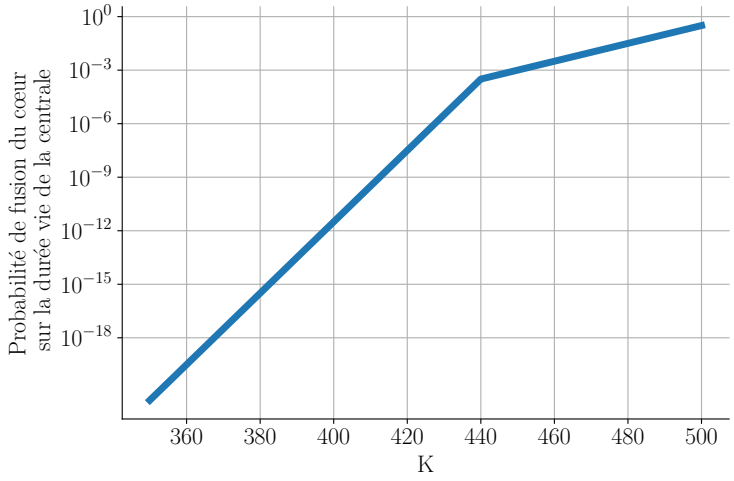
TD 3 : Phénomènes statistiques et applications

Conception d'une centrale nucléaire

Dans cette exercice, on considère une situation et des données fictives afin d'illustrer des situations communément rencontrées en science des données.

Les concepteurs d'une centrale nucléaire veulent éviter le scénario catastrophe d'une fusion du cœur de la centrale. La probabilité de fusion du cœur est déterminée par la capacité K du système de refroidissement, selon la loi décrite ci-dessous.



Les concepteurs ont le choix entre les technologies vendues par les sociétés *Nuke and cranny* et *Fusion impossible*. La capacité de refroidissement pour ces technologies n'est pas connue théoriquement et doit être estimée empiriquement à partir de mesures très bruitées, mais sans biais. Par sans biais, on veut dire que pour chaque système on peut modéliser les mesures comme des tirages aléatoires indépendants d'une distribution de probabilité dont l'espérance est la capacité de refroidissement réelle du système.

Supposons que l'on obtenu 8 mesures pour le système de la société *Fusion impossible* :

$$X_F = 11.5\ 0.02\ 779\ 13.9\ 1124\ 526\ 0.0005\ 594$$

et 7 mesures pour le système de la société *Nuke and cranny* :

$$X_N = 488\ 631\ 110\ 432\ 444\ 705\ 178.$$

Comme vous pouvez le vérifier par vous-même, la moyenne de l'échantillon X_F est environ $\hat{K}_F = 381$ et celle de l'échantillon X_N est environ $\hat{K}_N = 427$.

On notera P_F et P_N les distributions de probabilité de laquelle ces échantillon sont respectivement tirés (notez que la seule chose que l'on sait sur ces distribution est qu'elles ont produits les échantillons obtenus) et K_F et K_N les capacité réelles des systèmes de refroidissement.

Jo Lerigolo propose d'estimer les risques encourus en prenant la moyenne de chaque échantillon et en utilisant le graphe ci-dessus pour estimer le niveau de risque correspondant. Si les deux systèmes permettent d'atteindre un niveau de risque raisonnable, il propose de sélectionner celui dont le niveau de risque est le plus bas d'après sa méthode.

1. Implémentez la solution proposée par Jo et indiquez pour chaque société si la technologie proposée semble suffisamment performante. Quelle société devrait-on préférer selon Jo ?

   Indications de correction : Les moyennes sont données dans l'énoncé. On lit sur le graphe un niveau de risque autour de $10^{-14} - 10^{-13}$ pour le système F et $10^{-4} - 10^{-5}$ pour le système N. On peut discuter avec les étudiants ce qui constitute un niveau de risque acceptable pour ce cas d'étude. La méthode proposée par Jo suggère en tout cas de sélectionner le système F.

2. Que pensez-vous de l'approche proposée par Jo ?

   Indications de correction : Cette approche ne prend pas en compte l'erreur d'estimation (la différence entre $\hat{K}_F$ que nous avons et K_F qui nous intéresse réellement, mais que nous n'avons pas). Même si la loi des grands nombres nous dit que si l'on pouvait collecter un très grand nombre de mesures pour chaque système, les moyennes des échantillons finiraient par converger vers leurs valeurs réelles, nous ne disposons ici que d'un nombre restreint de mesures. Dans le cadre d'un problème aussi critique que la sécurité d'une centrale nucléaire, cette approche ne paraît pas très raisonnable.

3. Pour mieux évaluer les risques encourus, il faudrait que nous ayions une idée d'à quel point les capacités estimées $\hat{K}_F$ et $\hat{K}_N$—auxquelles nous avons accès—peuvent être éloignée des capacités réelles K_F et K_N—qui sont celles qui nous intéressent réellement. Supposons provisoirement que nous connaissions la distribution P_F. Pour faire simple, disons qu'une valeur tirée selon P_F vaut 379 avec probabilité 1/2 et 383 avec probabilité 1/2. Proposez une méthode pour évaluer à quel point la capacité estimée $\hat{K}_F$ peut être éloignée de la capacités réelle K_F.

   Indications de correction : Tirer 8 valeurs aléatoire de K_F, calculer la moyenne $\hat{K}_{F,1}$. Recommencer le processus plusieurs fois, pour obtenir $\hat{K}_{F,2}$, $\hat{K}_{F,3}$, ... Représenter la distribution empirique obtenue pour $\hat{K}_F$ par un histogramme.

4. Par groupe de deux ou seul, tirez aléatoirement 4 échantillons de taille 8 de P_F, calculez la moyenne de chaque échantillon et communiquez vos résultats à l'enseignant.

   Indications de correction : Les étudiants ont vu la dernière fois des façons simples de simuler un tirage aléatoire tout seul ou par groupe de deux

5. A partir des résultats de tous les groupes, représentez graphiquement l'estimation obtenue pour la distribution de $\hat{K}_F$. D'après ce graphe, doit-on s'attendre à ce que $\hat{K}_F$ soit très éloigné de K_F ?

   Indications de correction : Au vu du graphe réalisé et du graphe de la page 1 donnant le risque en fonction de K, il semble que, pour la distribution P_F considérée, $\hat{K}_F$ soit suffisamment proche de K_F pour que le niveau de risque estimé par la méthode de Jo Lerigolo soit à peu près correct. Un exemple de graphe de résultats possible (pour 40 échantillons de taille 8) est donnée sur la Figure 3 ci-dessous.

6. La réponse donnée à la question précédente permet-elle de répondre à la question initiale ?

   Indications de correction : Non, car elle s'appuie sur une hypothèse arbitraire concernant P_F, qui n'est pas appuyée par les données. On voit bien en regardant l'échantillon X_F qu'il ne peut pas avoir été généré par un tirage d'une distribution prenant pour valeur 379 avec probabilité 1/2 et 383 avec probabilité 1/2.

7. En pratique nous n'avons accès à P_F que par le biais de l'échantillon X_F. Proposez et représentez graphiquement une estimation $\hat{P}_F$ de P_F obtenue sur la base de X_F. Justifiez votre réponse sur la base d'un résultat vu en cours.

   Indications de correction : On considère la distribution empirique $\hat{P}_F$ de l'échantillon X_F, qui attribue une masse de probabilité à chaque point observé dans X_F proportionnelle au nombre de fois qu'il a été observé (et aucune masse pour les valeurs non observées). Ici comme il n'y a pas d'égalités, chaque point de l'échantillon a pour probabilité 1/8.

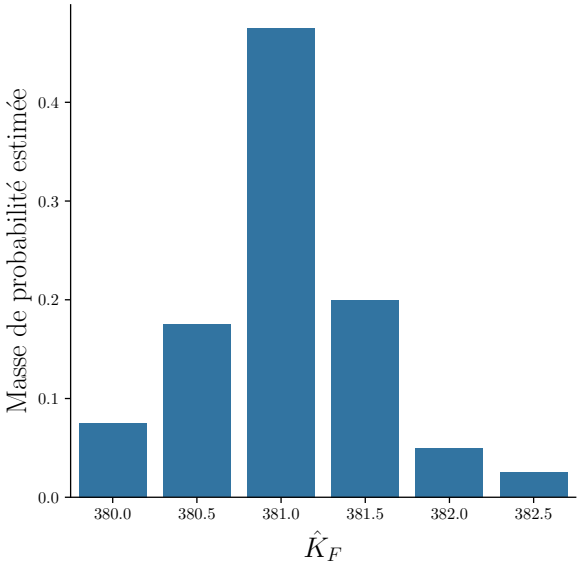


FIGURE 3 – Distribution de $\hat{K}_F$ pour $P_F = \frac{1}{2}\delta_{379} + \frac{1}{2}\delta_{383}$.

On peut se faire un idée de la forme de cette distribution empirique par le biais d'un histograme (cf. Figure 4 ci-dessous). On a vu informellement en cours que la loi des grands nombres s'applique aussi à la distribution empirique d'un échantillon, ce qui veut dire que pour un échantillon suffisamment grand, la distribution empirique donnera une bonne approximation de la distribution réelle P_F (on ne cherche pas à formaliser précisément en quel sens cette convergence a lieu dans ce cours).

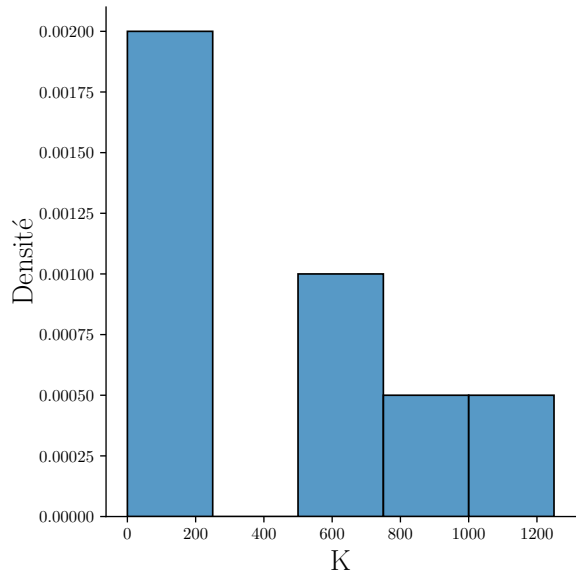


FIGURE 4 – Histogramme de la distribution empirique $\hat{P}_F$ de X_F (paniers de largeur 250).

8. Comment pouvez-vous tirer aléatoirement un échantillon de votre estimation $\hat{P}_F$ de P_F en pratique ?

   Indications de correction : Il suffit de réaliser un tirage uniforme dans l'échantillon X_F, par exemple en plaçant huit petits bouts de papier sur lesquels on aura écrit les valeurs de X_F dans un sac et en tirant avec remise dans le sac.

9. Reprenez les questions 4 et 5 en utilisant votre estimation $\hat{P}_F$ comme un substitut à P_F. Cette idée de remplacer la distribution théorique par une estimation empirique pour analyser la distribution d'un estimateur est célèbre en statistique. Elle porte le nom de *bootstrapping* et a été introduite et étudiée par Bradley Efron en 1979.

   Indications de correction : Un exemple de distribution empirique pour $\hat{K}_F$ (pour 40 échantillons de $\hat{P}_F$ de taille 8) est donné sur la Figure 5. Cette analyse suggère que notre estimateur $\hat{K}_F$ de K_F pourrait facilement se trouver à plusieurs centaines d'unités en-dessous ou au-dessus de la valeur réelle K. Il est loin d'être évident que $\hat{K}_F$ soit suffisamment proche de K_F pour que le niveau de risque pour la technologie F suggéré par la méthode de Jo Lerigolo soit une bonne estimation du risque réel.

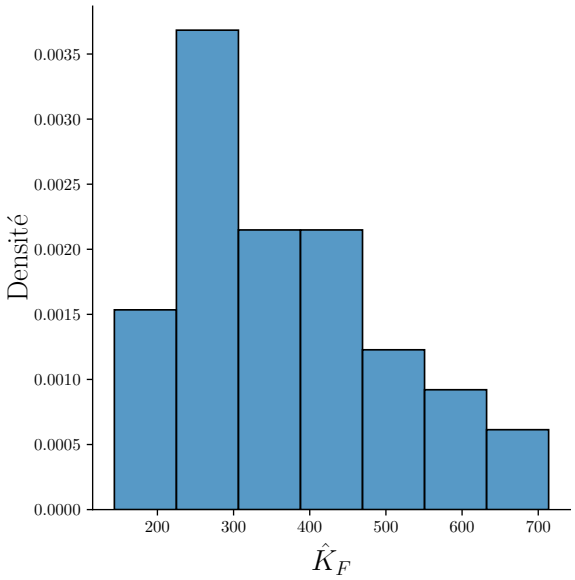


FIGURE 5 – Estimation de la distribution empirique de $\hat{K}_F$ obtenue par bootstrapping.

10. Les tailles d'échantillons considérées ici sont pratiques pour se familiariser avec les concepts clés en faisant les calculs et graphes à la main, mais elles sont trop petites pour que $\hat{P}_F$ constitue une bonne estimation de P_F et il faut donc être très prudent quand à l'interprétation des résultats. Pour pouvoir répondre de manière fiable à la question posée par la méthode du bootstrap, les concepteurs de la centrale nucléaire ont besoin de plus de données (il faut aussi qu'ils tirent plus d'échantillons de $\hat{P}_F$ et $\hat{P}_N$ que nombre-de-groupe $* 4$ pour éviter que le résultat ne dépende trop du côté aléatoire de ces tirages). Ci-dessous, on donne les résultats obtenus en reproduisant les étapes des questions précédentes pour des échantillons de P_F et P_N de taille 5000 au lieu de 8 et en réalisant 1000 tirages aléatoires d'échantillons de taille 5000 de $\hat{P}_F$ et $\hat{P}_N$ au lieu de nombre-de-groupe $* 4$ tirages aléatoires d'échantillons de taille 8. Sur la base de ces résultats, y a-t-il une technologie satisfaisante pour la construction de la centrale ? Comparez avec les résultats obtenus par la méthode de Jo Lerigolo (pour les échantillons considérés on a $\hat{K}_F \approx 409$ et $\hat{K}_N \approx 415$).

   Indications de correction : Ces résultats suggèrent que, au vu des données disponibles, l'incertitude sur le risque associé à la technologie de la société *Fusion Impossible* est trop grande pour qu'elle puisse être employée le contexte sensible d'une centrale nucléaire. L'incertitude sur le risque associé à la technologie de la société *Nuke and Cranny* est nettement plus faible. En fonction du niveau de risque jugé socialement acceptable pour une centrale nucléaire, il pourrait être envisageable d'utiliser cette technologie. Remarquez que la méthode de Jo Lerigolo conduirait à des conclusions opposées. Morale : il est

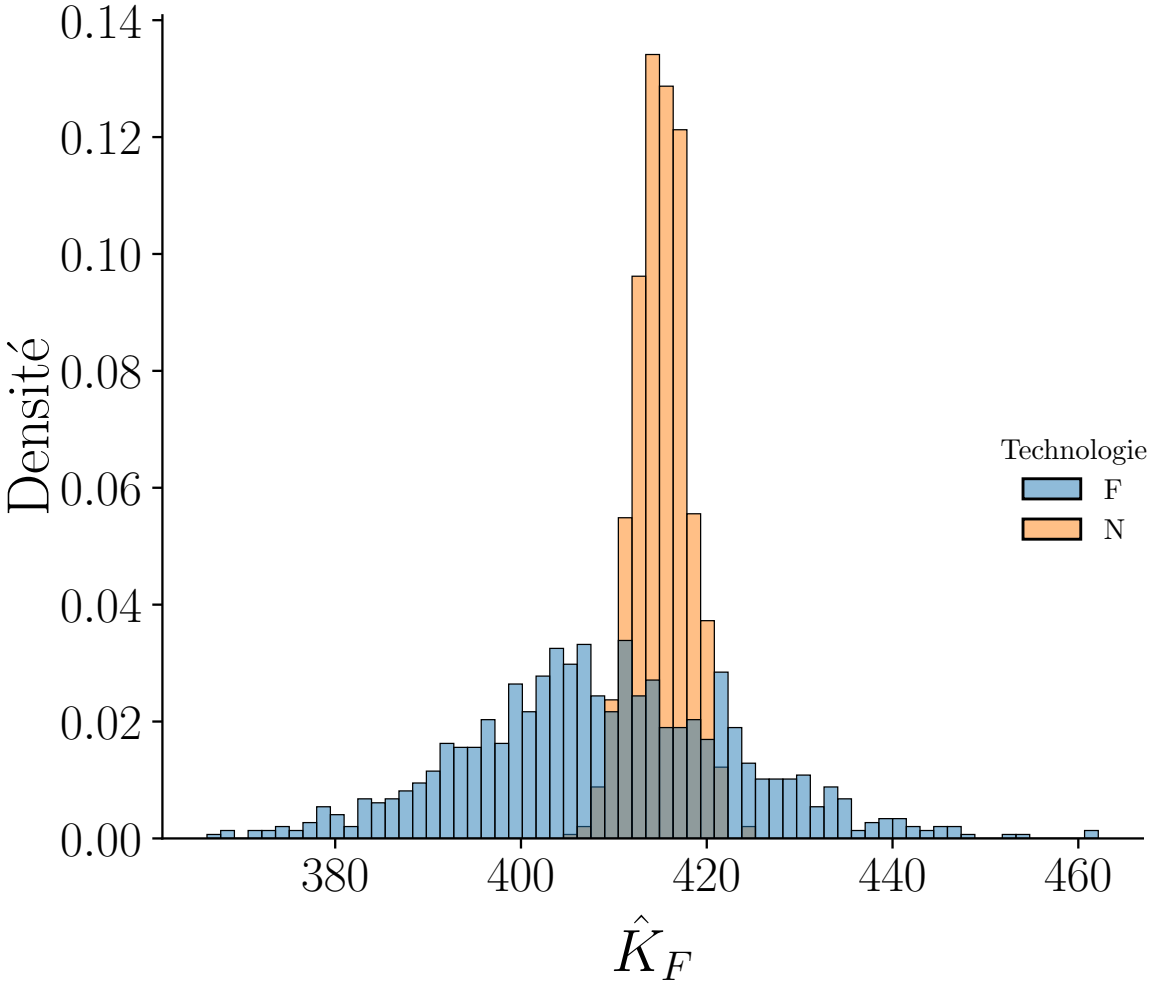


FIGURE 2 – Estimation de la distribution empirique de $\hat{K}_F$ obtenue par bootstrapping.

important d'évaluer l'incertitude associée aux estimations statistiques pour pouvoir les interpréter correctement.