LỜI NÓI ĐẦU

Lý thuyết xác suất và thống kê toán là một môn khoa học cơ bản nhằm cung cấp cho người học những phương pháp luận toán học khi mô tả, phân tích, dự báo và kết luận những hiện tượng kinh tế xã hội có chứa đựng yếu tố ngẫu nhiên. Nó là công cụ có hữu ích để nghiên cứu những hiện tượng ngẫu nhiên mà bằng phương pháp khác thường không thể hoặc rất hạn chế khi giải quyết những vấn đề này.

Trong xu thế đổi mới nội dung, phương pháp giảng dạy các môn toán ở các trường Đại học tại Việt Nam nói chung, Học viện Tài chính nói riêng, Bộ môn Toán cùng Ban Quản lý khoa học - Học viện Tài chính viết mới cuốn sách "***Hướng dẫn giải bài tập xác suất và thống kê toán***". Hệ thống bài tập trong cuốn sách này sẽ tiếp cận theo hướng gắn nhiều với kinh tế và có một số thay đổi nhất định trong cách thức trình bày các dạng bài tập liên quan đến phần thống kê toán để thuận tiện cho người học, phù hợp với xu thế cải cách của các trường Đại học lớn trong và ngoài nước hiện nay.

Cuốn sách gồm 7 chương với đầy đủ các dạng bài tập và phần phụ lục hướng dẫn sử dụng các phần mềm phục vụ cho xử lý số liệu thống kê ở mức độ cơ bản. Tham gia biên soạn cuốn sách này là các giảng viên thuộc Bộ môn Toán, Học viện Tài chính:

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1.1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.1.1. Bổ túc về giải tích kết hợp

- *Chỉnh hợp:* Cho n phần tử khác nhau. Chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử khác nhau lấy từ n phần tử đã cho ($k \leq n$).

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử được ký hiệu và xác định như sau:

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- *Chỉnh hợp lặp:* Cho n phần tử khác nhau. Chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử đã cho là một nhóm có thứ tự gồm k phần tử lấy từ n phần tử đã cho, trong đó mỗi phần tử có thể có mặt $1,2,...,k$ lần.

Số chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử được ký hiệu và xác định như sau:

$$a_n^k = n^k.$$

- *Hoán vị:* Mỗi cách sắp xếp các phần tử của một tập hợp gồm n phần tử khác nhau gọi là một hoán vị của n phần tử ấy.

Số hoán vị của n phần tử được ký hiệu và xác định như sau:

$$P_n = n(n-1).(n-2)...2.1 = n!.$$

- Yếu tố ngẫu nhiên (biến cố ngẫu nhiên).

1.1.3. Mối quan hệ giữa các biến cố

- *Quan hệ kéo theo:* Biến cố A được gọi là kéo theo biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra sau phép thử, ký hiệu là $A \subset B$.

- *Quan hệ tương đương:* Biến cố A được gọi là tương đương với biến cố B nếu A kéo theo B và B cũng kéo theo A, ký hiệu $A = B$.

- *Tổng của các biến cố:* Tổng của các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là một biến cố, ký hiệu là $A_1 + A_2 + ... + A_n$. Biến cố tổng xảy ra khi và chỉ khi có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xảy ra sau phép thử.

- *Tích của các biến cố:* Tích của các biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là một biến cố, ký hiệu là $A_1A_2...A_n$. Biến cố tích xảy ra khi và chỉ khi đồng thời n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cùng xảy ra sau phép thử.

- *Quan hệ xung khắc:* Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc với nhau nếu chúng không đồng thời xảy ra sau phép thử. Tức là: $AB = V$.

- *Hệ các biến cố xung khắc từng đôi một:* Các biến cố A_1, $A_2, \ldots,$ A_n được gọi là xung khắc từng đôi một nếu hai biến cố bất kỳ trong chúng xung khắc với nhau. Tức là:

$$A_iA_j = V,\ \forall i \neq j;\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}.$$

Tiến hành lặp đi lặp lại n lần phép thử T thấy có X_A lần xuất hiện biến cố A. Khi đó, $f(A) = \dfrac{X_A}{n}$ được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A.

Khi n đủ lớn, tần suất xuất hiện biến cố A dao động rất ít xung quanh một số cố định p nào đó thì số p ấy được gọi là xác suất của biến cố A.

Như vậy: $P(A) = p \approx f(A) = \dfrac{X_A}{n}$.

- Xác suất có điều kiện:

Xác suất có điều kiện của biến cố A khi biến cố B đã xảy ra từ trước được ký hiệu và xác định như sau:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad \text{với } P(B) > 0.$$

- Quan hệ độc lập: Biến cố A được gọi là độc lập với biến cố B nếu $P(A/B) = P(A)$.

- Hệ các biến cố độc lập trong toàn bộ: Các biến cố A_1, A_2, ..., A_n được gọi là độc lập trong toàn bộ nếu mỗi biến cố A_i bất kỳ $(i = \overline{1,n})$ độc lập với tích của một số bất kỳ các biến cố trong số $(n-1)$ biến cố còn lại.

- Quan hệ phụ thuộc: Nếu $P(A/B) \neq P(A)$ hoặc $P(B/A) \neq P(B)$ thì ta nói hai biến cố A, B phụ thuộc nhau.

- Công thức tính xác suất của tích các biến cố

- Công thức xác suất đầy đủ và công thức Bayes

+) *Công thức xác suất đầy đủ:* Giả sử n biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lập thành một hệ đầy đủ các biến cố. B là một biến cố xảy ra trong cùng phép thử với các biến cố trên. Khi đó:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i).$$

+) *Công thức Bayes:* Với các giả thiết như công thức xác suất đầy đủ, thêm một điều kiện nữa là phép thử đã được thực hiện và biến cố B đã xảy ra, ta có:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i).P(B / A_i)}{P(B)}, \ \forall i = \overline{1,n}.$$

1.2. CÁC BÀI TẬP GIẢI MẪU

1.2.1. Các bài tập nhận biết

Bài 1.1. Một người đi rút tiền ở cây ATM nhưng quên mất 2 chữ số cuối cùng của mã PIN.

a) Tính xác suất người đó nhập đúng mã PIN.

b) Xác suất trên thay đổi thế nào nếu người đó nhớ được 2 chữ số cuối cùng giống nhau.

Lời giải: Gọi A là biến cố "Người đó nhập đúng mã PIN".

a) Nếu chọn 2 chữ số bất kỳ thì số kết cục đồng khả năng của phép thử chọn ngẫu nhiên 2 chữ số là: $n = a_{10}^2 = 100.$

Ta có: $P(A) = \dfrac{m_A}{n} = \dfrac{60}{220} = \dfrac{3}{11}$.

b) Gọi B là biến cố "Rút được 1 triệu 500 nghìn đồng".

Số kết cục thuận lợi cho biến cố B chính bằng số cách rút được 3 tờ tiền mệnh giá 500 nghìn đồng: $m_B = C_5^3 = 10$.

Ta có: $P(B) = \dfrac{m_B}{n} = \dfrac{10}{220} = \dfrac{1}{22}$.

Bài 1.3. Khảo sát các nhân viên ở một công ty về việc sử dụng 2 loại thẻ tín dụng StepUp và Platinum do một ngân hàng phát hành thấy có 36% người dùng thẻ StepUp; 22% người dùng thẻ Platinum; 13% người dùng cả 2 loại thẻ StepUp và Platinum. Hỏi tỷ lệ nhân viên ở công ty đó dùng ít nhất một trong hai loại thẻ tín dụng trên là bao nhiêu?

Lời giải: Chọn ngẫu nhiên 1 nhân viên ở công ty đó.

Gọi A là biến cố "Nhân viên đó dùng thẻ StepUp";

B là biến cố "Nhân viên đó dùng thẻ Platinum".

Theo giả thiết có: $P(A) = 0,36; P(B) = 0,22; P(AB) = 0,13$.

Gọi C là biến cố "nhân viên đó sử dụng ít nhất một trong hai loại thẻ tín dụng trên".

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0,36 + 0,22 - 0,13 = 0,45 = 45\%. \end{aligned}$$

Vậy tỷ lệ nhân viên ở công ty đó dùng ít nhất một trong hai loại thẻ tín dụng trên là 45%.

Bài 1.4.
biết rằng
tương ứn
a) Cả 3 r
b) Cả 3 r
Lời giải.
$i = \overline{1,3}$.
$\Rightarrow A_1, A_2$
a) Gọi A
Ta có:

b) Gọi B
hàng". K

Bài 1.5.
sinh viên
chương t
nhóm tu
người ta
đánh giá

a) Tính xác suất sinh viên được chọn hoàn thành chương trình thực tập đúng hạn.

b) Biết rằng sinh viên được chọn đó hoàn thành chương trình thực tập đúng hạn, tính khả năng để sinh viên này thuộc nhóm thứ nhất.

Lời giải: a) Gọi A_i là biến cố "sinh viên chọn ra thuộc nhóm thứ *i*" ($i = \overline{1,2}$).

$\Rightarrow A_1, A_1$ là một hệ đầy đủ các biến cố và

$$P(A_1) = \frac{5}{12};\ P(A_2) = \frac{7}{12}.$$

Gọi B là biến cố "sinh viên này hoàn thành chương trình thực tập đúng hạn".

Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2)$$
$$= \frac{5}{12}\cdot 0{,}8 + \frac{7}{12}\cdot 0{,}9 = \frac{103}{120} \approx 0{,}8583.$$

b) Theo công thức Bayes, ta có

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{12}\cdot 0{,}8}{0{,}8583} \approx 0{,}3884.$$

Vậy nếu sinh viên được chọn hoàn thành chương trình thực tập đúng hạn thì khả năng thuộc nhóm thứ nhất là 0,3884.

1.2.2. Các bài tập vận dụng và ứng dụng thực tiễn

Bài 1.6. Một nhà máy có 4 dây chuyền sản xuất hoạt động độc lập nhau. Xác suất trong một ca làm việc dây chuyền sản

a) Hai quyển sách được chọn ra cùng loại.

b) Hai quyển sách được chọn ra khác loại nhau.

Lời giải: a) Kí hiệu sách toán, lý, hóa lần lượt là sách loại 1, 2, 3.

Gọi A_i là biến cố "Từ thùng 1 chọn được quyển sách loại *i*", $i=\overline{1,3}$;

B_j là biến cố "Từ thùng 2 chọn được quyển sách loại *j*", $j=\overline{1,3}$;

A là biến cố "Hai quyển sách được chọn ra cùng loại".

Ta có: $P(A)=P(A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3)$

$$\overset{xk}{=}P(A_1B_1)+P(A_2B_2)+P(A_3B_3)$$

$$\overset{dl}{=}P(A_1)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)+P(A_3)P(B_3)$$

$$=\frac{C_5^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_{10}^1}+\frac{C_3^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_4^1}{C_{10}^1}+\frac{C_4^1}{C_{12}^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_{10}^1}=\frac{1}{3}\cdot$$

b) Ta có $\overline{A}$ là biến cố "Hai quyển sách được chọn ra khác loại nhau".

Do đó: $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot$

Bài 1.8. Một người đến công ty X để bán hàng 3 lần. Khả năng lần đầu người đó bán được hàng là 0,8. Nếu lần trước người đó bán được hàng thì khả năng để lần tiếp theo bán được là 0,9;

Lời giải: Gọi A_i là biến cố "Trong 2 sản phẩm bị mất có i chính phẩm", $i = \overline{0,2}$;

B là biến cố "Sản phẩm được lấy ra kiểm tra là chính phẩm".

Ta có A_0, A_1, A_2 lập thành một hệ đầy đủ các biến cố.

$$P(A_0) = \frac{C_3^2}{C_{11}^2} = \frac{3}{55}; P(A_1) = \frac{C_8^1 C_3^1}{C_{11}^2} = \frac{24}{55}; P(A_2) = \frac{C_8^2}{C_{11}^2} = \frac{28}{55}.$$

Theo công thức xác suất đầy đủ:

$$P(B) = P(A_0)P(B/A_0) + P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2)$$
$$= \frac{3}{55}\cdot\frac{8}{9} + \frac{24}{55}\cdot\frac{7}{9} + \frac{28}{55}\cdot\frac{6}{9} = \frac{8}{11}\cdot$$

Theo công thức Bayes:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{24}{55}\cdot\frac{7}{9}}{\frac{8}{11}} = \frac{7}{15}\cdot$$

Vậy nếu sản phẩm lấy ra để kiểm tra là chính phẩm thì khả năng lô hàng đó mất một chính phẩm và một phế phẩm là 7/15.

Bài 1.10. Một cửa hàng điện máy nhập lô hàng bao gồm: 8 sản phẩm loại 1; 7 sản phẩm loại 2 và 5 sản phẩm loại 3. Biết rằng xác suất để mỗi sản phẩm loại 1, 2, 3 tương ứng bị hỏng trong quá trình vận chuyển là 1%; 1,5% và 1,8%. Sau khi lô hàng đó vận chuyển về kho của cửa hàng, người ta lấy ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm để kiểm tra.