1 四元数的性质和定义

1.1 四元数的定义

cayley-dickson 给出四元数的一种定义，即存在两个复数 $A = a + bi$ 和 $C = c + di$ 然后即可构造出 $Q = A + Cj$ 并且定义 $k \triangleq ij$，即可得四元数空间 $\mathbb{H}$ 下的一个数

$$Q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$$

其中 $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}$,$\{i, j, k\}$ 这三个虚数单位有如下性质：

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

同时可以得到：

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j.$$

从式（1），我们可以在四元数定义中嵌入虚数也就是实数和虚数，也即实数、虚数和复数均为四元数，

$$Q = a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{H}, Q = bi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{H}, Q = a + bi \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{H}.$$

同样的，可以在 $\mathbb{H}$ 的三维空间子集中定义纯虚数以示完备性，同时记 $\mathbb{H}_p = Im(\mathbb{H})$ 为纯虚数空间，

$$Q = bi + cj + dk \in \mathbb{H}_p \subset \mathbb{H}.$$

需要注意的是，类比常规单位长度复数 $z = \mathbf{e}^{i\theta}$ 能够表征二维平面下的旋转（用一个复数积，即 $x' = zx$), 扩展的复数或单位长度的四元数 $\mathbf{q} = e^{(u_x i + u_y j + u_z k)\theta/2}$ 可以表征三维空间下的旋转（用双四元数积，即 $x' = q \otimes x \otimes q^*$), 后续会详细解释。

注意： 并非所有四元数的定义都相同，有些论文将 bi 写作 ib，也因此可以得到 $k = ji = -ij$ $ijk = 1$，也即左手坐标系下的四元数。此外，实部和虚部位置也存在不同，比如会有 $Q = ia + kc + d$。这些写法区别没啥其他根本含义，不过会使得公式会有所区别。具体可以参看第三节的解释。

注意： 还有一些其他约定也会使得公式会有所不同。它们涉及我们赋予旋转运算子的“意义”或“解释”，无论是旋转向量还是旋转参考系——实质上，它们构成了相反的运算。同样请参阅第 3 节以获得进一步的解释。

注： 在上述不同的约定中，本文主要涉及了 Hamilton 约定，其最显著的特性是定义（2）。具体消除歧义的方法被归入第三节。

1.1.1 四元数表示

实数 + 虚数表示法 $\{1, i, j, k\}$ 不一定总是符合我们要求。若使用式 (2)，即可将其表示为标量和矢量的和，

$$Q = q_w + q_x i + q_y j + q_z k \Leftrightarrow Q = q_w + \mathbf{q}_v (5)$$

其中 q_w 指实部或标量，$\mathbf{q}_v = q_x i + q_y j + q_z k = (q_x, q_y, q_z)$ 为虚部或矢量。同时也可定义为标量和矢量的有序对。

$$Q = \langle q_w, \mathbf{q}_v \rangle \, (6)$$

通常将一个四元数表示为一个四维量 $\mathbf{q}$,

$$\mathbf{q} \triangleq \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

这样我们就可以用矩阵代数来处理四元数的运算。在某些情况下，我们可能允许自己用“=”来混合表示。典型实例为四元数和纯四元数，

$$general : \mathbf{q} = q_w + \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}, real : q_w = \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}, pure : \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{H}_p$$

1.2 四元数的主要性质

1.2.1 和

求和很简单，

$$\mathbf{pq} = \begin{bmatrix} p_w \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} q_w \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_w \pm q_w \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

满足交换律和合并律，

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{q} + \mathbf{pp} + (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = (\mathbf{p} + \mathbf{q}) + \mathbf{r}.$$

1.2.2 积

符号定义为 $\otimes$，四元数积使用式 (1) 和代数式 (2), 以向量形式给出：

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}=\begin{bmatrix}p_wq_w-p_xq_x-p_yq_y-p_zq_z\\p_wq_x+p_xq_w+p_yq_z-p_zq_y\\p_wq_y-p_xq_z+p_yq_w+p_zq_x\\p_wq_z+p_xq_y-p_yq_x+p_zq_w\end{bmatrix}$$

上式可用标量和向量形式写作：

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}=\begin{bmatrix}p_wq_w-\mathbf{p}_v^\top\mathbf{q}_v\\p_w\mathbf{q}_v+q_w\mathbf{p}_v+\mathbf{p}_v\times\mathbf{q}_v\end{bmatrix}$$

同时上式表明四元数积不满足交换律，即：

$$\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}\neq\mathbf{q}\otimes\mathbf{p}$$

需要指出当 $\mathbf{p}_v\times\mathbf{q}_v=0$ 时，应当知道其中一个四元数虚部为 0, 为实四元数即 $\mathbf{p}=p_w$ 或者 $\mathbf{q}=q_w$，或者还有一种情况即两个向量部分为平行，即 $\mathbf{p}_v\parallel\mathbf{q}_v$，只有当上述情况出现时，才可以认为四元数积满足交换律。不过四元数是满足结合律的，即有：

$$(\mathbf{q}\otimes\mathbf{q})\otimes\mathbf{r}=\mathbf{p}\otimes(\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}),$$

同时有和分配律，

$$\mathbf{p}\otimes(\mathbf{q}+\mathbf{r})=\mathbf{p}\otimes\mathbf{q}+\mathbf{p}\otimes\mathbf{r}\ (\mathbf{p}+\mathbf{q})\otimes\mathbf{r}=\mathbf{p}\otimes\mathbf{r}+\mathbf{q}\otimes\mathbf{r}.$$

两个四元数乘积为双线线且可以表示为两个相等的矩阵积，如下：

$$\mathbf{q}_1\otimes\mathbf{q}_2=[\mathbf{q}_1]_L\,\mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_1\otimes\mathbf{q}_2=[\mathbf{q}_2]_R\,\mathbf{q}_1$$

其中 $[\mathbf{q}]_L$ 和 $[\mathbf{q}]_R$ 表示左右四元数乘积矩阵，可通过式 (12) 和 (17) 得到：

$$[\mathbf{q}]_L = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -qy & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix}, [\mathbf{q}]_R = \begin{bmatrix} q_w & -q_x & -qy & -q_z \\ q_x & q_w & q_z & -q_y \\ q_y & -q_z & q_w & q_x \\ q_z & q_y & -q_x & q_w \end{bmatrix},$$

简洁些表示如下：

$$[\mathbf{q}]_L = q_w\mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & [\mathbf{q}_v]_{times} \end{bmatrix}, [\mathbf{q}]_R = q_w\mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & -[\mathbf{q}_v]_{times} \end{bmatrix}.$$

这里反对称操作 $[\cdot]_{times}$ 可以生成叉积矩阵。

$$[a]_{times} \triangleq b = a \times b, \forall a, b \in \mathbb{R}^3$$

最后，由

$$((q) \otimes \mathbf{x}) \otimes \mathbf{p} = [\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L X \ \mathbf{q} \otimes (\mathbf{x} \otimes \mathbf{p}) = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R X$$

可得：

$$[\mathbf{p}]_R [\mathbf{q}]_L = [\mathbf{q}]_L [\mathbf{p}]_R$$

也就是说左四元数积和右四元数积矩阵可以相互转换，2.8 节有更详细的内容。
具有乘积运算 $\otimes$ 的四元数构成非交换集，集合的元素同一性，恒等式 $\mathbf{q}_1 = 1$，逆，后文会提到。

1.2.3 恒等

关于乘积的恒等式有 $\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}$. $\mathbf{q}_1$ 为实数部为‘1’的四元数：

$$\mathbf{q}_1 = 1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}$$

1.2.4 共轭

四元数共轭可以定义为：

$$\mathbf{q}^* \triangleq q_w - \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_w \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

即有以下性质：

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q} = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 = \begin{bmatrix} q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}$$

和

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})^* = \mathbf{q}^* \otimes \mathbf{p}^*$$

1.2.5 范数

四元数的范数可以定义为：

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^(- 1) = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q} = q_1.$$

可计算：

$$\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^* / \left\| \mathbf{q} \right\|^2.$$

将单位四元数解释为方向规范或旋转运算时，意味着可以使用共轭四元数实现反转。单位四元数可以写作：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \mathbf{u} \sin\theta \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{u} = u_x i + u_y j + u_z k$ 为单位向量，θ 为常量。如 (28), 具有乘积运算的单位四元数构成一个非交换集，其中逆和共轭相同。

1.3 其他性质

1.3.1 四元数转换

定义一个四元数转换为 $[\mathbf{q}, \mathbf{q}] \triangleq \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p}$. 从式 13 可得:

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} - \mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = 2\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v.$$

加上下标，

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v - \mathbf{q}_v \otimes \mathbf{p}_v = 2\mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v.$$

后面会用到这个变换

1.3.2 纯四元数乘积

纯四元数无实数部分，即 $Q = \mathbf{q}_v$ 或者 $\mathbf{q} = [0, \mathbf{q}_v]$，由式 13, 可得：

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v = -\mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v + \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} -\mathbf{p}_v^\top \mathbf{q}_v \\ \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v \end{bmatrix}$$

从而

$$\mathbf{p}_v \otimes \mathbf{q}_v = -\mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v = -\left\|\mathbf{q}_v\right\|^2$$

同时对于纯单位四元数 $u \in \mathbb{H}_p, \|\mathbf{u}\| = 1$ 有

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} = -1$$

与虚数乘积 $i \cdot i = -1$ 类似

1.3.3 纯四元数的自然数幂

定义 $\mathbf{q}^n, n \in \mathbb{N}$ 为 $\otimes$ 运算下四元数 $\mathbf{q}$ 的 n 次幂。即，当 $\mathbf{v}$ 是纯虚数时，可以定义 $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$, 其中 $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}\mathbf{u}$ 为虚数单位，即可由式 36 得

$$\mathbf{v}^2 = -\theta^2, \mathbf{v}^3 = \mathbf{u}\theta^3, \mathbf{v}^4 = \theta^4, \mathbf{v}^5 = \mathbf{u}\theta^5, \mathbf{v}^6 = -\theta^6, , \cdots$$

1.3.4 纯四元数指数

四元数指数是一个类似于普通指数函数的四元数上的函数。和实指数的情况完全一样，它被定义为绝对收敛的幂级数

$$\mathbf{e}^{\mathbf{q}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{q}^k \in \mathbb{H}$$

显然，实四元数的指数与普通指数函数完全一致。而纯虚数指数定义如下

$$\mathbf{e}^{\mathbf{v}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{v}^k \in \mathbb{H}$$

设 $\mathbf{v} = \mathbf{u}\theta$ 其中 $\theta = \|\mathbf{v}\| \in \mathbb{R}$，$\mathbf{u}$ 为虚数单位，由式 38, 将级数中的标量和向量项分组即有

$$e^{\mathbf{u}\theta} = (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots) + (\mathbf{u}\theta - \frac{\mathbf{u}\theta^3}{3!} + \frac{\mathbf{u}\theta^5}{5!} + \cdots)$$

可以看出上式分别为余弦和正弦级数，因此可得

$$e^{\mathbf{v}} = e^{\mathbf{u}\theta} = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \mathbf{u}\sin\theta \end{bmatrix}$$

上式是欧拉公式的一个较优美的扩展形式，即对于虚数定义有 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. 需要注意的是，由于 $\|e^{\mathbf{v}}\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, 纯四元数的指数是单位四元数，即有属性

$$e^{-\mathbf{v}} = (e^{\mathbf{v}})^*$$

对于小角度四元数，为避免 $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ 时除数为 0，可使用 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的泰勒级数来近似表达。即

$$e^{\mathbf{v}} \approx \begin{bmatrix} 1-\theta^2/2 \\ \mathbf{v}(1-\theta^2/6) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \underset{\theta\to 0}{\to} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

1.3.5 一般四元数的指数

由于四元数乘积运算的非交换性，不能给出一般四元数 $\mathbf{q}$ $\mathbf{p}$ 的运算 $e^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = e^{\mathbf{p}}e^{\mathbf{q}}$. 不过当某一乘积元素为标量时，交换性成立也即有

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q_w+\mathbf{q}_v} = e^{q_w}e^{\mathbf{q}_v}$$

同时，令 $\mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v$, 可以得到

$$e^{\mathbf{q}} = e^{q_w} \begin{bmatrix} \cos\|\mathbf{q}_v\| \\ \frac{\mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}_v\|}\sin\|\mathbf{q}_v\| \end{bmatrix}$$

1.3.6 单位四元数的对数

若 $\|\mathbf{q}\| = 1$, 显然有

$$\log\mathbf{q} = \log(\cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta) = \log(e^{\mathbf{u}\theta}) = \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix}$$

也即单位四元数的对数为纯四元数，由式 (42) 可得到角轴值

$$\mathbf{u} = \mathbf{q}_v/\|\mathbf{q}_v\|$$

$$\theta = \arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w)$$

对于小角度四元数，可以通过 $\arctan(x)$ 的泰勒级数来逼近表示

$$\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta = \mathbf{q}_v \frac{\arctan(\|\mathbf{q}_v\|, q_w)}{\|\mathbf{q}_v\|} \approx \frac{\mathbf{q}_v}{q_w}(1 - \frac{\|\mathbf{q}_v\|^2}{3q_w^2}) \approx \mathbf{q}_v \overset{\theta \to 0}{\to} 0$$

1.3.7 一般四元数对数

若 $\mathbf{q}$ 是一般四元数，可得：

$$\log \mathbf{q} = \log(\|\mathbf{q}\| \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}) = \log \|\mathbf{q}\| + \log \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \log \|\mathbf{q}\| + \mathbf{u}\theta = \begin{bmatrix} \log \|\mathbf{q}\| \, | \mathbf{u}\theta \end{bmatrix}$$

1.3.8 $\mathbf{q}_t$ 类型的指数形式

有 $\mathbf{q} \in \mathbb{H}, t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{q}^t = \exp(\log(\mathbf{q}^t)) = \exp(t \log(\mathbf{q}))$$

若 $\|\mathbf{q}\| = 1$, 有 $\mathbf{q} = [\cos\theta, \mathbf{u}\sin\theta]$, 因此 $\log(\mathbf{q}) = \mathbf{u}\theta$, 可以给出

$$\mathbf{q}^t = \exp(t\mathbf{u}\theta) = \begin{bmatrix} \cos t\theta \\ \mathbf{u}\theta \end{bmatrix}$$

因为指数最终是 θ 的线性乘子，它可以看作是一个线性角插值器。在第 2.7 节中会进一步阐述这个观点。

2 旋转和交叉关系

2.1 三维矢量旋转公式