
마지막 변경일 2019년 6월 30일

** 선분과 직선 위의 한 점을 가지고 (AlgeoMath)**

경남과학고등학교 교사 민은기

다음 강의록은 교사체험수학 직무연수강의(경남 수학문화관 2019.07.27 예정)
를 위해 만든 강의록입니다.

가장 최근 파일은 링크를 누르면 받아 보실 수 있습니다.

From Github : <https://min7014.github.io/2019/2019062401.pdf>

자료의 수정이 필요한 부분이 있으면 언제든지

E-mail : min7014@nate.com

으로 연락주시면 감사하겠습니다.

페이스북 게시물을 통해서 업데이트 사항을 받아보실 수도 있습니다.

<https://www.facebook.com/mineungimath/posts/1146967535490688>

또한 YouTube 동영상 자료로도 보실 수 있습니다.

주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도

https://www.youtube.com/playlist?list=PL2aesTdeAw77ejy5_ARgeyc2PwOhXWMFw

주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도

<https://www.youtube.com/playlist?list=PL2aesTdeAw76GEK6rwk02UMBfBGcPWUJP>

AlgeoMath는 현재 크롬에서 실행됩니다. <https://www.algeomath.kr>

* 참고 *

학습자료 모음 AlgeoMath : <http://me2.do/5qso0BiT>

* 주요변경사항 *

2019.06.30. 개수의 “cadinality는 \mathbb{R} 의 cardinality과”를 “개수의 cadinality는 \mathbb{R} 의 cardinality와”로 변경

2019.06.30. 뒤쪽의 문제에 “직각삼각형”을 “이등변삼각형”으로 고침.

2019.06.24. 강의록 Tex으로 작성시작

차례

차례

i

제 1 장 AlgeoMath를 활용한 수업자료 만들기	1
1.1 선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)	2

제 1 장

AlgeoMath를 활용한 수업자료 만들기

1.1 선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

경남과학고등학교 교사 민은기

지금은 정확히 어떤 문제인지 기억하지 못하지만, 아래와 같은 해석학적인 문제를 보면서 작도문제를 생각하고 이를 공학도구를 사용하여 생각한 과정을 이야기하고자 합니다.

세 점 $A(3, 2)$, $B(-2, -4)$, $C(1, a)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

출처: 비상수학 고등학교 수학 I P243 수준별문제 1 평면좌표 기초문제 8번

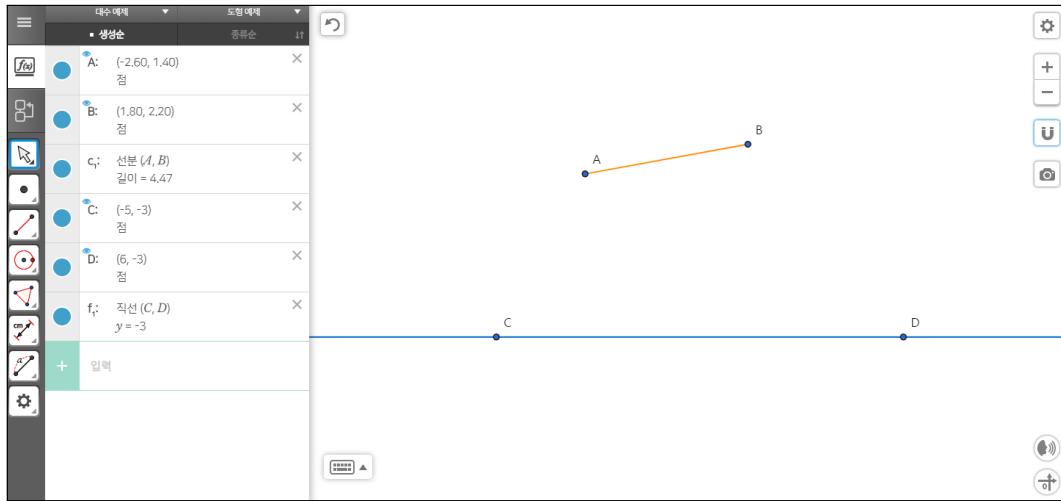
위 문제를 아래와 같은 작도 문제로 바꾸어 생각할 수 있습니다. 작도 문제로 바꾸어 생각하는 이유는 작도 과정이 문제 풀이 전략이 될 수 있기 때문이다. 즉, 직선은 눈금 없는 자이고 원은 컴파스가 되는 것입니다.

주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형을 작도하여라.

사실 너무나 간단해 보이는 위 문제는 종이에 그리고 생각해 보아도 충분해 보입니다. 이러한 이유로 알지오매스와 같은 공학도구를 활용하는 이유를 납득하기 어려울지 모릅니다. 아마도 이 글을 끝까지 읽고 나면 공학도구를 활용할 필요성을 조금이나마 체감할 수 있을 것입니다.

알지오매스를 처음 사용하는 이를 위하여 각각의 작성과정을 영상으로 만들었습니다. 글의 설명과 함께 영상을 보면 쉽게 도형을 만들어나갈 수 있을 것입니다. 더불어 이 강의 내용은 알지오매스와 같은 공학도구에도 적용이 될 것입니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

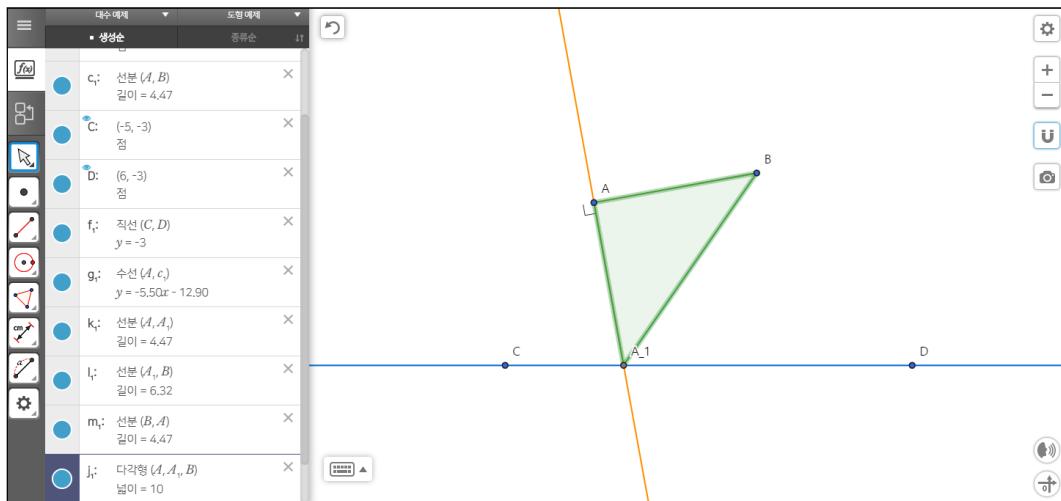


*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0001

AlgeoMath : <http://me2.do/xQApN1vT>

YouTube : <https://youtu.be/EnF2fr8SOPw>

문제 상황에 맞는 선분과 직선을 작도하겠습니다. ‘선분’ 도구를 활용하여 선분을 작도합니다. ‘직선’ 도구를 활용하여 직선을 작도합니다. ‘그리드 보기 설정’을 해제하여 좌표평면의 눈금과 좌표축을 보이지 않게 합니다.



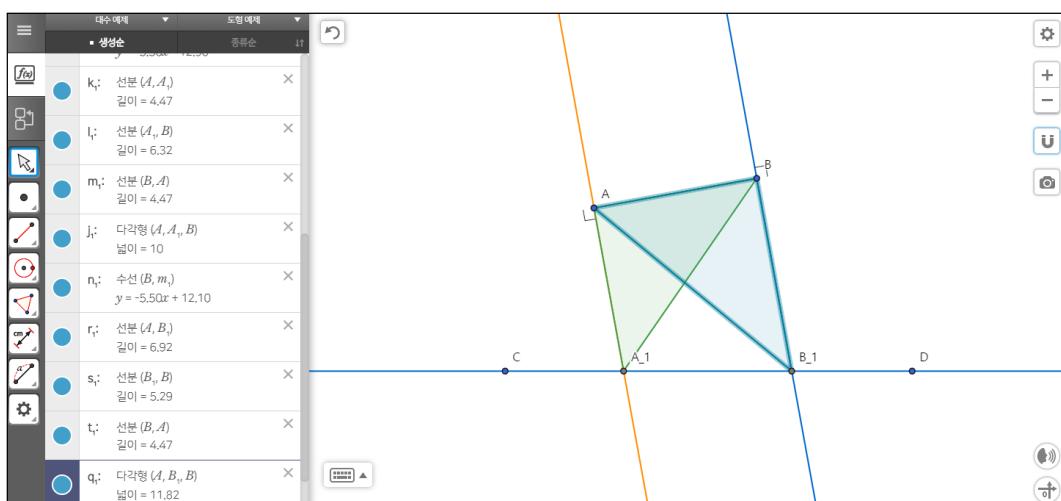
제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0002

AlgeoMath : <http://me2.do/5iy20Gmi>

YouTube : https://youtu.be/VWnItqRP_V0

선분의 한 끝 점이 직각이 되는 삼각형을 만들어 보겠습니다. ‘수선’ 도구를 사용하여 선분을 선택하고 선분의 한 끝 점을 선택하여 선분의 한 끝 점을 지나면서 선분과 수직이 되는 직선을 작도합니다. ‘교점’ 도구를 사용하여 직선을 선택하고 수선을 선택하여 교점을 작도합니다. ‘다각형’ 도구를 사용하여 선분의 양 끝 점과 수선과 직선의 교점을 차례로 선택하여 삼각형을 작도합니다. 이때 처음 선택한 점을 다시 선택하여야 삼각형이 작도됩니다.



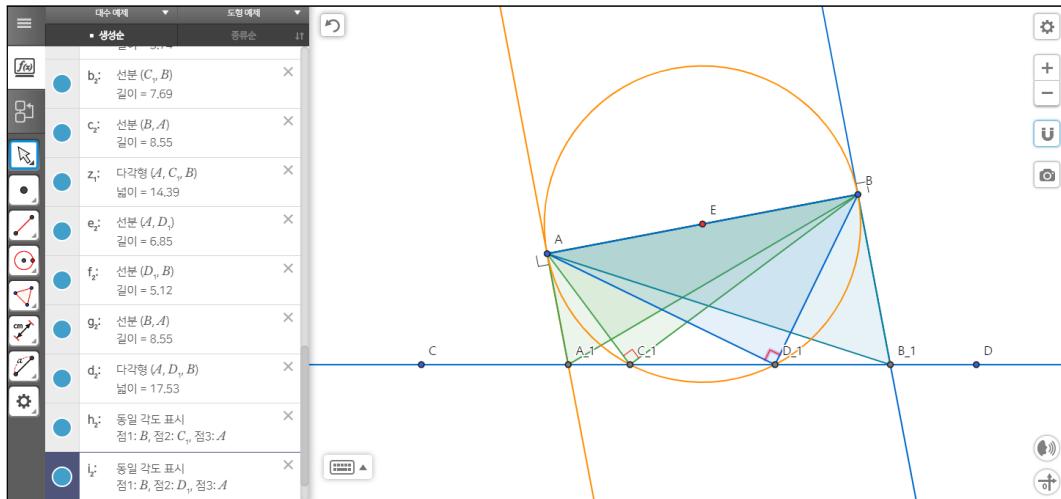
*주어진 선별과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 만들기

AlgeoMath : <http://me2.do/5Cxqp5Xa>

YouTube : <https://youtu.be/M09u7jqywbk>

같은 방식으로 선분의 다른 한 끝 점을 지나는 수선을 작도하고 이 수선과 직선의 교점을 작도한 후 직각삼각형을 작도합니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0004

AlgeoMath : <http://me2.do/GHhNDutS>

YouTube : <https://youtu.be/pMvuvwtweNA>

이번에는 직선 위의 한 점에서 수직이 되는 삼각형을 작도해 보겠습니다. 원주각과 중심각의 성질을 활용하면 수직이 되는 직선 위의 점을 작도할 수 있습니다. 즉, 선분이 지름이 되는 원과 직선과의 교점이 바로 원하는 점이 될 것입니다. 다음과 같이 작도해 봅시다. ‘중점’도구를 선택한 상태에서 선분의 양쪽 끝점을 차례로 선택하여 선분의 중점을 작도합니다. ‘원:중심과 한 점’ 도구를 선택한 상태에서 중점과 선분의 한 끝 점을 선택하여 선분이 지름이 되도록 원을 작도합니다. 선분 위치에 따라서 원과 직선의 만나지 않아 교점이 만들 어지지 않는 경우가 있습니다. 이런 경우에 ‘선택’ 도구를 선택하거나 ‘Esc’ 키를 눌러 ‘선택’ 도구가 선택된 상태에서 선분의 양쪽 끝점을 적당히 조절하여 원과 직선이 두 점에서 만나도록 조절합니다. ‘교점’ 도구를 선택한 상태에서 원을 선택하고 직선을 선택하여 두 교점을 작도합니다. 선분의 양 끝점과 원과 직선이 만나는 두 교점 중 하나를 선택하여 삼각형 하나를 작도합니다. 나머지 교점으로 또 하나의 삼각형을 작도합니다. ‘꾸미기:각도’ 도구를 선택한 상

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

태에서 지금 작도된 삼각형의 선분의 한 끝 점을 선택하고 원과 직선의 교점, 선분의 다른 한 끝 점을 선택하여 각을 표시합니다. 같은 시계 반대 방향으로 점을 선택하여야 원하는 각이 표시됩니다. 직각인 경우에는 자동으로 직각으로 표시됩니다.

지금까지 간단히 ‘선분’ 도구, ‘수선’ 도구, ‘중점’ 도구, ‘원:중심과 한 점’ 도구, ‘교점’ 도구 그리고 ‘꾸미기:각도’ 도구를 활용하여 위의 문제에 맞게 작도를 통해서 직각삼각형 4개를 그렸습니다. 이것으로 끝낸다면, 공학도구를 사용하지 말고 그냥 종이에 연필로 그리면서 생각해도 충분할 것입니다. 하지만, 지금부터 하는 내용이 정말 공학도구를 사용해야겠구나, 바로 이러한 활용 때 문제 하는 것이구나 하고 느끼게 될 것입니다.

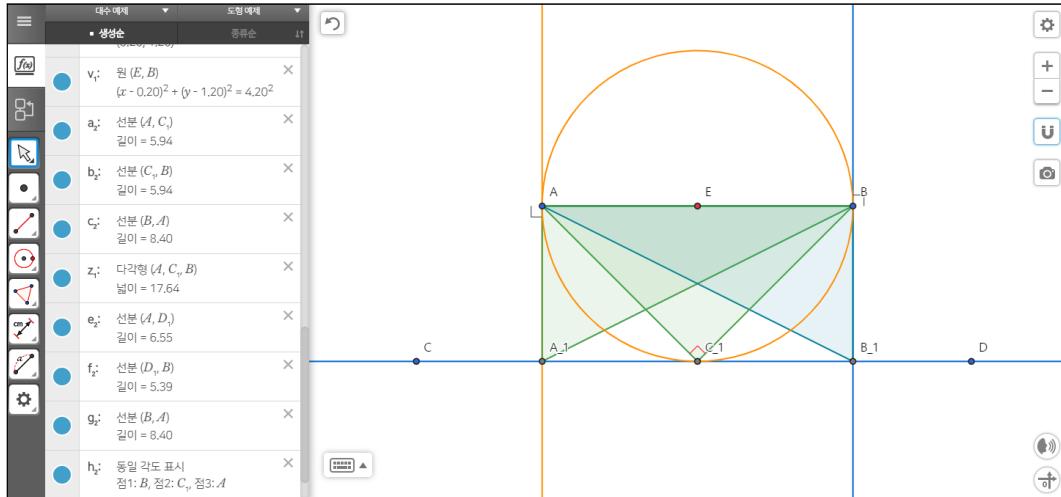
사실 조금 전에 비슷한 활동을 했습니다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점을 이동하여 원이 직선과 두 점에서 만나도록 했습니다. 이것이 알지오매스와 같은 공학도구를 활용했을 때의 장점입니다. 선분의 양 끝의 점을 이동하면 선분과 직선의 초기 위치 조건이 바뀝니다. 그런데 신기하게도 이와 연동되어서 그렸던 원과 수선이 같이 바뀌면서 동시에 직선과의 교점도 바뀝니다. 초기조건을 마음대로 바꾸고 연동되어 만들어진 도형들도 동시에 조건에 맞게 바뀐다는 점입니다.

그럼 다시 문제로 돌아가 봅시다. 직각삼각형을 작도하는 활동을 하면서 한 가지 의문이 들었습니다.

4개의 직각삼각형을 만들었는데 선분의 위치에 따라 만들어지는 직각삼각형의 개수가 생기는 경우가 몇 가지나 될까?

이 질문은 계속 공학도구를 활용하면서 점점 의문에 의문을 추가하면서 질문이 바뀌게 될 것입니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)



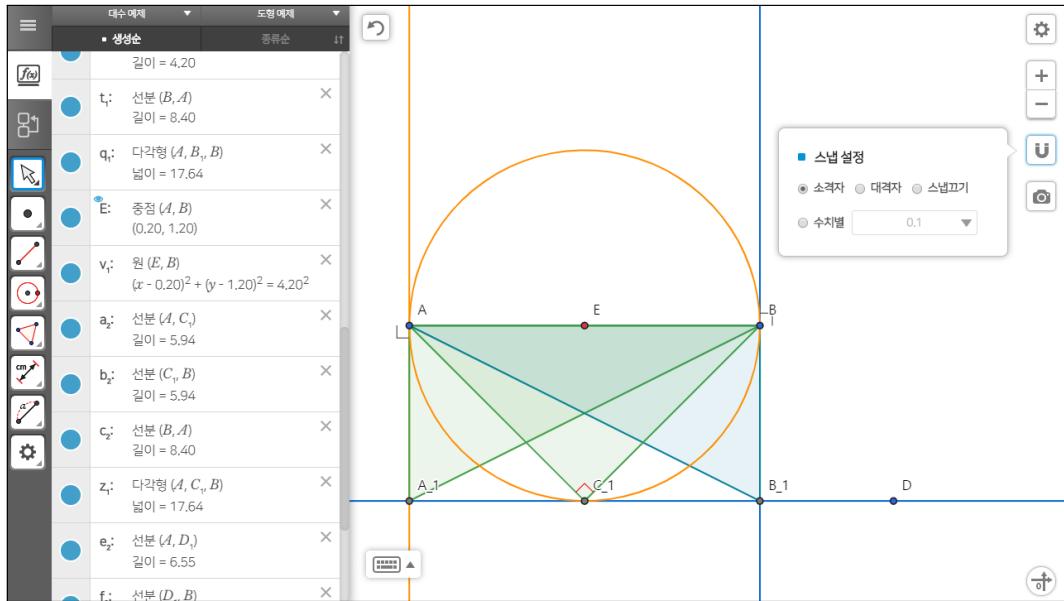
*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0005

AlgeoMath : <http://me2.do/Gym9TKmy>

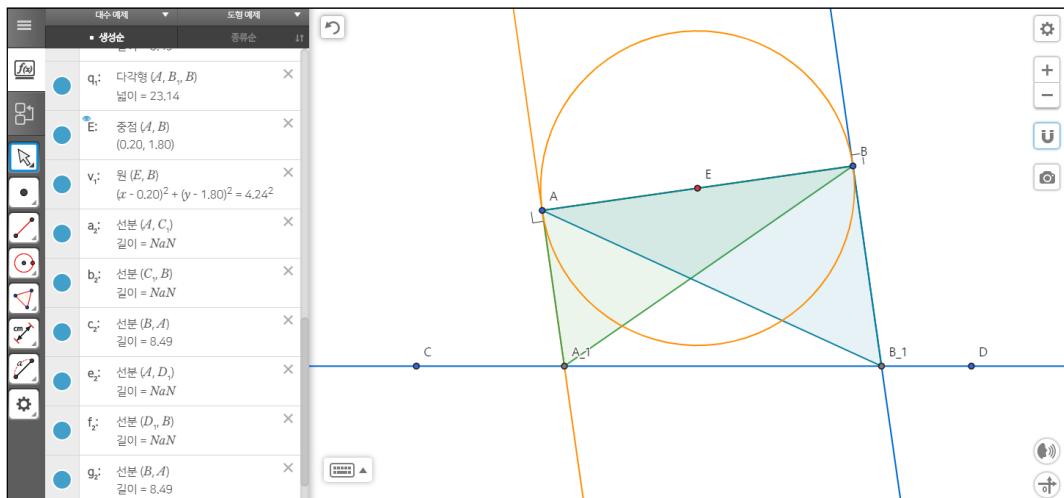
YouTube : <https://youtu.be/fcUAK030AAy>

직각삼각형이 3개가 생기는 경우를 생각해 봅시다. 다음과 같은 방식으로 만들어 보겠습니다. ‘선택’ 도구를 활용하여 선분의 양 끝 점을 움직여서 선분의 길이의 반만큼 직선과 선분이 떨어지게 조절합니다. 약간의 시행착오를 할 것입니다. 방법은 여러 가지가 있겠지만, 일단 선분과 직선이 만나는 상태에서 평행하게 양 끝 점의 위치를 잡아주고 이 상태에서 한 끝 점을 직선과 평행을 유지하게 움직이면서 선분의 길이가 짧아지게 하면 어느 순한 원이 직선과 한 점에서 만나게 될 것입니다. 직선이 원에 접하면 이 접점으로 인하여 하나의 직각삼각형이 만들어지고 선분의 양 끝 점의 두 수선과 만나는 두 점으로 각각 한 개씩 총 두 개의 직각삼각형이 만들어지므로 직각삼각형이 정확히 3개가 만들어지는 선분과 직선의 위치를 잡을 수 있습니다.

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기



‘스냅설정’이 되어있으면 격자 단위로 움직이므로 위와 같은 위치 이동을 편하게 할 수 있을 것입니다. 때때로 ‘스냅설정’에서 ‘스냅끄기’를 하여 부드럽게 움직이도록 조절하면 사용하기 편할 수 있으므로 적절히 활용하기 바랍니다.



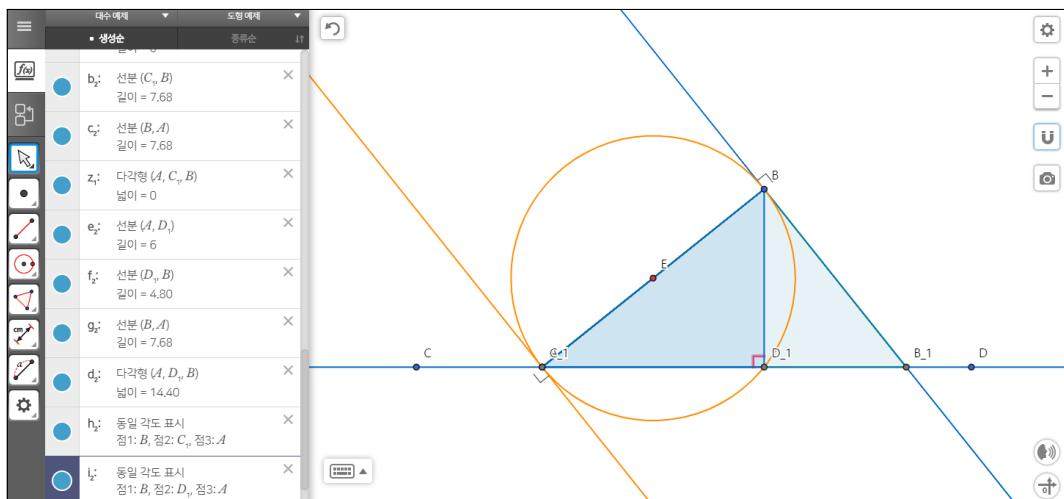
선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0006

AlgeoMath : <http://me2.do/FLM45GDK>

YouTube : <https://youtu.be/W7pkETY709E>

직각삼각형이 2개가 생기는 경우를 생각해 봅시다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점의 위치를 조절하여 원과 직선이 만나지 않게 조절하면 선분의 양 끝 점을 지나도록 만든 수선과 직선과의 교점으로 직각삼각형을 정확히 2개 만들 수 있습니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0007

AlgeoMath : <http://me2.do/GRMi2pSo>

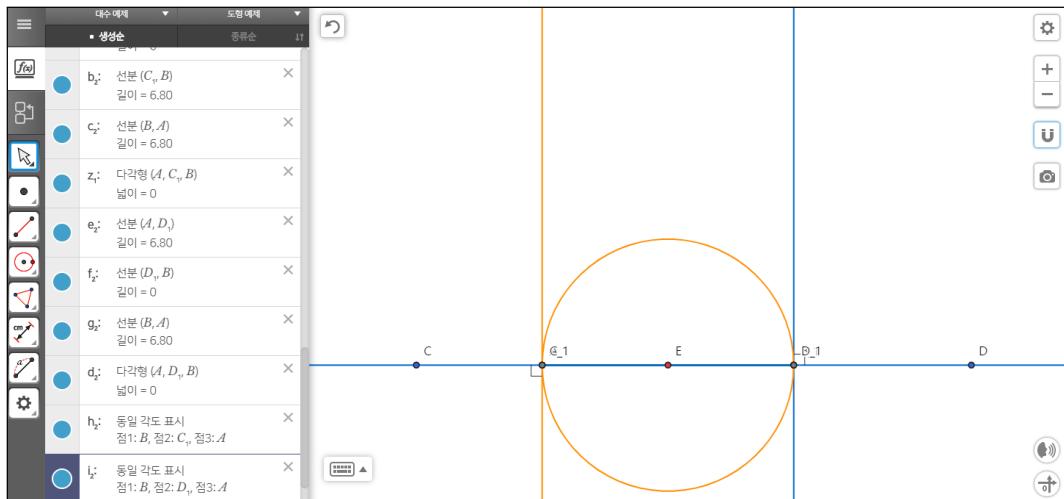
YouTube : <https://youtu.be/mbMp8et4lMA>

직각삼각형이 2개가 생기는 또 다른 경우가 있을까요? 다음과 같이 선분의 위치를 조절해 봅시다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 한 끝 점을 직선 위로 위치시켜 놓습니다. (직선과 만나는 점이 선분의 한 끝 점이 되도록 위치시켜놓습니다.) 그리고 다른 끝 점을 적절히 이동시켜서 만들어지는 직각삼각형이 화면상에 다 나타나도록 위치를 잡습니다. 선분의 한 끝 점을 지나는 수선과

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

직선의 교점이 한 끝 점이 되었습니다. 원과 직선이 만나는 점도 한 끝 점이 되었습니다. 이로 인하여 직각삼각형이 만들어질 가능한 경우 2가지가 사라져서 직각삼각형이 원과 만나는 다른 점과 선분의 다른 한 끝 점을 지나는 수선과의 교점으로 총 2개의 직각삼각형이 만들어지게 되었습니다.

1개의 경우를 생각해 보아야 하는데 나중에 생각하고, 우선 만들어지지 않는 경우를 생각해 봅시다.



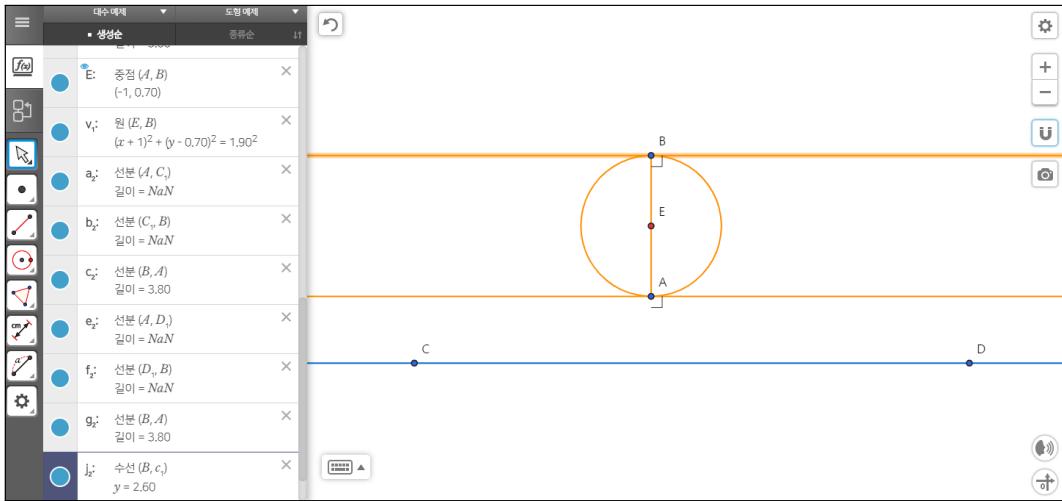
*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0008

AlgeoMath : <http://me2.do/xv7iw8ZL>

YouTube : https://youtu.be/kk0zc_tCoKo

만들어지지 않는 경우는 여러 가지가 있겠지만 다음과 같이 생각해 봅시다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점을 직선 위로 차례로 위치시켜서 선분이 직선의 일부분이 되도록 합니다. 교점들과 선분의 양 끝 점이 한 직선상에 위치하여 당연히 삼각형이 만들어지지 않습니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0009

AlgeoMath : <http://me2.do/G0jIw5Ss>

YouTube : <https://youtu.be/ekVTM2JawZI>

만들어지지 않는 다른 위치 관계가 있는지 생각해 봅시다. 수선과 직선이 만나지 않고 또한 원과 직선이 만나지 않도록 선분을 위치시키겠습니다. 그런데 문제가 생겼습니다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점을 이동하려는데 움직이지 않습니다. 자세히 보니 교점이 선분의 끝점 위에 있어 교점이 선택되기 때문에 움직이지 않는 것입니다. 교점을 선택하고 삭제하지 말고 숨기기를 하기 바랍니다. 수선과의 교점 원과의 교점을 각각 숨겨야 선분의 끝점을 선택할 수 있을 것입니다. 그러면 원과 직선이 만나지 않게 위치시키고 다시 선분의 한 끝 점을 원과 직선이 만나지 않도록 이동하면서 직선과 수선이 만나지 않으면서 수직의 위치에 있게 되었습니다. 그런데 수선하나가 사라졌습니다. 갑자기 이상한 경우가 생겼다고 여기실지 모르겠습니다. 저도 처음에는 왜 이런 일이 발생했지 하고 의문을 가졌었습니다. 그런데 조금 고민해 보니 당연한 결과였습니다. 먼저 작도 했던 수선과의 교점으로 만든 직각삼각형이 있었습니다. 그런데 이 직각삼각형을 이루는 한 변이 선분 위에 있게 되어 다시

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

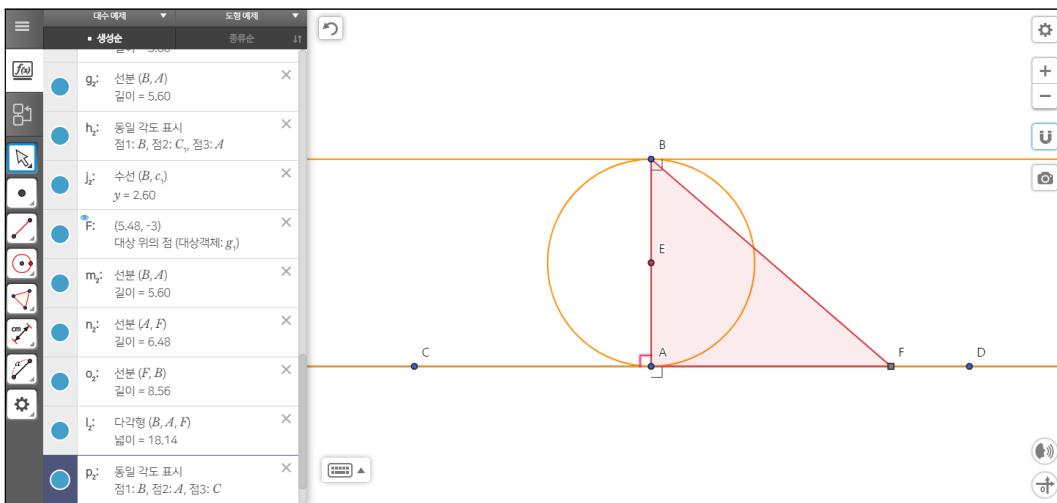
수선을 작도할 때는 겉보기에는 선분의 수선이라 보이겠지만, 사실은 삼각형의 한 변에 대한 수선이었던 것입니다. 그래서 먼저 작도했던 수선이 직선과 평행이 되면서 교점이 사라지고 교점이 사라지면서 삼각형도 사라져서 여기에 종속되어 있는 수선도 사라지게 된 것입니다. 즉, 공학도구에 오류가 있는 것 이 아니라 정확하게 작도했던 대상에 대하여 표현을 해준 것입니다. 이런 비슷한 일은 자주 있습니다. 이러한 것은 대수창에 표현된 개체의 설명을 보시면 이유를 찾을 수 있습니다. 어쨌든 다시 ‘수선’ 도구를 활용하여 사라진 수선을 작도해줍니다. 그래서 총 2가지의 직각삼각형이 생기지 않는 위치 관계를 찾았습니다.

다시 건너뛰었던 직각삼각형이 1개가 생기는지 고민해 봅시다. 그럼 과연 직각삼각형이 1개가 생기는 경우가 있을까요? 결론은 생기지 않습니다. 이유는 다음과 같습니다. 만약 원과 접하는 경우로 하나의 직각삼각형이 생긴다면, 자동으로 선분의 양 끝 점을 각각 지나는 2개의 수선으로 추가로 2개의 직각삼각형이 생기게 됩니다. 즉, 원과 접하지 않을 때 가능성이 있어 보입니다. 원과 두 점에서 만날 때에는 하나의 원과의 교점에 의해서는 직각삼각형이 만들어지지 말아야 하므로 선 위에 선분의 끝 점이 위치하여 삼각형이 만들어질 가능성이 있어 보이지만, 이 경우도 원이 다른 한 점에서 만나기 때문에 선분과 직선은 평행하지 않아서 수선으로 만들어지는 교점으로 직각삼각형이 만들어지게 됩니다. 결국, 원과 직선이 2개의 점에서 만나는 때는 직각삼각형 1개만 만들어지는 않습니다. 마지막으로 원과 직선이 만나지 않을 때는 2개의 수선으로 2개의 교점이 있거나 2개의 수선이 직선과 평행하여 교점이 없으므로 결국 1개의 직각삼각형이 만들어지는 선분과 직선의 위치는 없습니다.

사실 위의 논리를 펼 수 있었던 이유는 0개, 2개, 3개, 4개가 생기는 각각에 대하여 생각해 보았기에 설명을 할 수 있었습니다. 자 이제 선분과 직선의 위치에 따라 직각삼각형이 생기는 개수의 경우를 완벽히 해결했습니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

앗, 뭔가를 발견했습니다. 바로 직각삼각형이 무수히 많이 생기는 경우도 있습니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형 작도 0010

AlgeoMath : <http://me2.do/5IxdHROB>

YouTube : <https://youtu.be/JJJR09gKVBQ>

수선이 직선과 일치시키는 위치가 되면 교점이 무수히 많아집니다. 직각삼각형이 생기는 개수의 cardinality는 \mathbb{R} 의 cardinality와 같죠. 자 그럼 만들어 봅시다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 한 끝 점을 직선 위에 위치시킵니다. 다른 한 끝 점을 적절히 위치시켜서 선분과 직선이 수직이 되게 합니다. ‘점’ 도구를 선택한 상태에서 직선 위에 한 점을 찍습니다. ‘다각형’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점과 새로 찍은 직선 위의 점으로 직각삼각형을 작도합니다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 새로 찍은 점을 직선을 따라 움직여보기 바랍니다. 새로 찍은 점의 위치에 따라 새로운 직각삼각형이 작도된다고 보시면 됩니다. 즉 선분과 직선이 이 위치에 있는 경우는 무수히 많은 직각삼각형을 만들 수 있습니다.

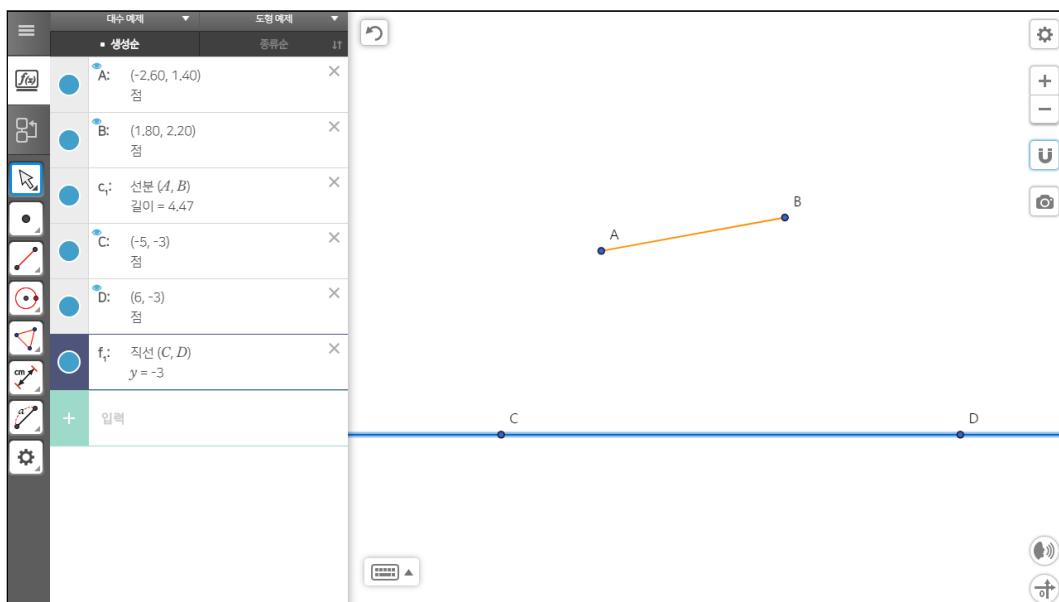
제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

사실 이런 공학도구를 활용하여 기하 대상을 움직여보며 살펴보기 전까지 최대 4개의 직각삼각형을 만들 수 있겠다고 생각했었는데, 약간의 시행착오를 하며 선분과 직선을 움직여보는 조작 활동을 통하여 무수히 많은 직각삼각형이 만들어지는 것을 발견했습니다. 한편으론 이런 활동이 수학에서의 실험이 될 수 있겠습니다.

관점의 차이는 있을 수 있겠지만, 제기한 기하 문제를 다 해결했습니다. 해결한 문제를 정리하다가 갑자기 또 다른 생각이 머리를 스쳤습니다. 문제를 다음과 같이 조금 변형하겠습니다.

주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형을 작도하여라.

직각삼각형을 이등변삼각형으로 바꾸었을 뿐인데 재미있는 작도 문제가 되었습니다. 한번 고민해서 풀어봅시다.



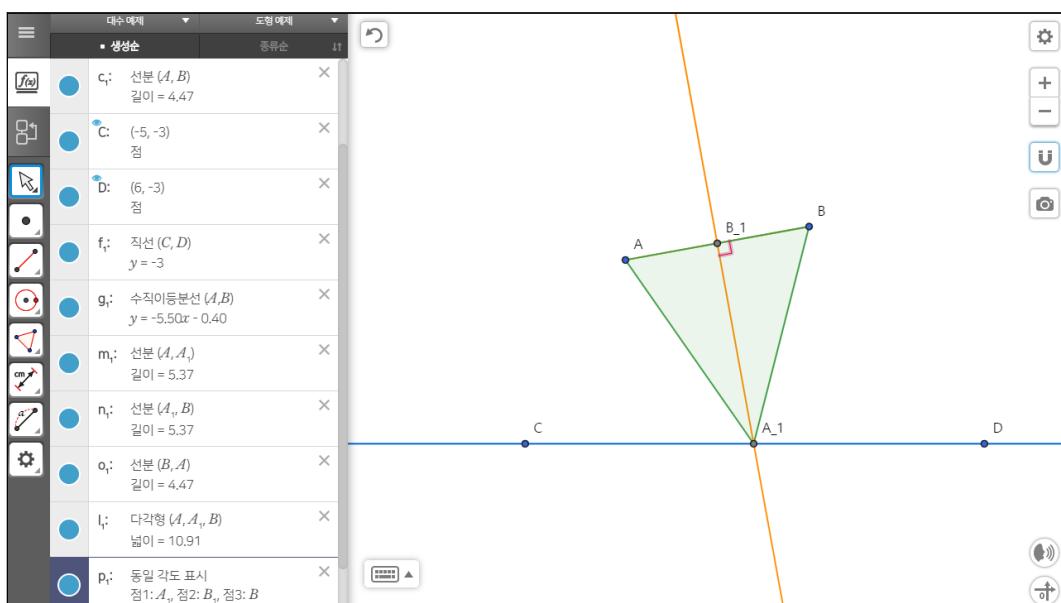
선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0001

AlgeoMath : <http://me2.do/xQApN1vT>

YouTube : <https://youtu.be/W9ZZZYiVjaE>

문제 상황에 맞는 선분과 직선을 작도하겠습니다. ‘선분’ 도구를 활용하여 선분을 작도합니다. ‘직선’ 도구를 활용하여 직선을 작도합니다. ‘그리드 보기 설정’을 해제하여 좌표평면의 눈금과 좌표축을 보이지 않게 합니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0002

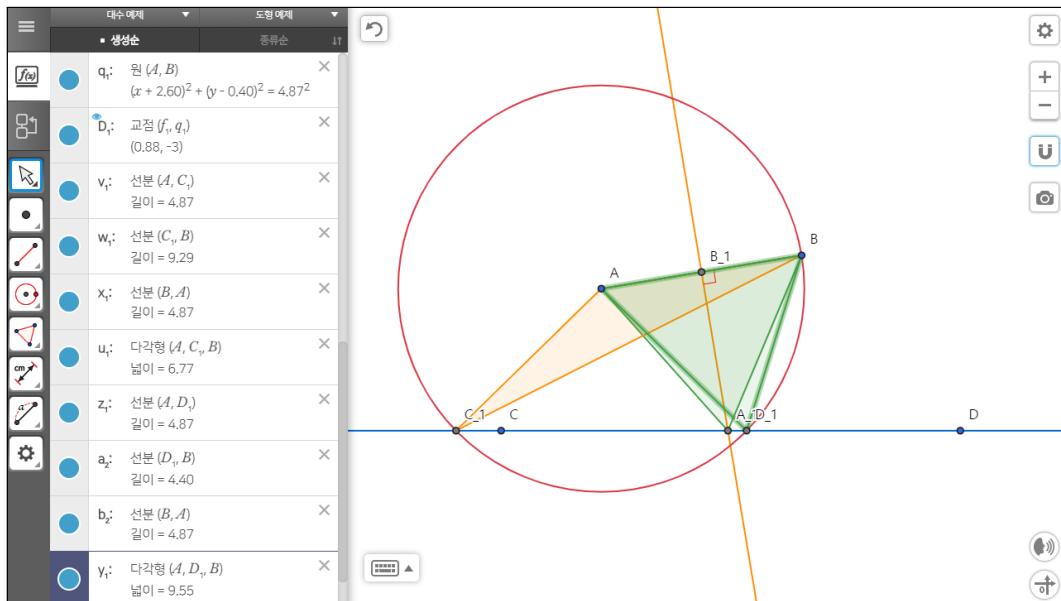
AlgeoMath : <http://me2.do/xXf1XYC9>

YouTube : <https://youtu.be/s4YCHVvMitQ>

선분이 이등변삼각형의 밑변인 삼각형을 만들어 보겠습니다. ‘수직이등분선’ 도구를 사용하여 선분의 양 끝 점을 차례로 선택하여 선분의 수직이등분선을 작도합니다. ‘교점’ 도구를 사용하여 직선을 선택하고 수직이등분선을 선택하여 직선과 수직이등분선의 교점을 작도합니다. 이 상태에서 선분과 수직이등분선을 선택하여 선분과 수직이등분선의 교점을 작도합니다. ‘다각형’ 도구를 사용

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

하여 선분의 양 끝 점과 수직이등분선과 직선의 교점을 차례로 선택하여 삼각형을 작도합니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0003

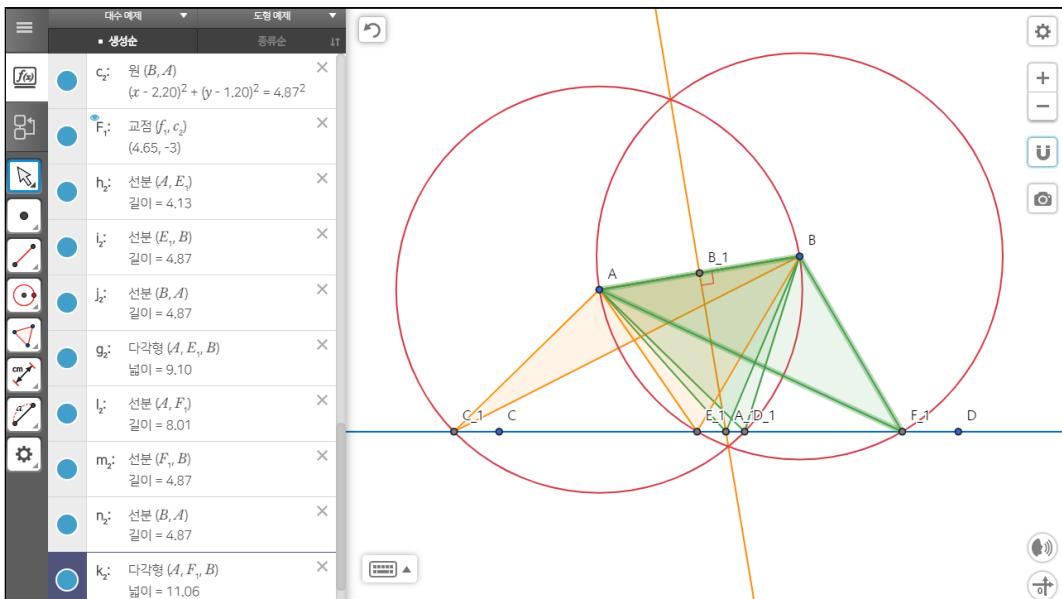
AlgeoMath : <http://me2.do/xItzc0gP>

YouTube : https://youtu.be/wcRKYn0n_9M

이번에는 선분의 한 끝 점이 이등변삼각형의 꼭짓점이 되는 삼각형을 작도해 보겠습니다. 원의 정의를 활용하면 선분의 한 끝 점에서 선분의 길이와 같은 거리에 있는 직선 위의 점을 작도할 수 있습니다. 즉, 선분이 반지름이 되고 중심이 선분의 한 끝 점이 되는 원과 직선과의 교점이 바로 원하는 점이 될 것입니다. 다음과 같이 작도해 봅시다. ‘원:중심과 한 점’ 도구를 선택한 상태에서 중심이 될 선분의 한 끝 점과 선분의 다른 한 끝 점을 선택하여 선분이 반지름이 되도록 원을 작도합니다. 선분 위치에 따라서 원과 직선의 만나지 않아 교점이 만들어지지 않는 경우가 있습니다. 이런 경우에 ‘선택’ 도구를 선택하거나 ‘Esc’ 키를 눌러 ‘선택’ 도구가 선택된 상태에서 선분의 양쪽 끝점을 적당히

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

조절하여 원과 직선이 두 점에서 만나도록 조절합니다. ‘교점’ 도구를 선택한 상태에서 원을 선택하고 직선을 선택하여 두 교점을 작도합니다. 선분의 양 끝 점과 원과 직선이 만나는 두 교점 중 하나를 선택하여 삼각형 하나를 작도합니다. 나머지 교점으로 또 하나의 삼각형을 작도합니다. ‘꾸미기:각도’ 도구를 선택한 상태에서 방금 작도된 삼각형의 선분의 한 끝 점을 선택하고 원과 직선의 교점, 선분의 다른 한 끝 점을 선택하여 각을 표시합니다. 각은 시계 반대 방향으로 점을 선택하여야 원하는 각이 표시됩니다. 직각인 경우에는 자동으로 직각으로 표시됩니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0004

AlgeoMath : <http://me2.do/59bBTSL7>

YouTube : https://youtu.be/2RASQdZ_wEg

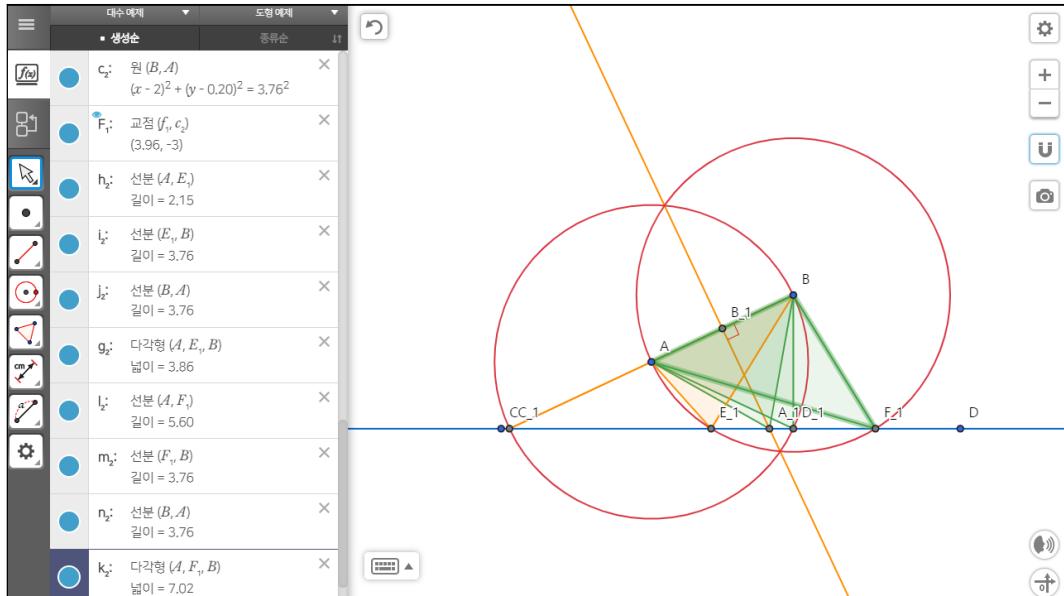
같은 방식으로 선분의 다른 한 끝 점을 원의 중심으로 하고 나머지 한 끝 점을 지나는 원을 작도하고 이 원과 직선의 교점을 작도한 후 이등변삼각형을 작도합니다.

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

앞의 직각삼각형에서처럼 다음 질문을 생각할 수 있습니다.

5개의 이등변삼각형을 만들었는데 선분의 위치에 따라 만들어지는 직각삼각형의 개수가 생기는 경우가 몇 가지나 될까?

지금부터 공학도구를 사용하여 동적으로 기하 대상을 움직이며 탐구해 보도록 하겠습니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0005

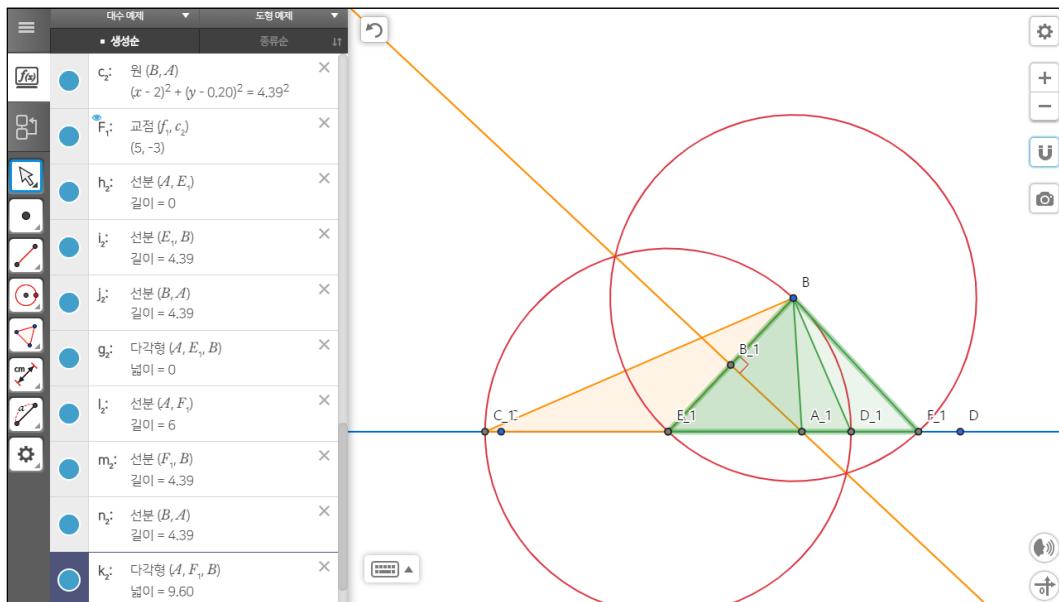
AlgeoMath : <http://me2.do/Ght0zCa6>

YouTube : <https://youtu.be/Mw2D2BLCk0o>

이등변삼각형이 4개가 생기는 경우를 생각해 봅시다. ‘선택’ 도구를 활용하여 선분의 양 끝 점을 움직여서 한 원과의 직선의 교점이 선분의 연장선 위에 있도록 조절합니다. 약간의 시행착오를 할 것입니다. 방법은 여러 가지가 있겠지만, 양 끝 점의 위치를 조금씩 조절하면 선분의 한 끝 점이 꼭짓점이 되는 이등

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

변삼각형을 이룬 세 점이 한 직선 위에 있게 되어 이등변삼각형이 만들어지지 않게 됩니다. 다른 한 끝 점이 꼭짓점이 되는 두 개의 이등변삼각형과 선분이 밑변이 되는 한 개의 이등변삼각형을 생각하면 정확히 4개의 이등변삼각형이 만들어지는 선분과 직선의 위치를 잡을 수 있습니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0006

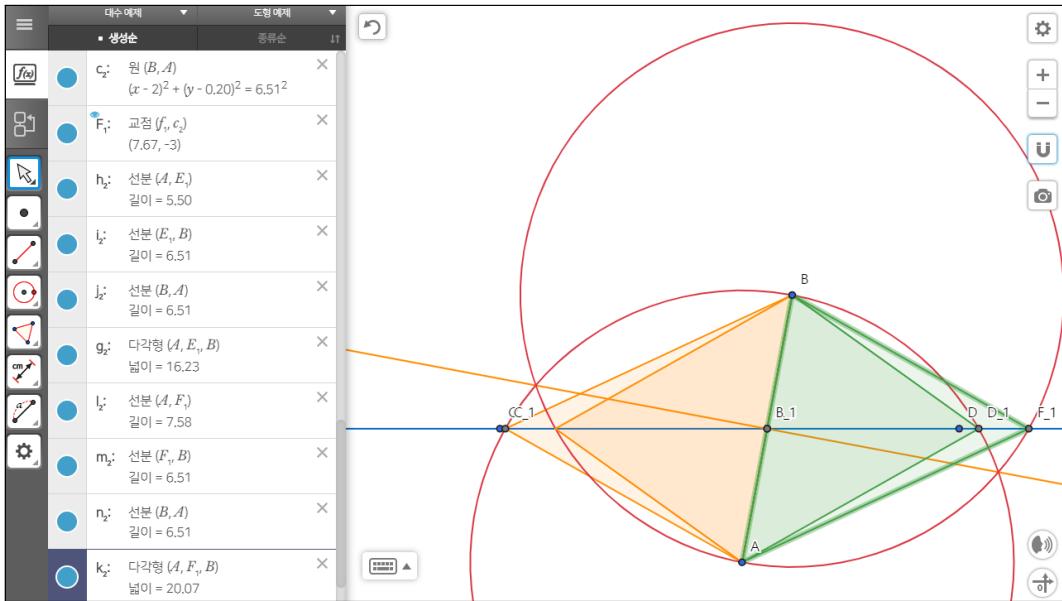
AlgeoMath : <http://me2.do/FTSybcbe>

YouTube : <https://youtu.be/VSZEDqFlfDI>

이등변삼각형 4개가 생기는 선분과 직선의 또 다른 위치 관계도 있습니다. 선분의 한 끝 점을 직선 위에 위치시키고 선분의 다른 한 끝 점을 직선 위에 있지 않게 하면 직선 위에 있지 않은 점을 중심으로 하는 원의 교점이 선분의 한 끝 점과 일치하게 되어 이등변삼각형이 생기지 않게 됩니다. 선분이 밑변이 될 때 1개, 그리고 직선 위에 있는 선분의 한 끝 점을 꼭짓점으로 하는 경우 2개, 정확히 이등변삼각형 4개가 만들어지는 선분과 직선의 위치를 잡을 수 있습니다. 위의 4개가 만들어지는 위치 관계는 선분의 한 끝 점이 직선 위에 있는지로

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

구별할 수 있겠습니다. 즉, 같은 개수의 이등변삼각형이 생기는 선분과 직선의 여러 위치 관계를 생각할 수 있습니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0007

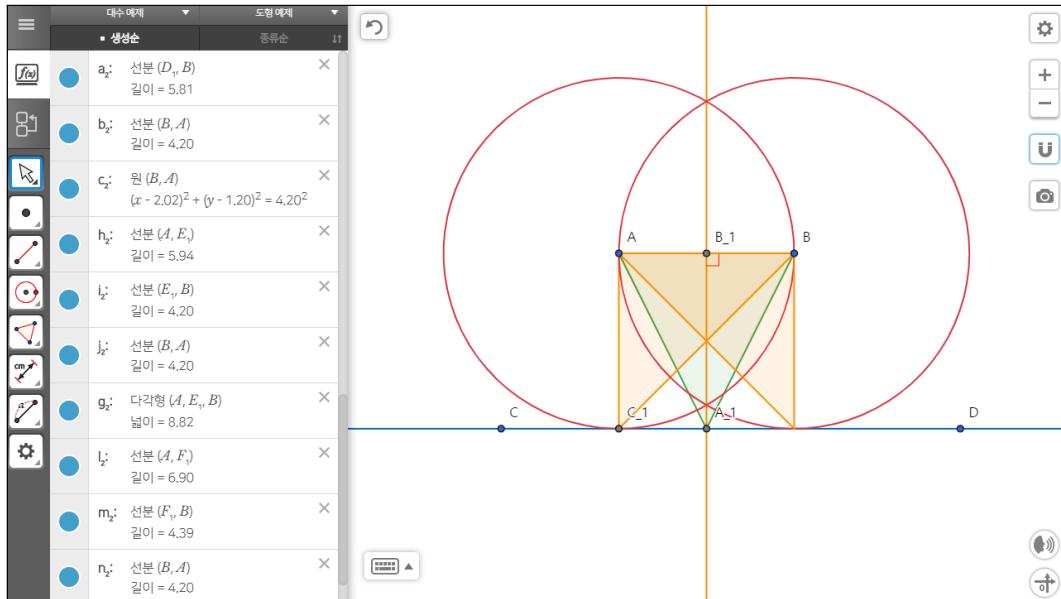
AlgeoMath : <http://me2.do/xP04WgIu>

YouTube : <https://youtu.be/PIAnrUWicCQ>

이등변삼각형 4개가 생기는 선분과 직선의 또 다른 위치 관계가 더 있습니다. 이번에는 선분의 중점이 직선 위에 있게 위치시키면서 선분과 직선이 수직이 되지 않도록 조절하면 수선의 교점이 선분 위에 위치하게 되어 이등변삼각형 1개가 만들어지지 않게 할 수 있습니다. 그런데 직각삼각형에 대해서 작도할 때처럼 문제가 생겼습니다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점을 이동하려는데 움직이지 않습니다. 자세히 보니 교점이 선분의 한 끝 점 위에 있어 교점이 선택되기 때문에 움직이지 않는 것입니다. 교점을 선택하고 삭제하지 말고 숨기기를 하기 바랍니다. 이렇게 이동을 하면 꼭짓점이 선분의 양

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

끝 점인 이등변삼각형 4개를 만들 수 있어서 정확히 이등변삼각형이 4개가 만 들어집니다.



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0008

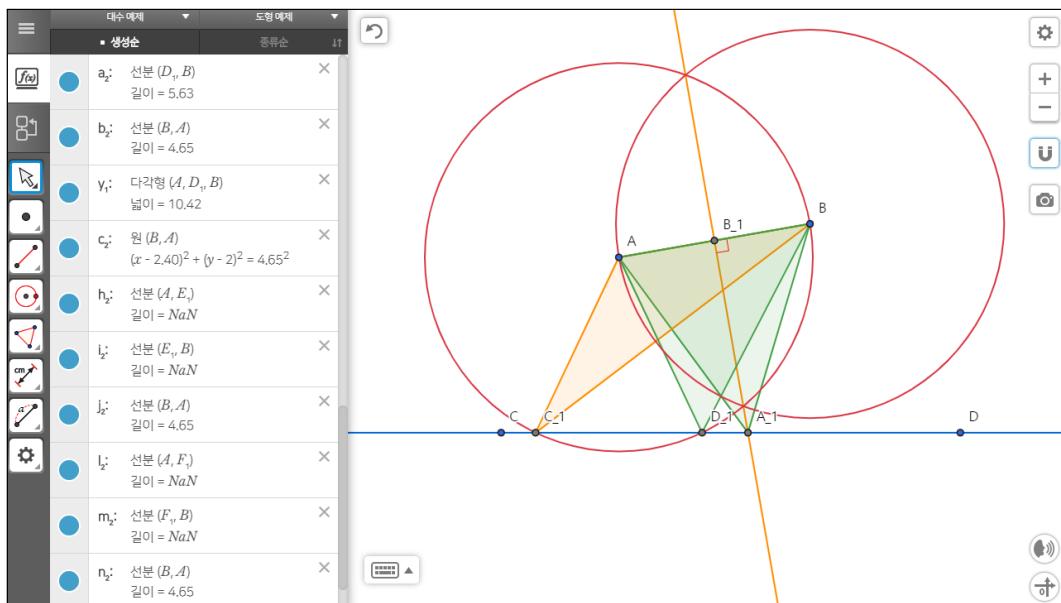
AlgeoMath : <http://me2.do/FH8ihNFu>

YouTube : <https://youtu.be/KEFS27t4IzQ>

이등변삼각형이 3개가 생기는 위치 관계를 생각해 봅시다. 다음과 같은 방식으로 만들어 보겠습니다. ‘선택’ 도구를 활용하여 선분의 양 끝 점을 움직여서 선분의 길이의 반만큼 직선과 선분이 떨어지게 조절합니다. 약간의 시행착오를 할 것입니다. 방법은 여러 가지가 있겠지만, 일단 선분과 직선이 만나는 상태에서 평행하게 양 끝 점의 위치를 잡아주고 이 상태에서 한 끝 점을 직선과 평행을 유지하게 움직이면서 선분의 길이가 짧아지게 하면 어느 순한 원이 직선과 한 점에서 만나게 될 것입니다. 직선이 두 원과 각각 접하면 이 접점으로 이등변삼각형 2개를 만들고 수선과 만나는 한 점으로 이등변삼각형 1개를 만

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

들어서 이등변삼각형 3개가 정확히 만들어지는 선분과 직선의 위치를 잡을 수 있습니다.



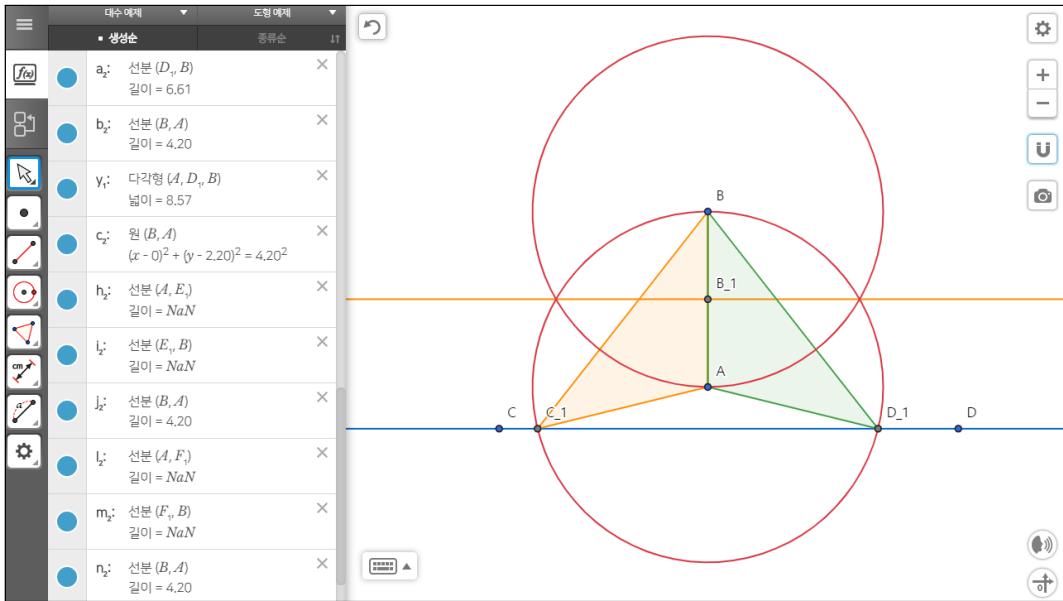
*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0009

AlgeoMath : <http://me2.do/FUAZ7Wn6>

YouTube : <https://youtu.be/Swv7Rgx0EEA>

이등변삼각형이 3개를 만들 수 있는 다른 위치 관계를 생각해 봅시다. 선분의 한 끝 점을 이동하여 한 원만 직선과 만나지 않게 하면 이 점을 꼭짓점으로 하는 이등변삼각형은 작도할 수 없으므로 이등변삼각형을 3개를 만들 수 있게 됩니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)



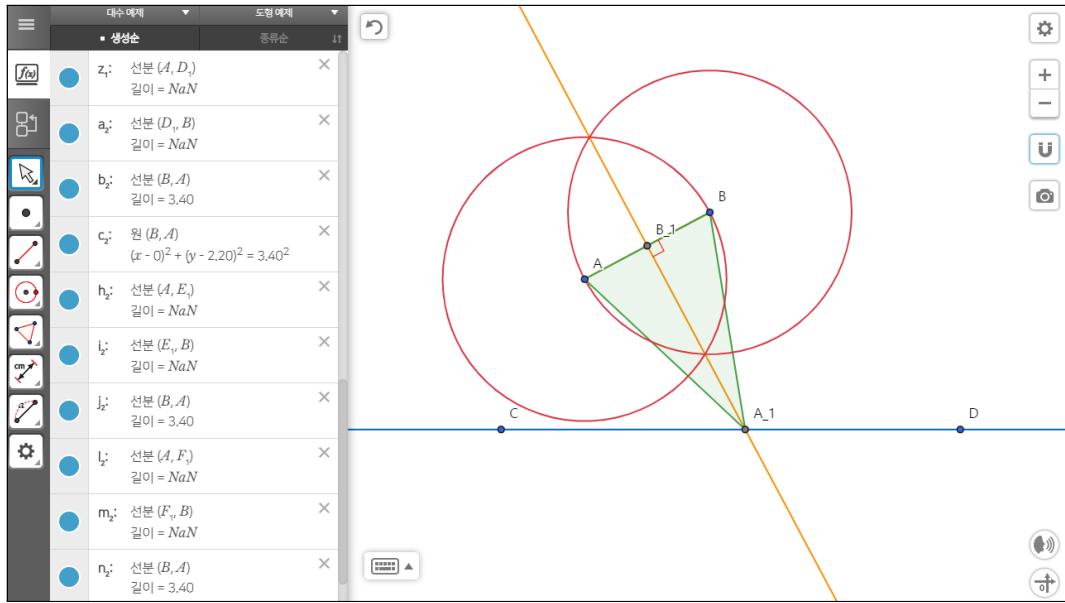
*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0010

AlgeoMath : <http://me2.do/FLM4mCG9>

YouTube : <https://youtu.be/YJCvHy1trF8>

이등변삼각형 2개를 만들 수 있는 위치 관계를 생각해 봅시다. 수선과 직선이 만나지 않고 또한 한 원만 직선과 만나지 않도록 하고 다른 원은 직선과 교점이 2개가 생기도록 선분을 위치시키겠습니다. 이렇게 하면 교점 2개로 이등변삼각형 2개가 정확히 만들어집니다.

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기



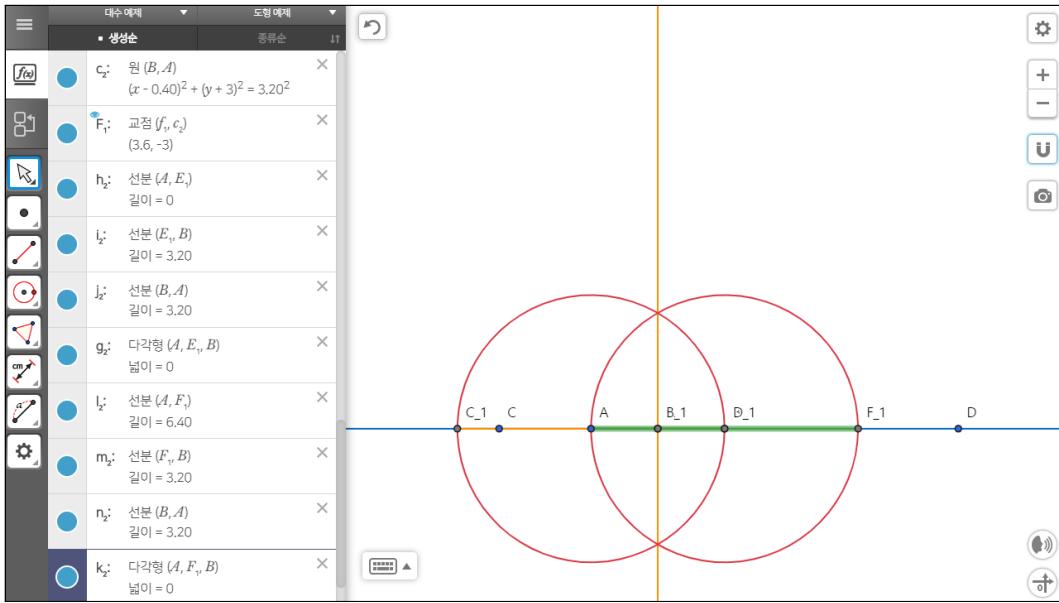
*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0011

AlgeoMath : <http://me2.do/xLZxwRU0>

YouTube : https://youtu.be/752vtm_Qt-c

이등변삼각형을 1개를 만들 수 있는 위치 관계를 생각해 봅시다. 원 2개가 직선과 만나지 않게 하고 수선만 직선과 만나게 하면 수선과 직선의 교점으로 이등변삼각형 1개가 정확히 작도됩니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)



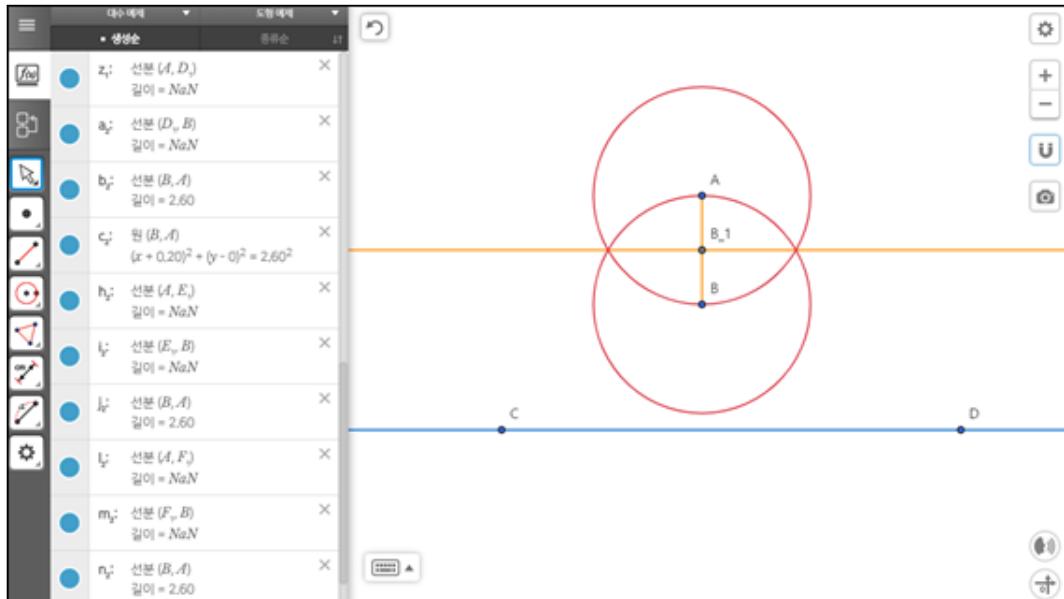
*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0012

AlgeoMath : <http://me2.do/5Eh0jf4Z>

YouTube : <https://youtu.be/fBJIw0R7Iqg>

이등변삼각형이 만들어지지 않는 위치 관계가 여러 가지가 있겠지만 다음 위치 관계를 생각해 봅시다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점을 직선 위로 차례로 위치시켜서 선분이 직선에 포함 되도록 합니다. 교점들과 선분의 양 끝 점이 한 직선 위에 위치하기 때문에 삼각형이 만들어지지 않습니다.

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0013

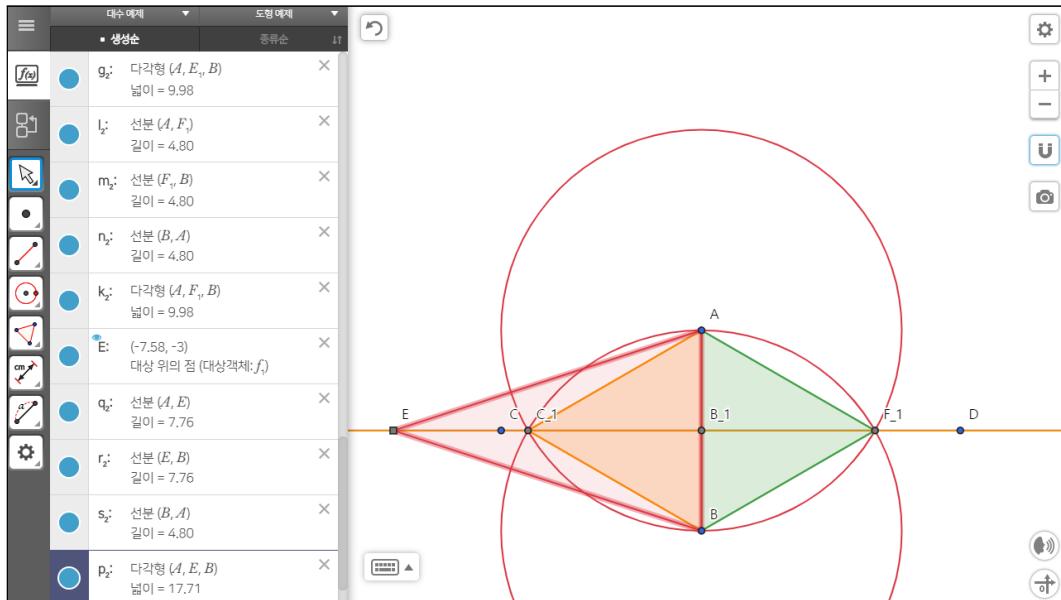
AlgeoMath : <http://me2.do/FLM4mBTQ>

YouTube : <https://youtu.be/JaYhy0P8xuQ>

이등변삼각형이 만들어지지 않는 다른 위치 관계를 생각해 봅시다. 수선과 직선이 만나지 않고 또한 원과 직선이 만나지 않도록 선분을 위치시키겠습니다. 선분의 한 끝 점이 움직이지 않는 경우가 또 발생했습니다. 이제는 당황하지 않고 교점을 숨기기 하시고 옮기실 수 있을 것입니다. 원 2개와 수선이 직선과 만나지 않으므로 이등변삼각형이 작도되지 않습니다.

이등변삼각형에서 선분과 직선의 위치 관계는 직각삼각형에서의 선분과 직선의 위치 관계보다는 쉬웠죠. 직각삼각형 1개만 생기는 경우가 없다라는 부분을 증명을 해야 했기 때문에 좀 더 어려웠을 것입니다. 아차 한 가지 선분과 직선의 위치 관계를 빼먹었네요. 아마도 눈치채셨겠지만, 이등변삼각형에도 무수히 많이 생기는 위치 관계가 있습니다. 사실 위에서 비슷하게 선분을 위치시켜 이미 무엇인지 아셨을 수 있습니다.

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)



*주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형 작도 0014

AlgeoMath : <http://me2.do/xItz0Z1N>

YouTube : https://youtu.be/X2sGh7oe_cA

이등변삼각형이 무수히 많이 나오는 선분과 직선의 위치 관계를 생각해 봅시다. 수선이 직선과 일치시키는 위치가 되면 교점이 무수히 많아집니다. 이등변삼각형이 생기는 개수의 cardinality는 \mathbb{R} 의 cardinality와 같죠. 자 그럼 만들어 봅시다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점을 이동시켜서 중점이 직선 위에 있고 선분과 직선이 수직이 되도록 합니다. ‘점’ 도구를 선택한 상태에서 직선 위에 한 점을 찍습니다. ‘다각형’ 도구를 선택한 상태에서 선분의 양 끝 점과 새로 찍은 직선상의 점으로 직각삼각형을 작도합니다. ‘선택’ 도구를 선택한 상태에서 새로 찍은 점을 직선을 따라 움직여보기 바랍니다. 새로 찍은 점의 위치에 따라 새로운 이등변삼각형이 작도된다고 보시면 됩니다. 즉 선분과 직선이 이 위치에 있는 경우는 무수히 많은 이등변삼각형을 만들 수 있습니다.

드디어 다 해결한 것 같습니다.

주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 직각삼각형을 작도하여라.

이 질문에 대하여 이렇게까지 생각할지 몰랐습니다.

주어진 선분과 주어진 직선 위의 한 점으로 이등변삼각형을 작도하여라.

직각삼각형을 이등변삼각형으로 바꾸어 비슷한 생각을 다시 한번 해보게 되리라고도 생각지 못했습니다. 공학도구의 활용으로 여러 가지 생각을 해 볼 수 있었습니다. 아마도 이 글을 끝까지 읽고 다른 무언가에 공학도구를 활용하고 싶은 마음을 가지게 되기를 바랍니다. 어쩌면 함께 생각한 질문들을 조금 바꿔서 작도 문제를 새로 만들 수도 있겠습니다.

이런 생각을 한 것은 2013년에 강원과학고에 발령받고 했던 첫 수업시간이었습니다. 학생들과 우연히 다른 해석기하 문제에 관하여 문제를 풀면서 했던 단순한 질문이었습니다. 다음 시간까지 고민해 보라고 하고 수업을 마쳤습니다. 이 문제에 대하여 곰곰이 생각해 보았습니다. 고민하다 보니 위와 같이 많은 것을 생각해야 했습니다. 다음 시간 학생들과 많은 것을 이야기하게 되었고 그러면서 조금씩 질문에 질문이 이어지면서 여러 생각을 하게 된 것입니다. 학생들은 많이 신기해했고 또한 학생들에게 수학 탐구의 한 면을 보여준 기회가 되었습니다. 그 과정을 이번에 교육부에서 개발한 AlgeoMath라는 공학도구를 활용하여 강의록을 만들게 된 것입니다. 이 예시는 공학도구의 어려운 기능을 사용하지도 않고도 또한 꾸미는 기능을 사용하지 않아도 수학 수업에서 많은 것을 할 수 있고 학생들의 지적 호기심을 자극할 수 있다는 것을 보여준 것입니다. AlgeoMath의 모든 기능을 다 알고 수업에 적용하려면 아마도 수업 전에 치쳐버릴 것입니다. 조금만 알아도 그것으로 수업을 진행할 수 있다면, 그것으

선분과 직선 위의 한 점을 가지고(AlgeoMath)

로 충분합니다. 그리고 조금씩 알아가면서 수업에 조금씩 더 활용하시면 될 듯 합니다. 그냥 하루에 자료 하나씩 만들어 본다고 생각하시면서 사용하다 보면 어느 순간 AlgeoMath와 같은 공학도구에 익숙해질 것입니다.

제 1 장 ALGEO MATH를 활용한 수업자료 만들기

[민은기 선생님의 수학자료실]

Homepage : <https://min7014.github.io>

Facebook Page : <https://www.facebook.com/mineungimath>

YouTube Channel : <https://goo.gl/JpzU5i>

edwith 수학자료실 강의실 수강신청 방법 : <https://goo.gl/TX9bxr>