



# ضرب کننده ها

دوباره میریم سراغ اعداد بی علامت.

طراحی واحد منطق و حساب

Arithmetic logic unit (ALU) design

© تمامی اطلاعات موجود در این سند متعلق به دانشگاه صنعتی امیرکبیر بوده و حقوق قانونی آن محفوظ است.



# جهت اطلاع! فارسی را پاس بداریم

نتیجه	عدد دوم B	عدد اول A	
جمع sum	جمع وند، افزوده، مضاف addend	مضاف الیه augend	$A + B$
تفریق difference	مفروق، کاسته subtrahend	مفروق منه، کاهش یاب minuend	$A - B$
ضرب product	مضروب فیه، بس شمر multiplier	مضروب، بس شمرده multiplicand	$A * B$
خارج قسمت quotient	مقسوم علیه، بخش یاب divisor	مقسوم، بخشی dividend	$A / B$



# عمل محاسباتی: ضرب

## نوع نمایش بی علامت

ضرب ۲ عدد  $n$ -بیتی،

- ضرب کننده شیف و جمع
- ضرب کننده جمع های متوالی
- ضرب کننده آرایه ای
- ضرب کننده بوث

همون کاری که ما در دهدهدی می کنیم.

تعداد دفعات به بی ربط داره و روش بیخودیه ولی ساده هست.

فقط برای مکمل ۲ ، میشه تغییراتی توش داد که برای بی علامت هم کار کنه.



# نبود سرریز در محاسبات ضرب (?)

چنانچه دو عدد بی علامت در فضای  $n$ -بیتی باشند، محدوده آنها بصورت زیر است،

$$0 \leq A < 2^n$$

$$0 \leq B < 2^n$$

$$\hookrightarrow 2^{n-1}$$

اگر طرفین نامساوی فوق را در هم ضرب کنیم، خواهیم داشت،

$$0 \leq A \times B < 2^{2n}$$

که بدین معنی است، نتیجه حاصل ضرب در فضای  $2n$  بیتی جای می گیرد و لذا در ظرف  $2n$ -بیتی سرریز نخواهیم داشت.



# ضرب کننده اعداد بی علامت



# عمل محاسباتی: ضرب

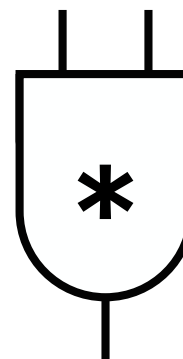
# نوع نمایش: بی علامت

◀  $n=1$  (ضرب دو عدد بی علامت تک بیتی)

○ جدول ضرب!

جدول ضرب اعداد دودویی

x	y	$p = x * y$ (ضرب ریاضی)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



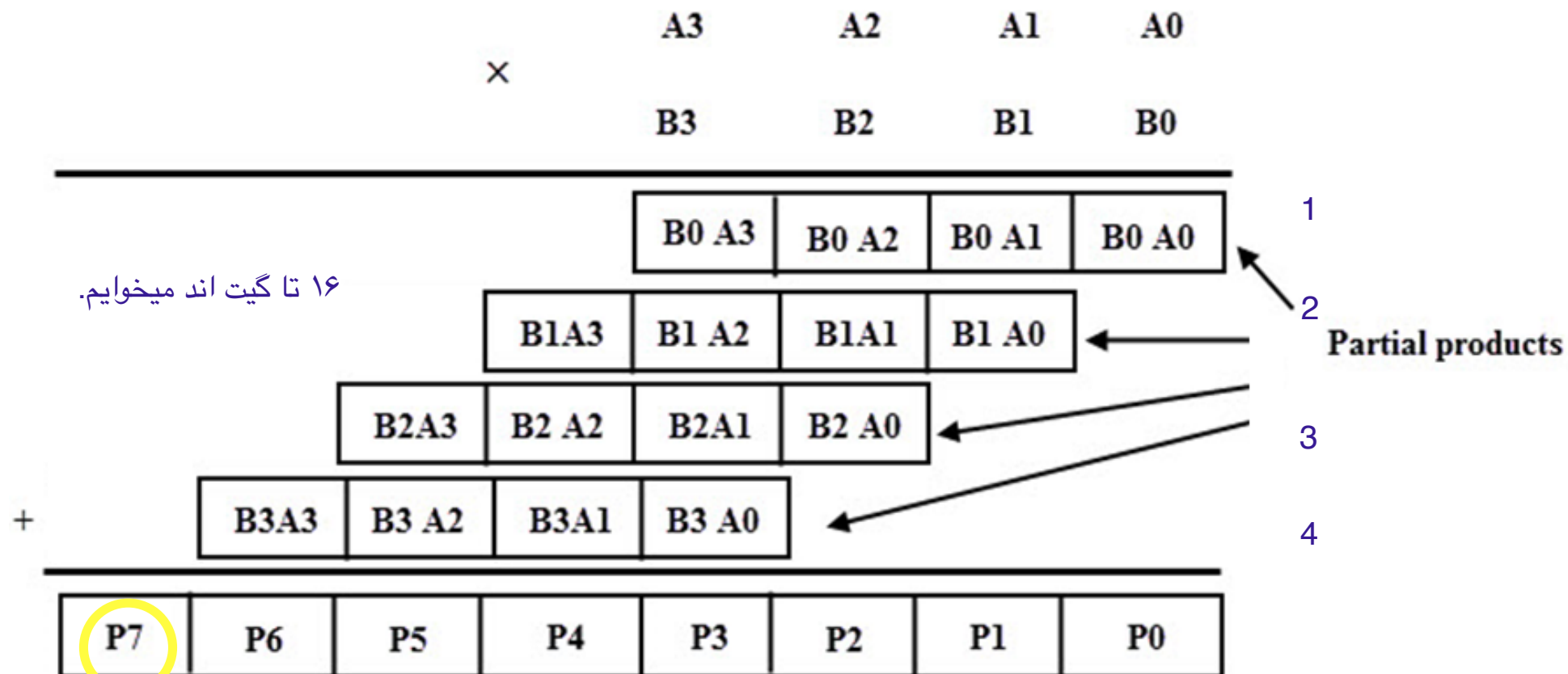
delay (product) = d  
Cost = 1 g



# ضرب کننده آرایه‌ای (Array multiplier)



# حاصل ضربهای میانی = Partial products

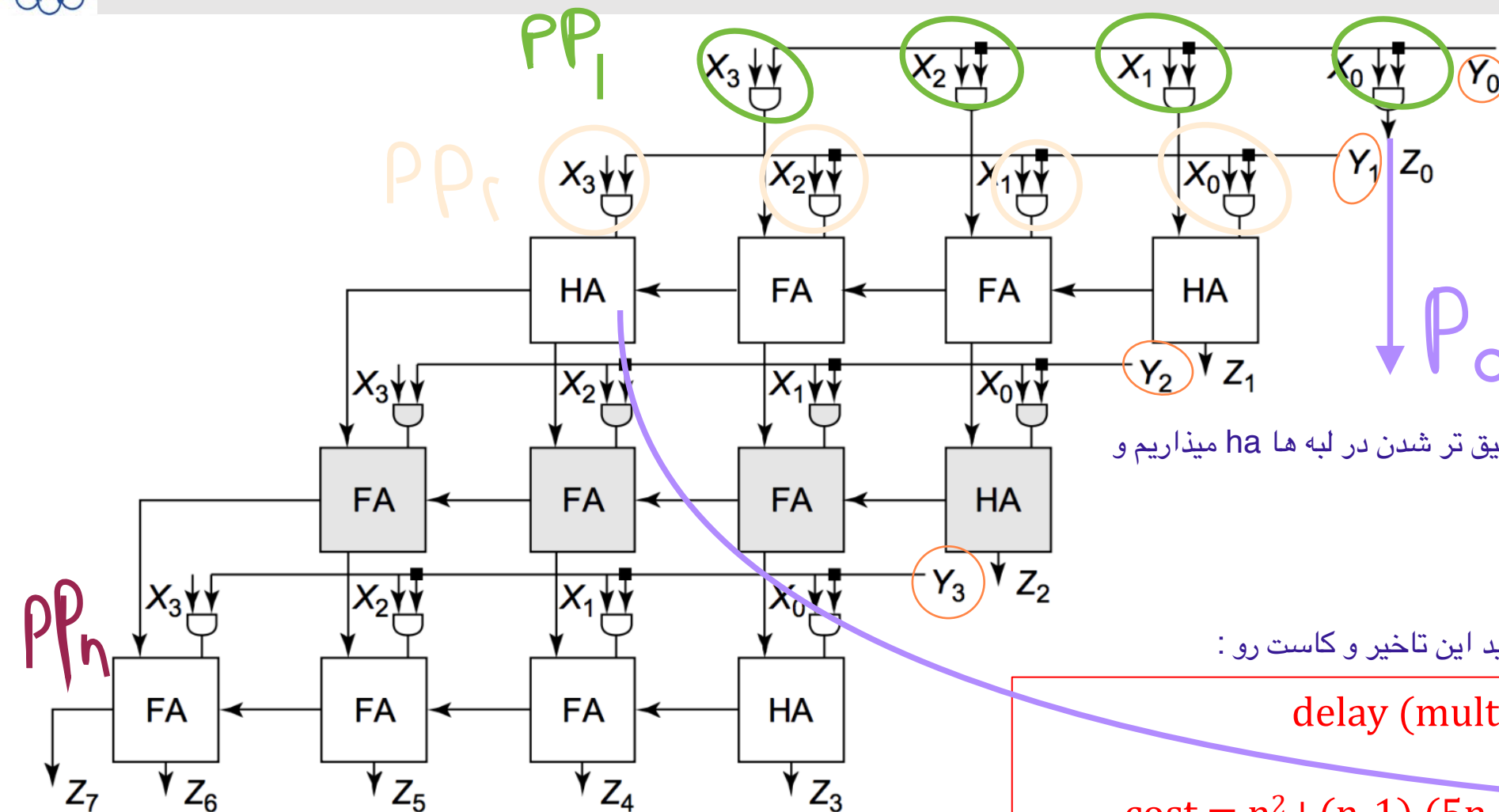


اینارو با ha و fa انجام میدیم که در آخر ممکنه کری هم تولید کنه.





# ضرب کننده آرایه‌ای (Array multiplier)



همرو fa بذارید کار می‌کنه ولی برای دقیق‌تر شدن در لبه‌ها ha می‌ذاریم و همینطور اولین ردیف آخریش آخر.

درستی یابی کنید این تاخیر و کاست رو :

$\text{delay (multiplier)} = ?$

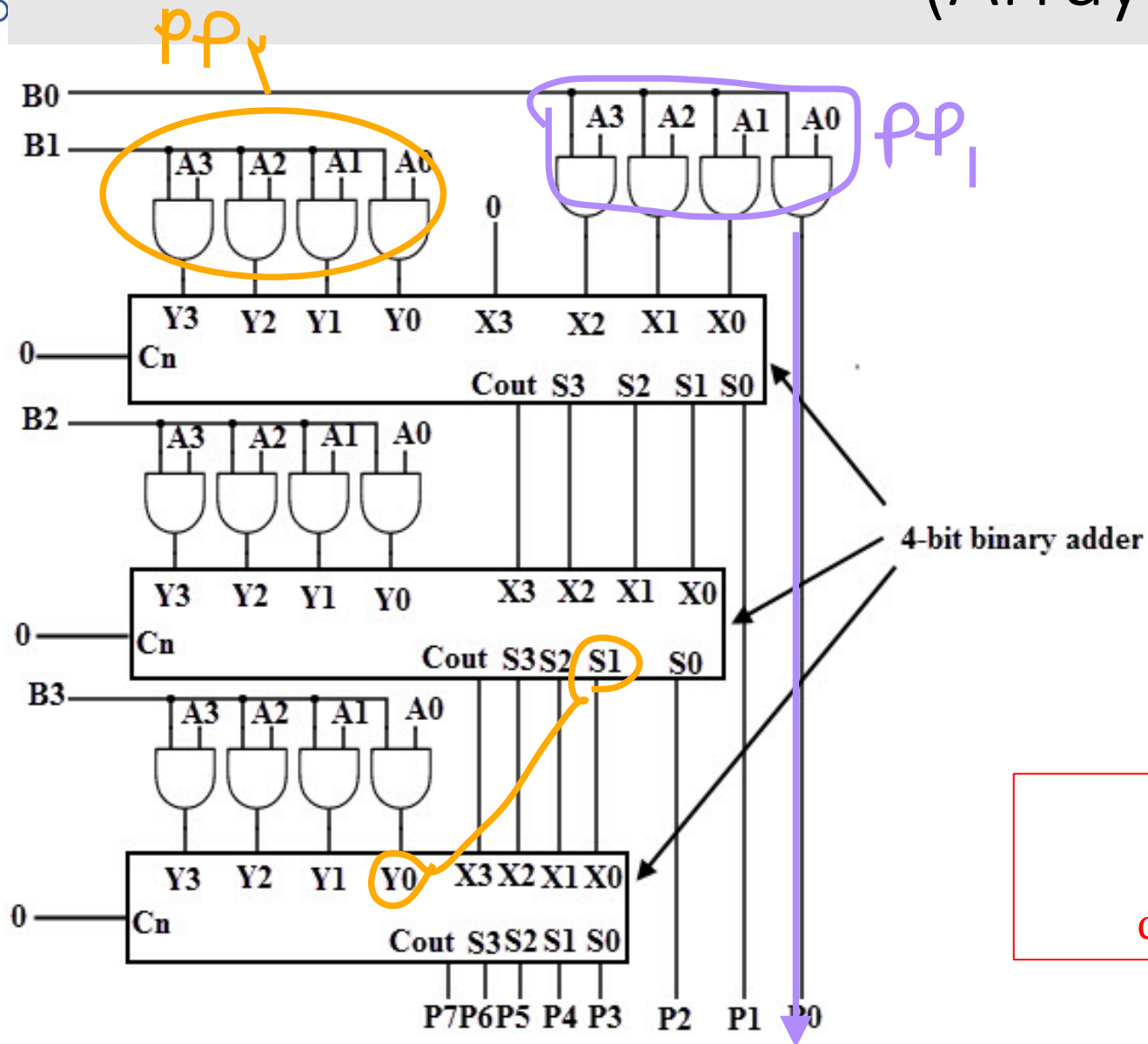
$$\text{cost} = n^2 + (n-1)(5n-3) - 3 = 6n^2 - 8n \quad \text{gate}$$

برای and ها

یا  $n-1$  جمع کننده که هرکدام  $5n-3$  کاسته .



# ضرب کننده آرایه‌ای (Array multiplier)



هر دفعه در جمع کننده ها یکی شیفتمیدیم.

تاخیر و هزینه رو محاسبه کنید.

delay (multiplier) = ?

$$\text{cost} = n^2 + (n-1) (5n-3) - 3 = 6n^2 - 8n \quad \text{gate}$$

چون همش از fa استفاده می کنه.



# ضرب کننده شیفت و جمع (Shift-add multiplier)



# ضرب کننده شیف و جمع

➤ در این روش، هنگام ضرب، به رقم  $B_i$  توجه میشود، دو حالت دارد:

- اگر **صفر** باشد، حاصلضرب میانی، **صفر** است.
- اگر **یک** باشد، حاصلضرب میانی، عدد **A** است.

## الگوریتم،

➤ در هر مرحله، به رقم‌های **B** توجه می‌شود (به ترتیب از کم ارزش تا پر ارزش) و حاصلضرب میانی مربوطه بدست آمده، **نتیجه نهایی** (که مقدار اولیه صفر دارد) با این حاصلضرب میانی جمع میشود. **نتیجه بدست آمده، یک رقم به سمت راست شیف می‌یابد، تا حاصلضرب میانی بعدی در محلی مناسب با آن جمع شود.**



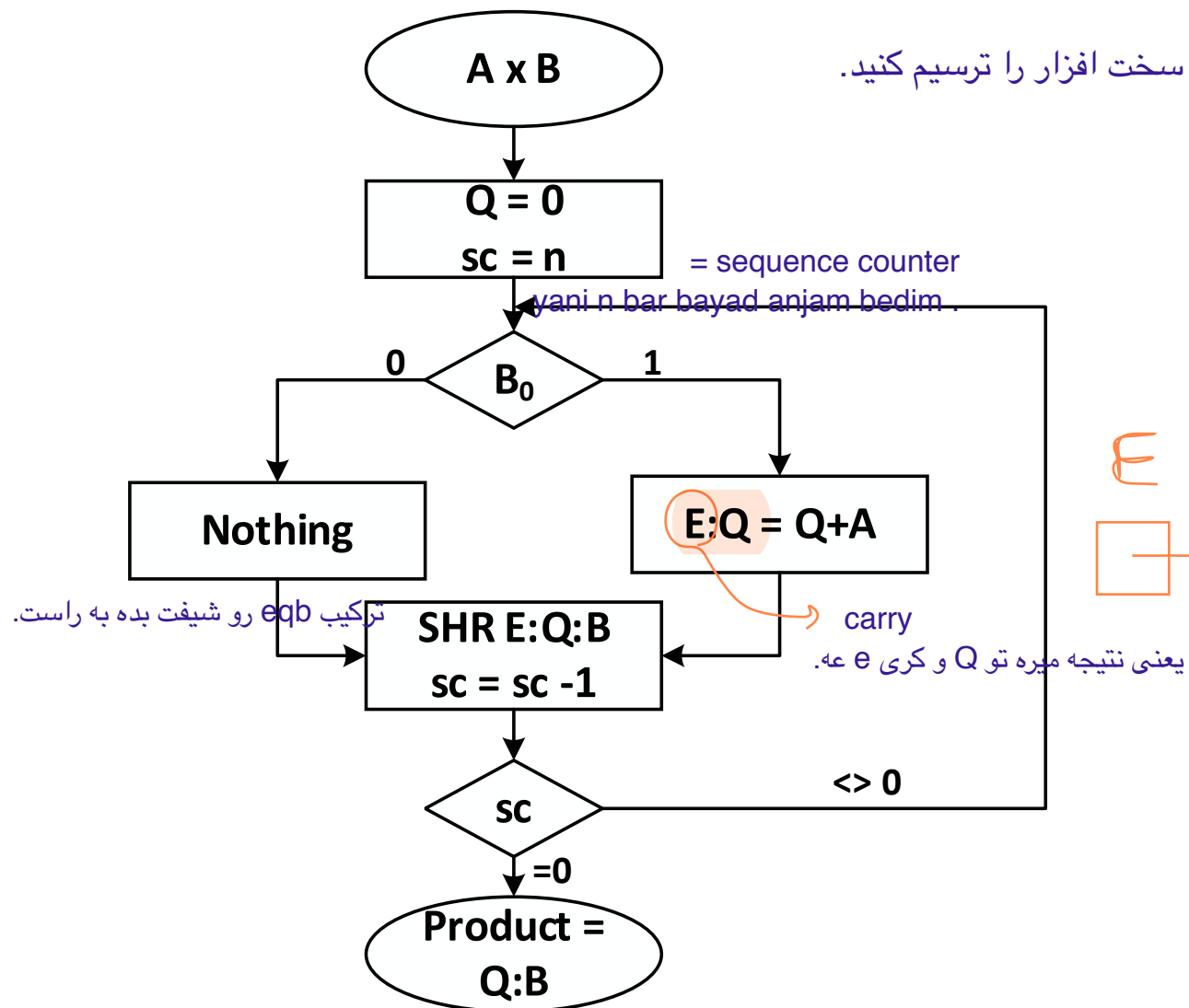
# ضرب کننده شیف و جمع

➤ در فلوچارت نمایشی، پس از حاصلضرب، نتیجه نهایی در ثبات موجود **B** ذخیره می شود، به عبارتی نتیجه **B** پس از ضرب، بخش کم ارزش حاصل ضرب نهایی خواهد بود. لذا اگر نیاز به مقدار **B** است، یا مقدار آن را یک کپی بگیرید یا فلوچارت را بگونه ای تغییر دهید که تاثیری روی آن نداشته باشد.

➤ به جای آنکه حاصلضرب نهایی ثابت باشد و حاصلضرب میانی در هر مرحله به سمت چپ شیف پیدا کند، حاصلضرب میانی ثابت خواهد بود و حاصلضرب نهایی به سمت راست شیف پیدا میکند.



# ضرب کننده شیف و جمع (فلوچارت)



A

7	6	5	4	3	2	1	0

×

B

7	6	5	4	3	2	1	0

E

→

Q								B							
7	6	5	4	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	0

delay (product) = ?

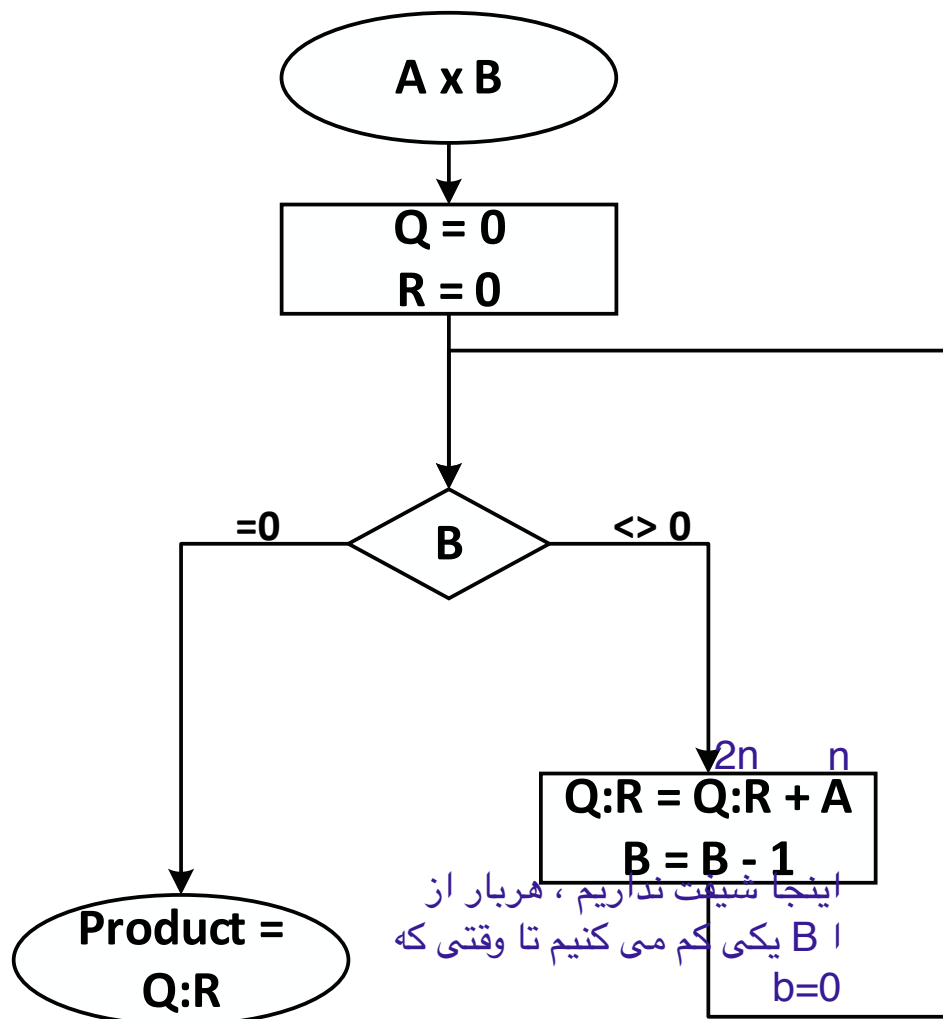
cost = ?



## ضرب کننده جمع های متوالی (Serial-add multiplier)



# ضرب کننده به روش جمع های متوالی (فلوچارت)



A

7	6	5	4	3	2	1	0

B

7	6	5	4	3	2	1	0

Q

7	6	5	4	3	2	1	0

R

7	6	5	4	3	2	1	0

delay (product) = ?

cost = ?

سخت افزار را ترسیم کنید و هزینه و تاخیر رو به دست آورید.





## ضرب کننده بوث (Booth multiplier)

برای ضرب دو عدد علامت دار مکمل ۲



## ضرب بوث

➤ هنگام ضرب:

○ اگر عدد دوم (B)، شامل رشته ای صفر باشد، عملاً نیاز به حاصلضرب میانی نیست تنها شیفست کافی است

○ اگر عدد دوم، شامل رشته ای یک باشد، فقط انتها و ابتدای رشته یک مهم است.

➤ نیاز است با نمایش بوث برای عدد دوم (B) آشنا شد،

○ اگر قطاری از یک‌های پشت سر هم از مرتبه  $2^m$  تا  $2^k$  باشد، می‌توان این عدد را بصورت  $2^{k+1} - 2^m +$  نوشت.

○ به مثال زیر توجه کنید:

مکمل ۲

$$+14 = 00001110 = 2^4 - 2^1$$

$$-8 = 11111000 = 0 - 2^3$$

$$\begin{aligned} +119 &= 01110111 = (2^7 - 2^4) + (2^3 - 2^0) \\ &= (128 - 16) + (8 - 1) \\ &= +119 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -31 &= 11100001 = (0 - 2^5) + (2^1 - 2^0) \\ &= -32 + 1 \\ &= -31 \end{aligned}$$



## نمایش بوث

◀ اعداد علامت دار زیر را بصورت بوث نمایش دهید و درستی آنها را بررسی کنید،

○ 11110000

○ 00001111

○ 00110011

در دفتر

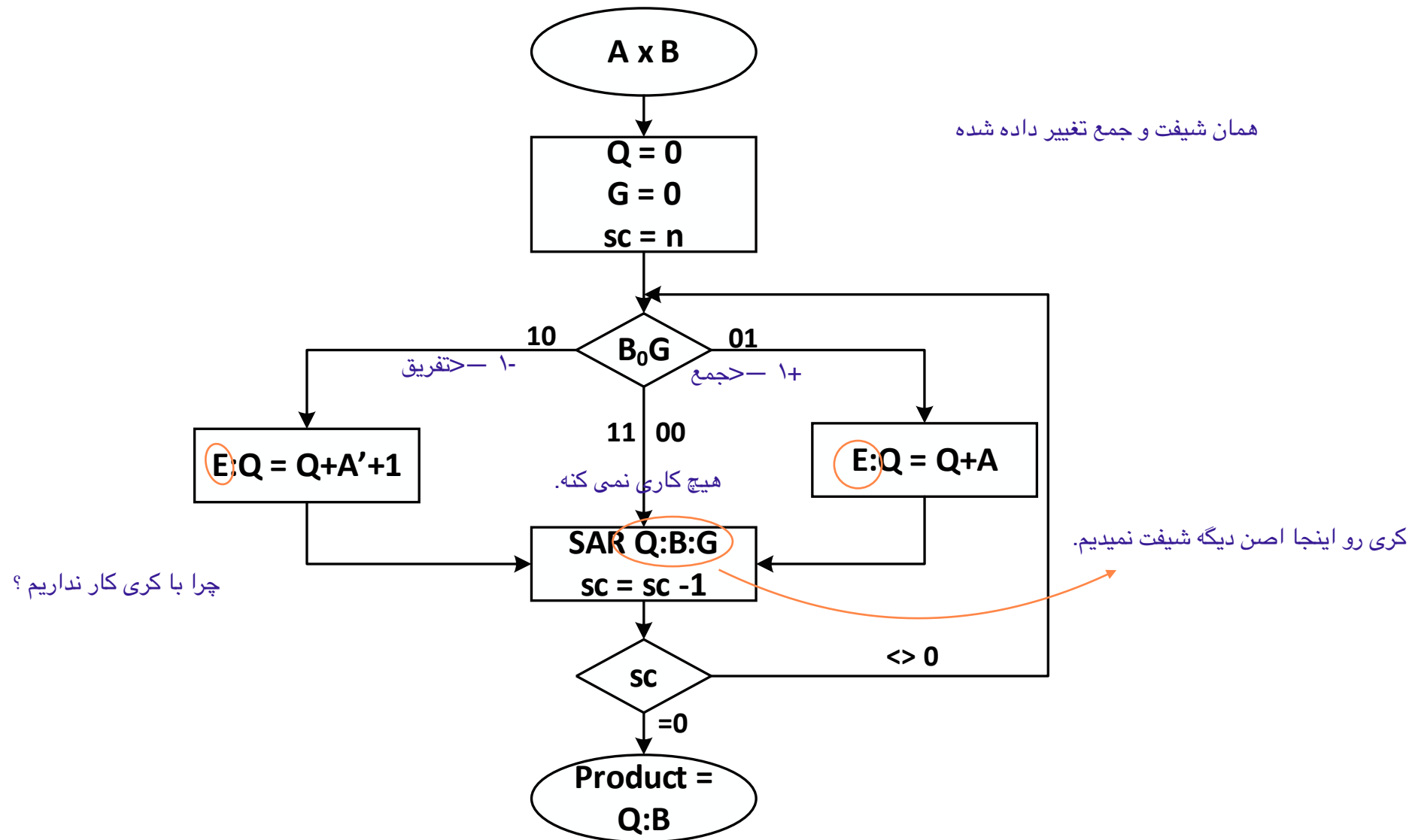
○ 11001100

○ 00111100

○ 11000011



# ضرب کننده بوث (فلوچارت)





# سرریز در ضرب؟

◀ جهت یادآوری:

○ در هنگام ضرب به هیچ وجه سرریز نخواهیم داشت، زیرا ظرف نتیجه از اندازه ۲ برابری ظرف ورودی تشکیل شده است.

○ یعنی ضرب دو عدد  $n$  بیتی، در ظرف  $2n$  بیتی ذخیره می‌شود.



# بررسی و کار در خانه

بررسی کنید: 

○ آیا ضرب کننده آرایه‌ای بی علامت برای اعداد با علامت مکمل ۲ کار می کند؟

■ اگر بله، اثبات کنید.

■ اگر خیر، یک مثال نقض بیاورید.

✓ در این حالت آیا امکان اصلاح مدار وجود دارد که به درستی برای مکمل ۲ کار کند؟

○ آیا ضرب کننده جمع‌های متوالی برای اعداد با علامت مکمل ۲ کار می کند؟

■ اگر بله، اثبات کنید.

■ اگر خیر، مثال نقض بیاورید.



# سوال؟

