

جمع کننده ها

طراحی واحد منطق و حساب

Arithmetic logic unit (ALU) design

© تمامی اطلاعات موجود در این سند متعلق به دانشگاه صنعتی امیرکبیر بوده و حقوق قانونی آن محفوظ است.



جمع کننده اعداد بی علامت



عمل محاسباتی: جمع

نوع نمایش: بی علامت

hazineye gate haro yeksan farz mikonim .

for each gate : d : gate delay
 g : gate cost (\$)

$n=1$ (جمع دو عدد بی علامت تک بیتی)

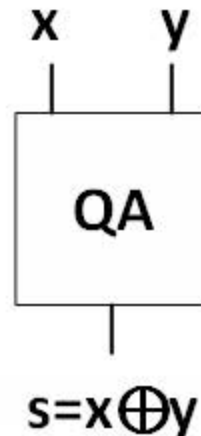
○ ربع جمع کننده (Quarter adder)

○ نیم جمع کننده (Half adder)

○ تمام جمع کننده (Full adder)

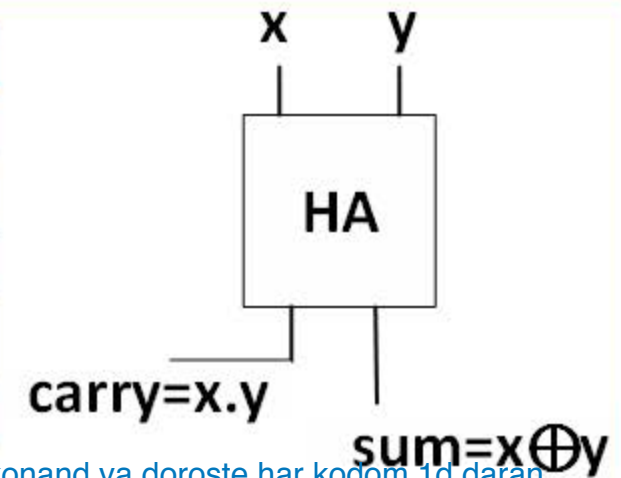
inja faqat yekanesh ro mikhahim --> hamoon xor .

x	y	s=x+y (جمع ریاضی)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



delay (sum) = d
Cost = $1g$

x	y	(جمع ریاضی)	
		carry	sum
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



in do sakht afzar baham movazi kar mikonand va doroste har kodom 1d daran vali dar kol ham hamoon 1d mishe chon baham kar mikonan .

delay (sum) = d
delay (carry) = d
Cost = $2g$

delay kol = badtarin az beine chand delay hast .



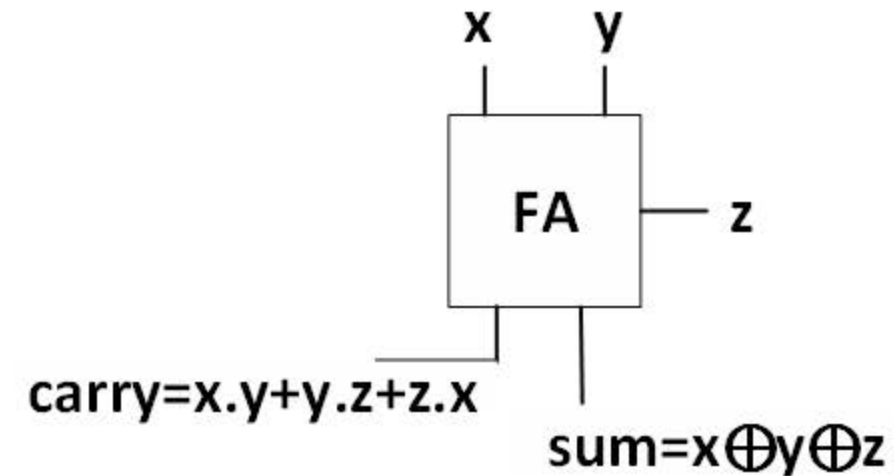
عمل محاسباتی: جمع

نوع نمایش: بی علامت

◀ $n=1$ (جمع دو عدد بی علامت تک بیتی)
 ○ تمام جمع کننده (Full adder)

x	y	z	(جمع ریاضی)	
			carry	sum
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

hadeaksare jam mishe 3 \Rightarrow 11.



ba xor e 3 vorodi age dashte basjim va age na ba 2 ta xore poshte sare ham .
 baraye or ham hamintor.

delay (sum) = d
 delay (carry) = 2d
 cost = 5 g

$$\Delta = \text{FA delay} = 2d$$

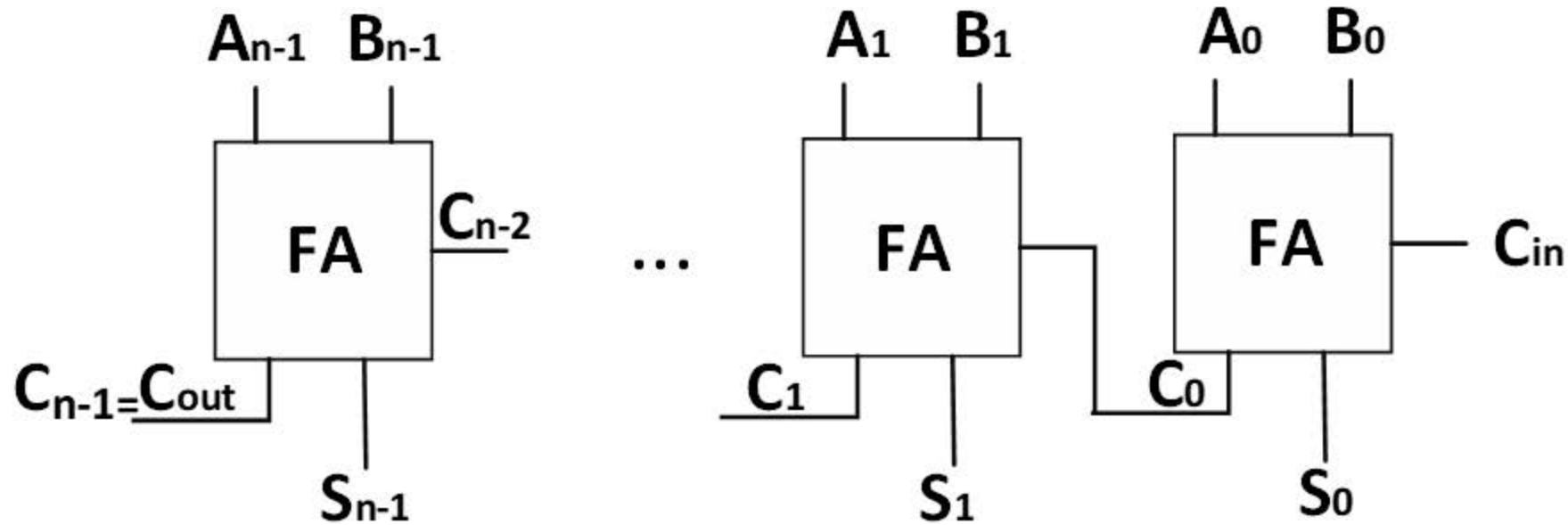
chon aval and va baad or \rightarrow 2d
 takhire carry = 2d va sum = d.



جمع کننده آبشاری (Ripple adder)



جمع کننده آبشاری (Ripple adder)



sum hamishe yeki az cout zoodtar miad biroon --> har FA delaye sum = 2d va delay carry = 2d pas kolan baraye carry : 2nd va chon sume akhari (badtarin halat) yeki zood tar az coute akhari miad biroon --> $(2n-1)d$.

$$\begin{aligned} \text{delay (sum)} &= (2n-1)d \\ \text{delay (carry)} &= 2nd \end{aligned}$$

$$\text{cost} = 5n g$$

2 irad dare : 1. delay az martabeye n hast va ziade . harchi n bishtar , delay bishtar va baes mishe toole clock ro natoonim koochik konim --> ferekans payin miad --> cpu kond mishe . :(inja movazi kar mikonan FA ha vali ma darim kare seriali azashoon mikeshim !! va in kheili bade .
2. ?



جمع کننده پیش بینی کننده رقم نقلی (Carry Look-ahead adder)

pish bini mikone ke cout chie ta montazere carry out nashim :)



جمع کننده پیش بینی کننده رقم نقلی (Carry look-ahead adder)

$$C_0 = A_0B_0 + C_{in}(A_0 + B_0) = G_0 + C_{in}P_0$$

$$C_1 = A_1B_1 + C_0(A_1 + B_1) = G_1 + (G_0 + C_{in}P_0)P_1 = G_1 + G_0P_1 + C_{in}P_0P_1$$

$$C_2 = A_2B_2 + C_1(A_2 + B_2) = G_2 + (G_1 + G_0P_1 + C_{in}P_0P_1)P_2$$

$$= G_2 + G_1P_2 + G_0P_1P_2 + C_{in}P_0P_1P_2$$

...

$$C_{n-1} = A_{n-1}B_{n-1} + C_{n-2}(A_{n-1} + B_{n-1}) = G_{n-1} + G_{n-2}P_{n-1} + G_{n-3}P_{n-2}P_{n-1} + \dots + C_{in}P_0P_1P_2\dots P_{n-1}$$

$$G_i = A_iB_i \quad (\text{Carry } G \text{ Generate})$$

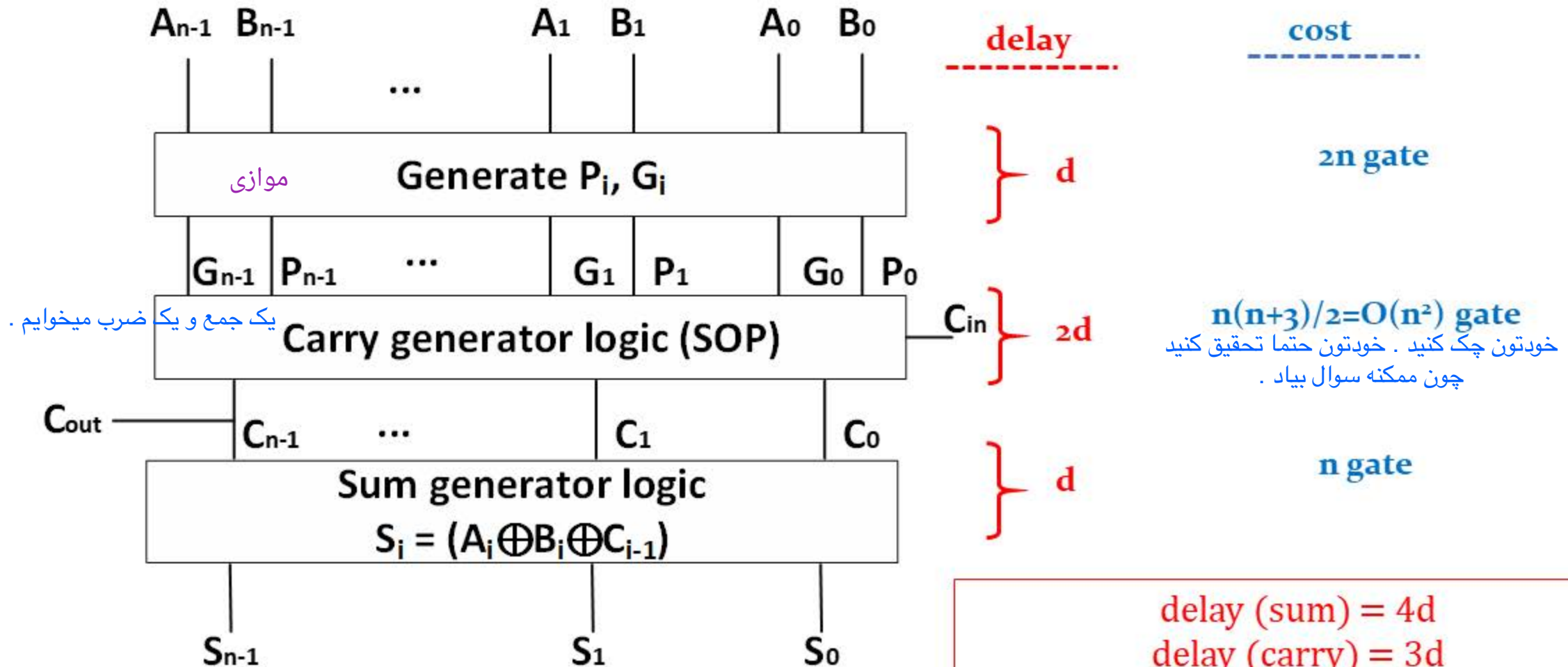
$$P_i = A_i + B_i \quad (\text{Carry } P \text{ Propagate})$$

in ha mitoonan movazi kar konan va delay har kodoom d hast .
pas hameye carry ha amade hast dar d --> kolan dar 2d be
javab miresim .



جمع کننده پیش بینی کننده رقم نقلی (Carry look-ahead adder)

با 3d کری و با 4d سام تولید میشه.



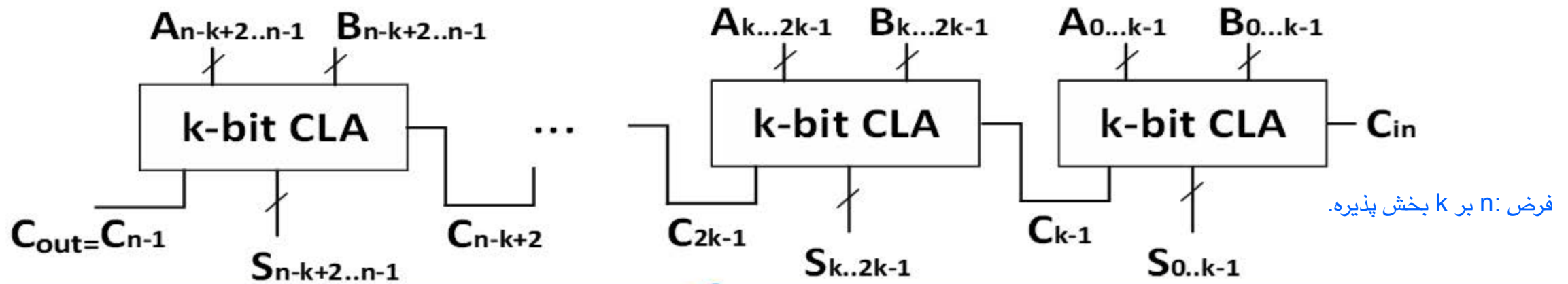
یک جمع و یک ضرب میخوایم .

سی ال ای رو در واقعیت برای $n=4$ و $n=8$ ساخته میشه به خاطر همون sop .



استفاده از CLA های k-بیتی

سی ال ای ها رو همیشه برای هر تعداد بیتی ساخت .



در هر طبقه برای محاسبه کری 3d و برای محاسبه سام 4d طول میکشه .

اما این حالت عملی نیست پس آمار داریم .

pi va gi ha dar d amade mishan be soorate movaze pas ye d hast
va con be alave vase hamine . vali C ha abshari hastan pas 2n/k mishe .

محاسبه دقیق تر

$$\text{Delay (carry)} = (2n/k + 1) d$$

$$\text{Delay (sum)} = (2n/k + 2) d$$

sum yeki bishtar az carry mishe .

$$\text{Cost} = n/k * (3k + k(k+3)/2)$$

ما کری رو که در طبقه آخر داریم باید xor شه با sum و نتیجتا تاخیرش یکی بیشتر از کری میشه .

$$\text{Delay}_{\text{sum}} = \left(\frac{3n}{k} + 1 \right) d$$

samte chapi mohasebatesh black boxe yani be dakhele cla ha kari nadare vali samte rast daqiq.



جمع کننده انتخابگر نقلی (Carry Select Adder)

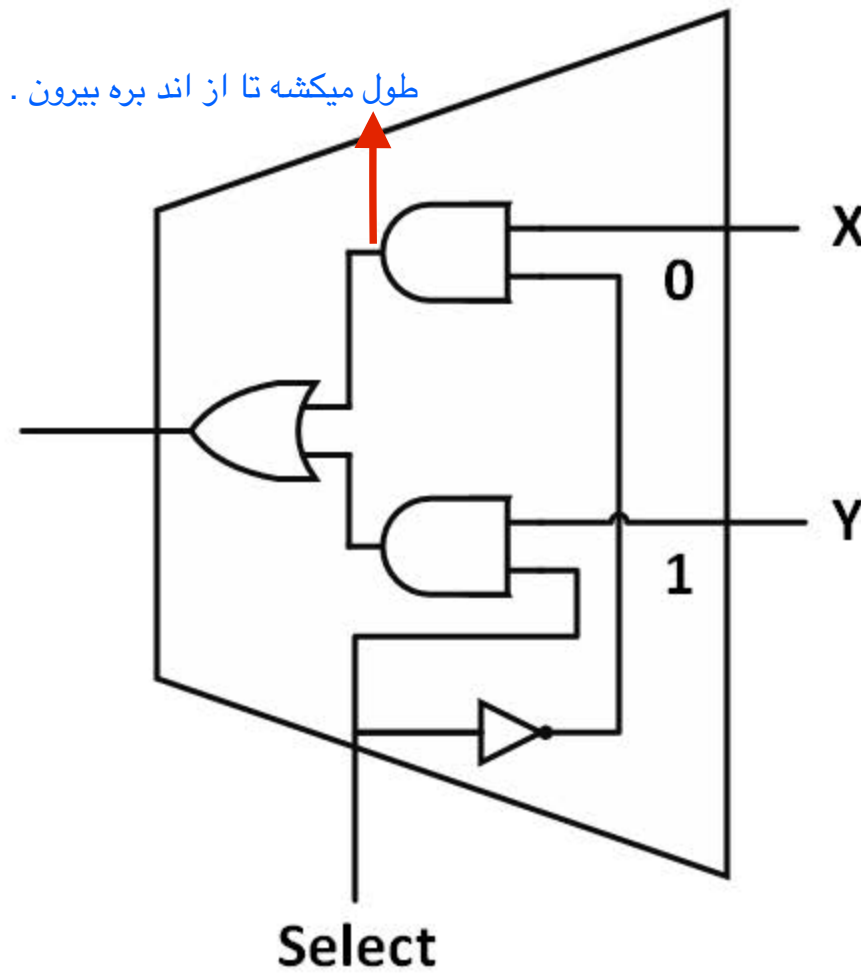


MUX $2 \rightarrow 1$

طول میکشه تا از اند بره بیرون . $2d$

delay = $3d$

cost = 4 gate





MUX $2(k) \rightarrow 1(k)$

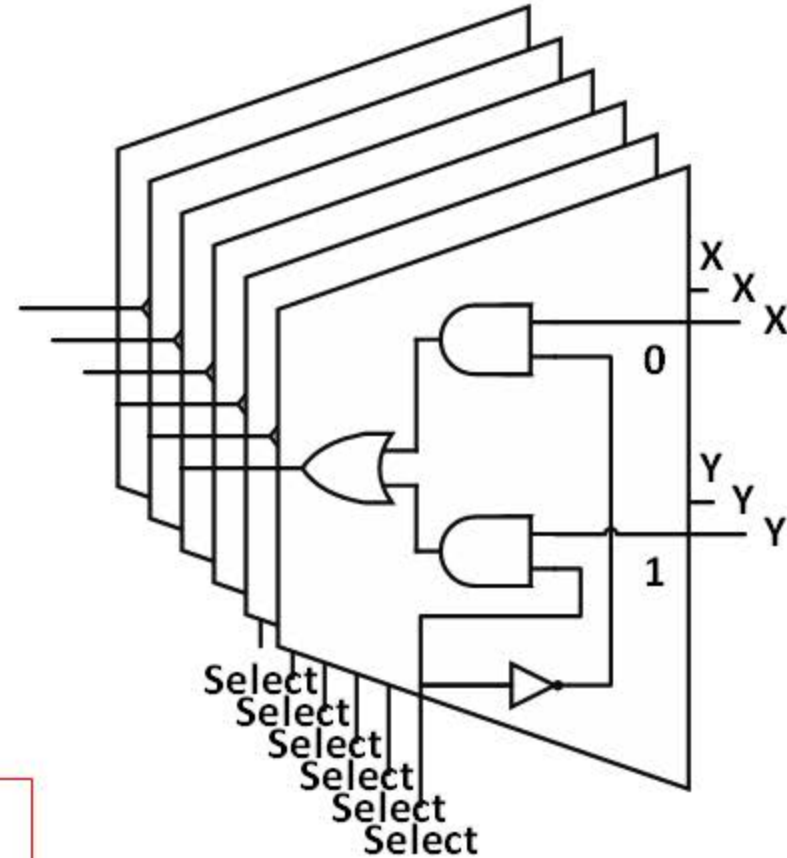
baraye har bit yek mux \rightarrow baham movazi hastan \rightarrow delay = $3d$.
dar har tabaghe 4 gate pas kolan $4k$.

$$\text{delay} = 3d$$

$$\text{cost} = 4k \text{ gate}$$

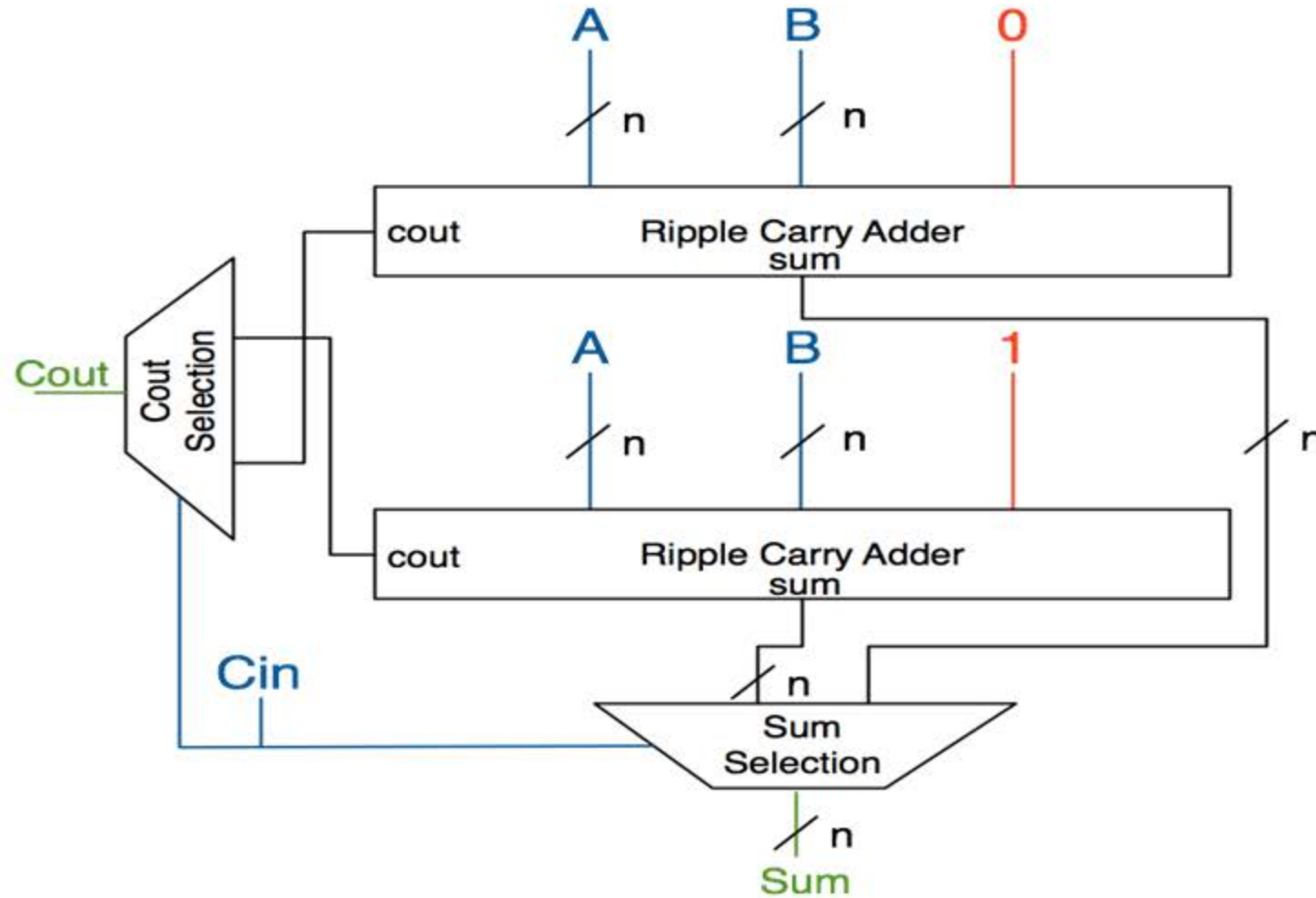
baraye hameye in mux ha ma niaz be yek select darim
pas mitonim az yek not baraye hamashoon estefade konim. pas be jaye
 k ta not , 1 not mikhaim $\rightarrow 3k+1$ gate mikhaim .

می توان چنین فرض کرد که یک تسهیم گر $2(k) \rightarrow 1(k)$
از k عدد تسهیم گر $2 \rightarrow 1$ بدست آمده است.





جمع کننده انتخابگر نقلی (n-bit Carry Select Adder)



n-bit Carry Select Adder

این نسبت به ripple adder کاستش بیشتره.
اینجا ماکس ها درواقع $2n$ به n هستن.

تاخیر رو در دفتر نوشتم.



جمع کننده انتخابگر نقلی (n-bit Carry Select Adder)

delay (sum) = ?
delay (carry) = ?

cost = ?

سوال ۱:

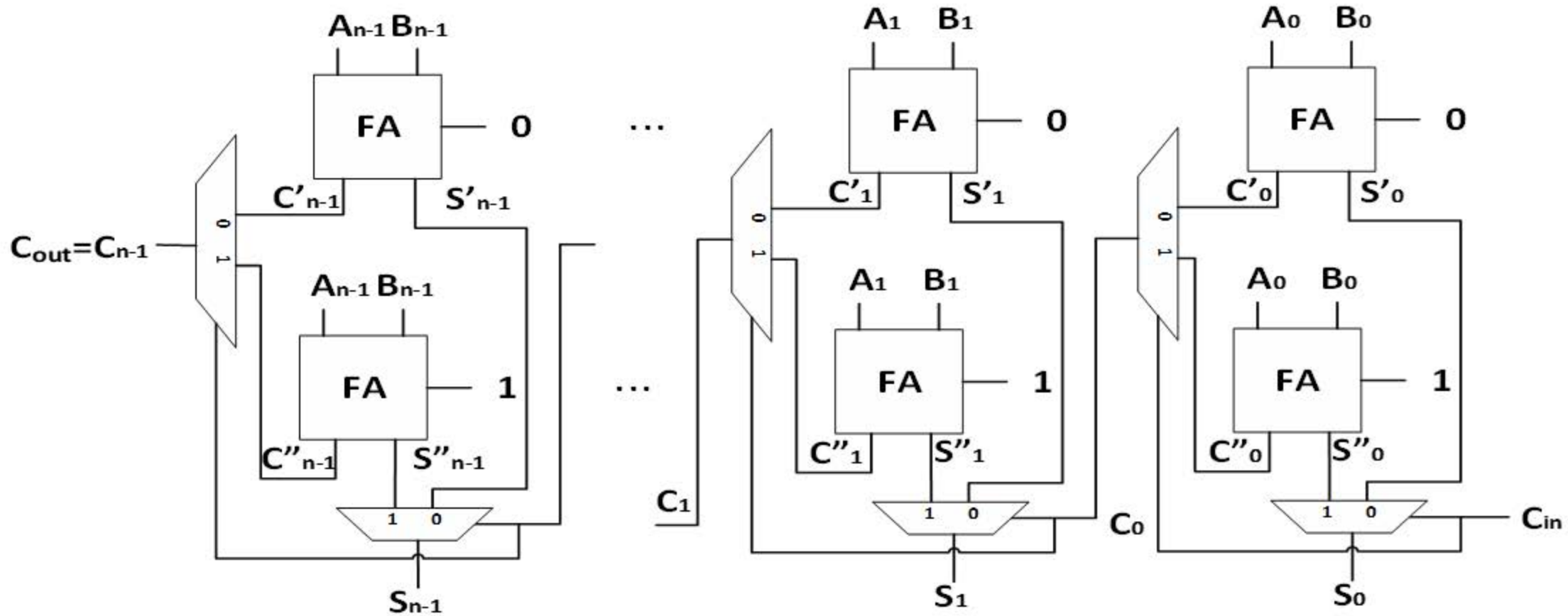
○ الف) مطلوبست محاسبه هزینه و تاخیر محاسبات؟

○ ب) در مقایسه با جمع کننده آبشاری از منظر هزینه و تاخیر بررسی کنید.

مناسب نیست.



جمع کننده انتخابگر نقلی Ripple (1-bit Carry Select) Adder



برای طبقه اول این کار معنی نداره چون کدی شو دیگه داریم .
در واقع اینجا یک رپل ادر تک بیتی رو در آن بیت داریم.

Ripple (1-bit Carry Select) Adder



جمع کننده انتخابگر نقلی Ripple (1-bit Carry Select) Adder

delay (sum) = ?
delay (carry) = ?

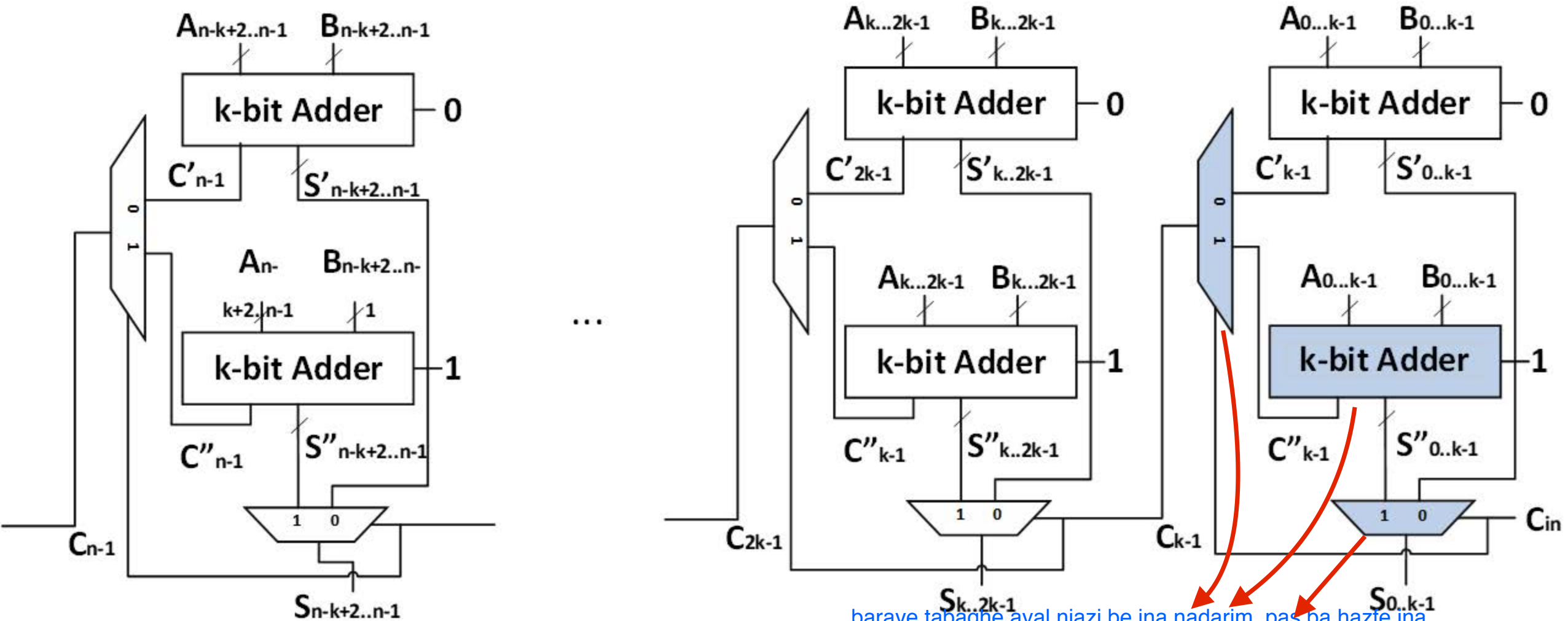
cost = ?

سوال ۲:

- الف) مطلوبست محاسبه هزینه و تاخیر محاسبات؟
- ب) در مقایسه با جمع کننده آبشاری از منظر هزینه و تاخیر بررسی کنید.



جمع کننده انتخابگر نقلی k-bit Uniform Carry Select Adder



if $k=1 \rightarrow$ hamoon shekle ghabli ke khoob nabood.
 $k=n$ ham dashtim ke khoob nabood.

baraye tabaghe aval niazi be ina nadarim .pas ba hazfe ina
 amalkard ro hata behtar mikonim.

farz : in k bit adder ha , ripple adder hastan .



جمع کننده انتخابگر نقلی k-bit Uniform Carry Select Adder

cost = ?

delay (sum) = ?

delay (carry) = ?

سوال ۳: در مدار قبلی، مطلوبست محاسبه هزینه و تاخیر نتیجه؟



جمع کننده انتخابگر نقلی k-bit Uniform Carry Select Adder

سوال ۴:

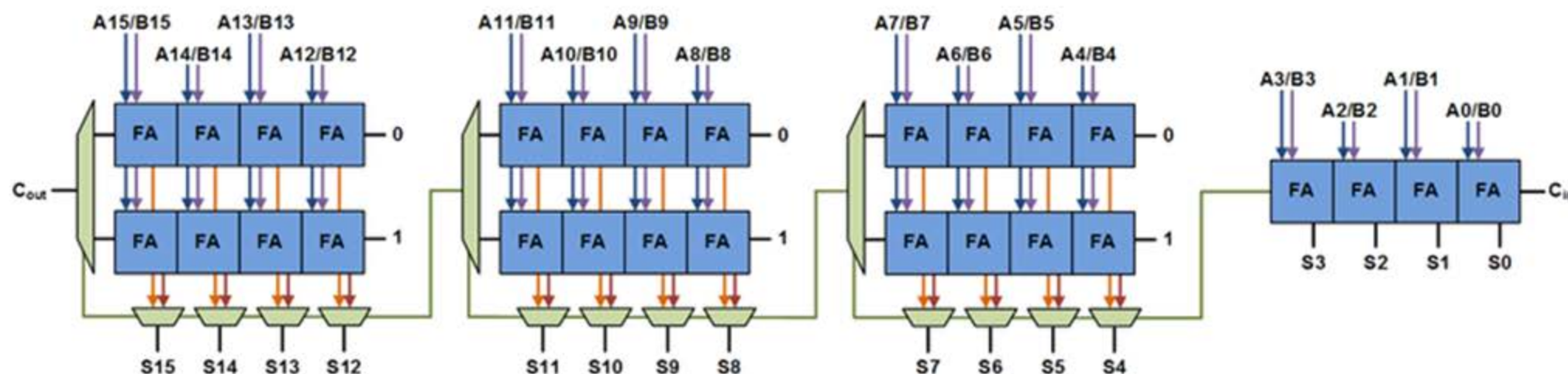
○ الف) به ازای چه مقادیری از k مدار **جمع کننده انتخابگر نقلی یکنواخت** از منظر هزینه یا تاخیر بهتر از **جمع کننده آبشاری** خواهد بود؟ (برای سادگی فرض کنید اعداد ۱۶ بیتی هستند)

○ ب) کدام مقدار k بهترین است؟

○ ج) آیا می توان بخش های خاکستری را حذف کرد (بدون آنکه درستی مدار از بین برود یا تاخیر مدار افزایش یابد)؟



جمع کننده انتخابگر نقلی 4-bit Uniform Carry Select Adder



cost = ?

delay (sum) = ?

delay (carry) = ?

adders MUX_s

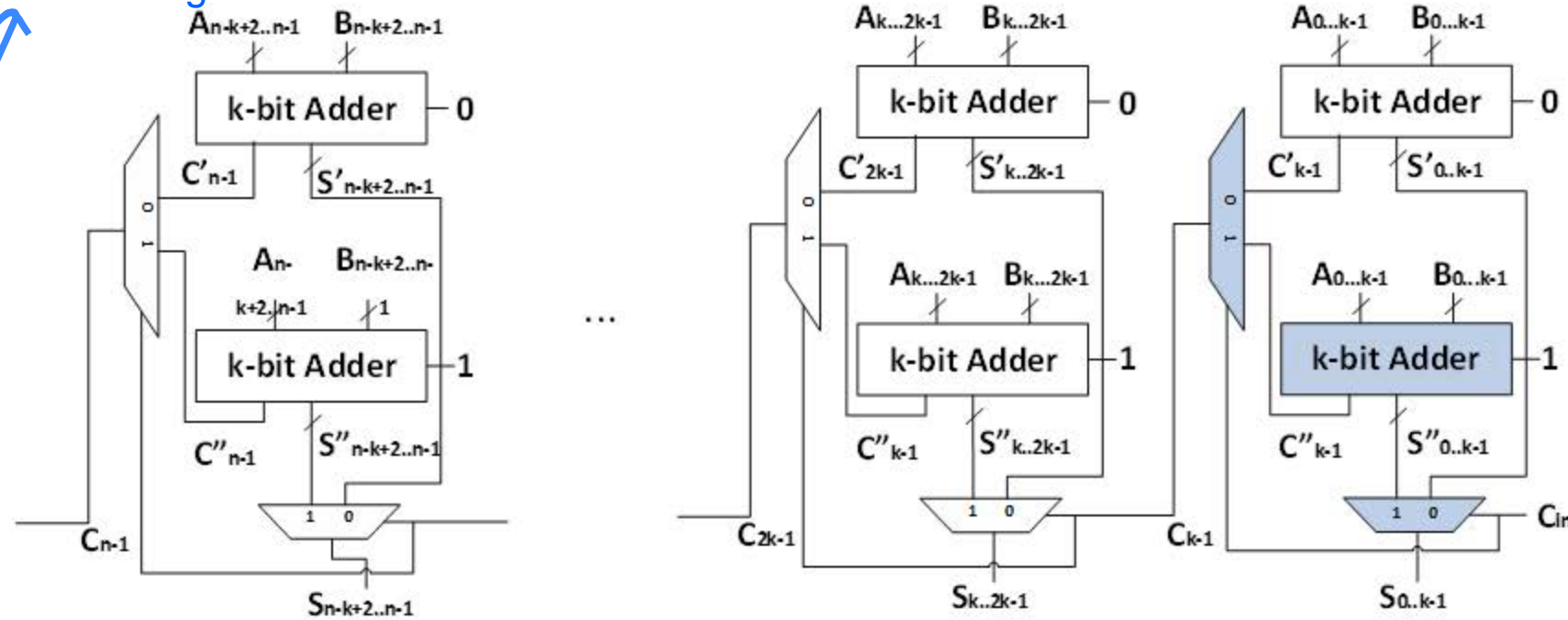
$$\text{Delay} = 2kd + 3\left(\frac{n}{k}\right)d$$

مول ادرها آبساری هست.



بازنگری جمع کننده انتخابگر نقلی یکنواخت

chon delaye avali hadeaghal bayad ye meghdar bashe ke ta vaghti raft saathe baadi oon fa ha kareshono anjam dade bashan va dge mataale sathe baadi nashan.



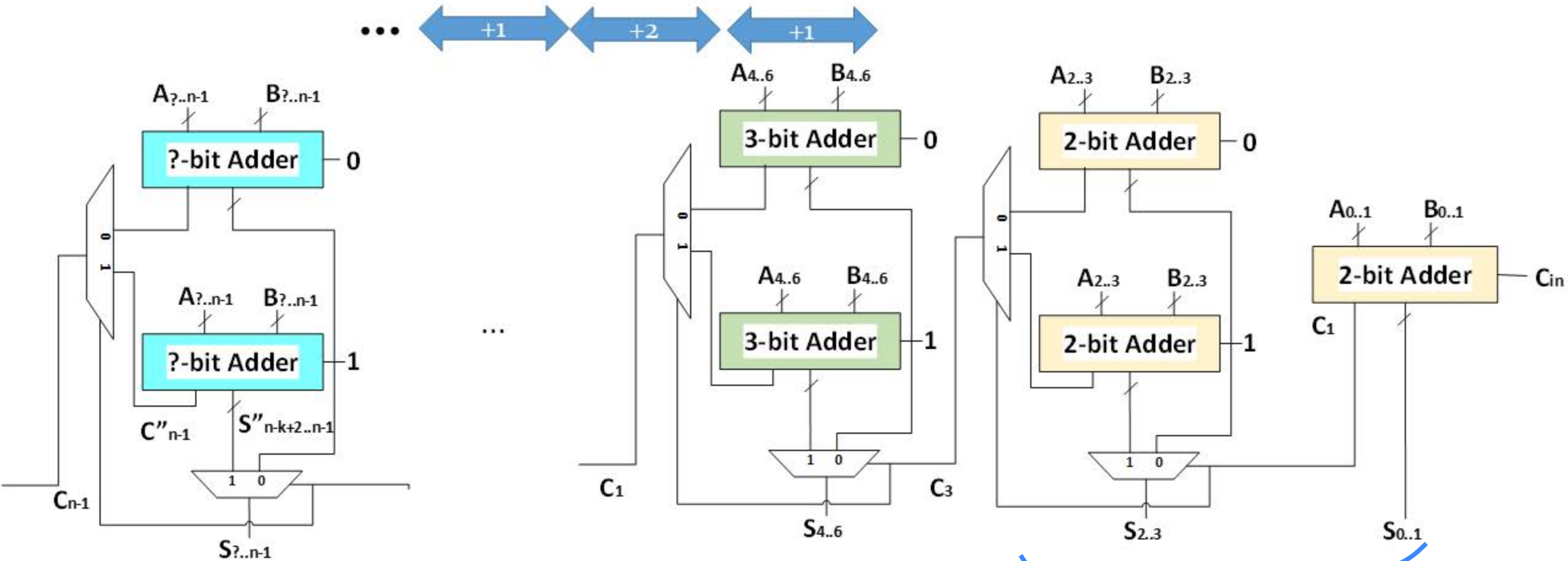
با هر $2d$ می توان یک FA بیشتر محاسبه کرد.

$3d$ = تاخیر عبور از هر مالتی پلکسر

پس هر طبقه که عبور میکنیم، ۱.۵ (یک و نیم) FA قابل اضافه کردن است. چون FA باید کامل باشد، یک طبقه یک FA، طبقه بعدی دو FA اضافه می شود و به همین ترتیب تا کل بیت های اعداد تکمیل شود. (حداقل تعداد بیت طبقه اول باید ۲ بیتی باشد. چرا؟)



جمع کننده انتخابگر نقلی غیر یکنواخت



in 2 ta bayad bit hashoon baham mosavi bashe chon dar masire carry oute avali muxi nist ke bekhaime az zamanesh estefade konim .



جمع کننده انتخابگر نقلی غیر یکنواخت non-Uniform Carry Select Adder

cost = ?

سوال ۵:

delay (sum) = ?

delay (carry) = ?

○ الف) برای اعداد ۱۶ بیتی، مطلوبست محاسبه هزینه و تاخیر نتیجه؟

○ ب) برای اعداد n بیتی، مجدد محاسبه کنید.



جمع m عدد n بیتی



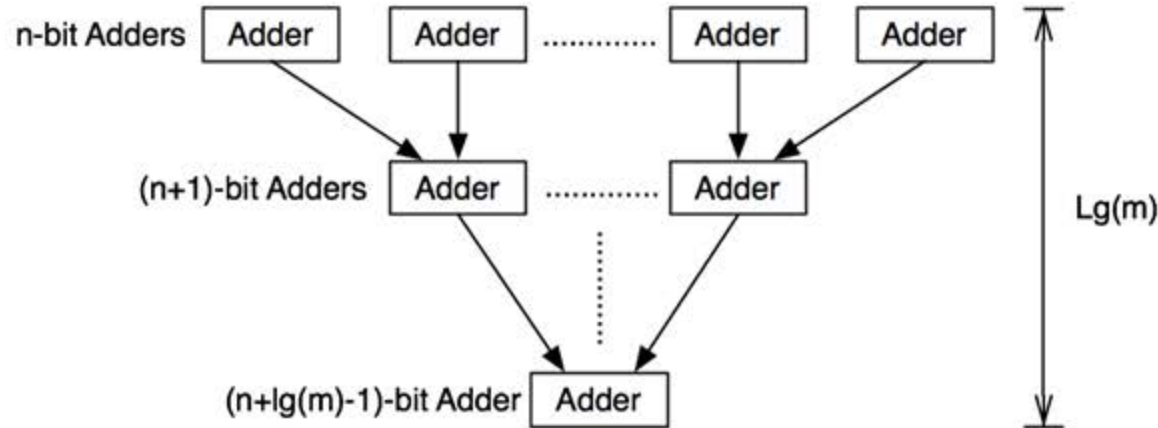
چطور می‌توان m عدد n بیتی را جمع کرد؟

۱- بصورت جمع پی در پی (جمع سریال) to computer haye ma intori.

- نیاز به $m-1$ جمع‌کننده است. جمع‌کننده‌های آتی امکان افزایش بیتها وجود دارد.
- آیا بهترین هزینه و تاخیر را دارد؟ خیر تاخیر بد چون سریالی ، هزینه زیاد چون ادرهای زیادی نیاز داریم.

۲- بصورت جمع درختی (دو به دو با هم)

- نیاز به ترسیم درخت دودویی است (اگر m توانی از ۲ باشد، حدود $\frac{m}{2}$ جمع‌کننده نیاز است وگرنه به تعداد اولین توان ۲ که بزرگتر از m باشد، جمع‌کننده نیاز است).
- آیا بهترین هزینه و تاخیر را دارد؟ از لحاظ تاخیر شاید بهتر باشه ولی هزینه ی خیلی زیادی داره.



۳- جمع بصورت ذخیره گر نقلی

- به مثال توجه کنید:



مثال: جمع ۵ عدد ۴ رقمی در مبنای ۱۰

93458
36821
34099
78654
45031

+

جمع

66843

نقلی = ده بر یک

22122_

age bekhaime dar halate adi jam konim , delay kheili ziad mishe.
pas har bar ba jame har sotoon naghli sho joda mikonim.

66843

221220

+

288063

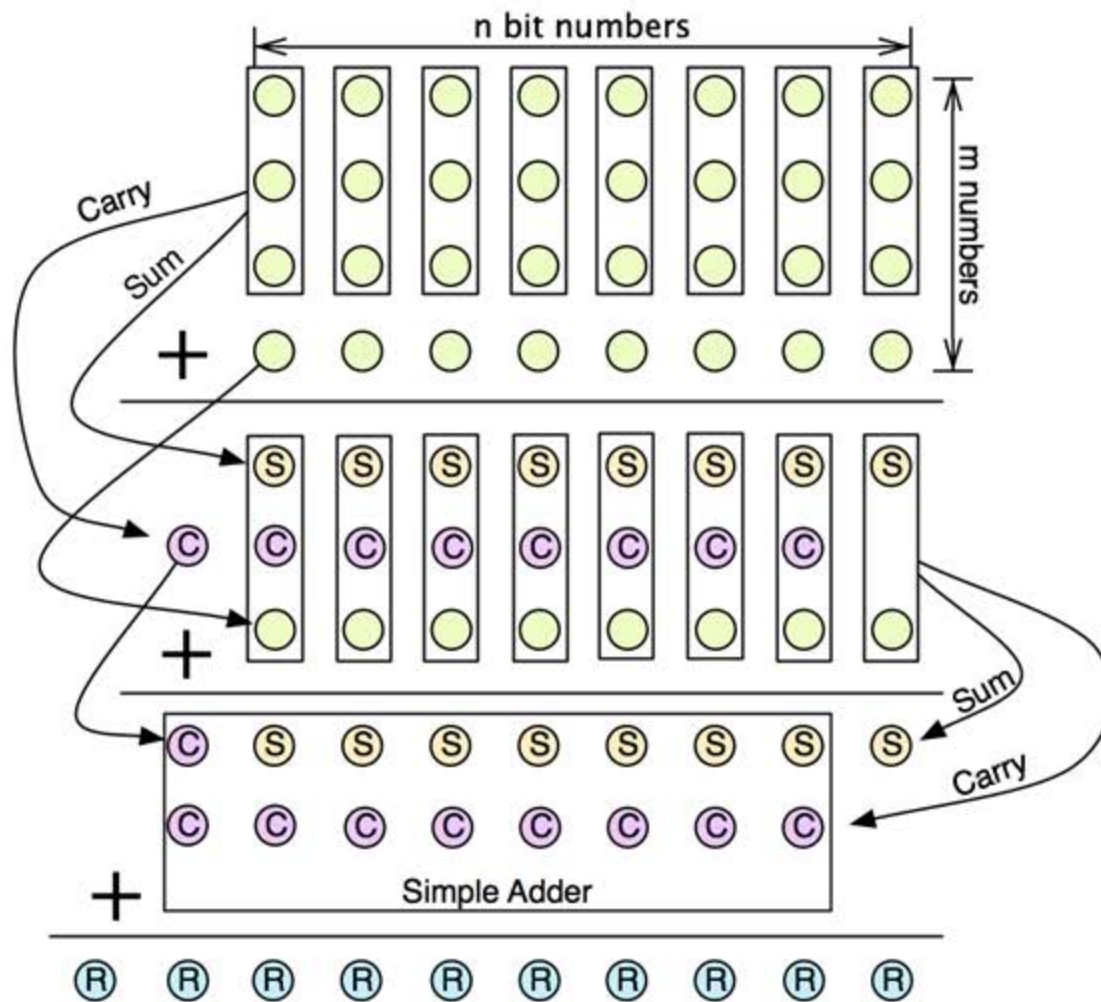
سخت افزار همه ی ستون ها رو موازی انجام میده به خاطر همین سرعت خیلی بالا میره.

در روش جمع بصورت دودویی:

- ۱- سعی میشود از FA و HA استفاده شود که با قطعات کم هزینه ساخته شود و قابل قیاس با روشهای مشابه باشد.
- ۲- آیا این درست است که یک FA، جمع کننده ۳ عدد تک رقمی است؟ و نتیجه را بصورت جمع و رقم نقلی ارایه می دهد؟
- ۳- سعی می شود در هر مرحله، ۳ رقم هم ارزش مکانی، توسط یک FA جمع زده شود و نتیجه به مرحله بعد منتقل شود.



مثال دودویی: جمع ۴ عدد ۸ بیتی (قابل تعمیم به m عدد n بیتی)



cost = ?

delay (sum) = ?
delay (carry) = ?



جمع کننده ذخیره گر نقلی (Carry save adder)

Carry Save Adder

m عدد n بیتی

- = $\sum m$
- = Carry
- = بیت آخر



⋮

Ripple : ذخیره

m عدد n بیتی

تعداد بیتها



درستی سنجی کنید که آیا روابط زیر درست است یا خیر ؟

محاسبه هزینه و تاخیر ؟

در طبقات طبقه آخر تعداد بیت تعداد بیت

$$\text{Delay} (m=\epsilon/n=\epsilon) = n\Delta + \text{Ripple Adder} \quad \epsilon + 2$$

$$\text{Cost} (m=\epsilon/n=\epsilon) = 11 \text{ FA} + 11 \text{ HA} + \text{Ripple Adder}$$

تعداد طبقات چون در هر طبقه ۱ بیت به خاطر کری اضافه میشه. (۲+ε) Ripple

$$\text{Delay} : \log_{r/r}^m \times \Delta + (\log_{r/r}^m + n) \text{ Ripple Adder}$$

FA

$$\text{Cost} : \left(\sum_{i=1}^{\log_{r/r}^m} (n+i-1) \times \frac{m}{(\frac{r}{r})^i} \right) \text{ FA} + (\log_{r/r}^m + n) \text{ Ripple Adder}$$

تعداد طبقات deg hat , i-1 e.

$$\text{Ripple} : n + \lceil \log_{r/r}^m \rceil - 1$$



سوال؟





MUX $2(k) \rightarrow 1(k)$

delay = 3d

cost = $(3k+1)$ gate

