میناسلی - ۹۸۳۱۰۷۵

Subject: تمرینات سری ۳ مدارهای منطقی

بخش دوم : سؤالات اصلی :

۱- تابع $f(a,b,c) = \sum m(0,1,5,7)$ را به فرم استاندارد حاصل ضرب حاصل جمع ها (POS) و حاصل جمع حاصل ضرب ها (SOP) ساده کنید.

$\sum m(0,1,5,7)$

	a	b	c	
0:	0	0	0	$\rightarrow m_0 = a'b'c'$
1:	0	0	1	$\rightarrow m_1 = a'b'c$
5:	1	0	1	$\rightarrow m_5 = ab'c$
7:	1	1	1	$\rightarrow m_7 = abc$

$\Rightarrow f(a,b,c) = a'b'c' + a'b'c + ab'c + abc$

$= a'b'(\underbrace{c+c'}_{1}) + ac(\underbrace{b+b'}_{1})$ عکس توزیع . به +

$= a'b'.1 + ac.1$ $\qquad x+x'=1$

$= \boxed{a'b' + ac}$ Standard SoP $\qquad x.1 = x$

$f(a,b,c) = \prod M(2,3,4,6)$

	a	b	c	
2:	0	1	0	$\rightarrow M_2 = a+b'+c$
3:	0	1	1	$\rightarrow M_3 = a+b'+c'$
4:	1	0	0	$\rightarrow M_4 = a'+b+c'$
6:	1	1	0	$\rightarrow M_6 = a'+b'+c$

$\Rightarrow f(a,b,c) = (a+b'+c)(a+b'+c')(a'+b+c')(a'+b'+c)$

$= (a+b'+\underbrace{c.c'}_{0})(a'+c+\underbrace{b.b'}_{0})$ عکس توزیع + به .

$= \boxed{(a+b')(a'+c)}$ Standard PoS $\qquad x.x'=0$ $\qquad x+0=x$

$\overbrace{a'b'+ac}^{SOP} = (a'+c)(b'+a)$: PoS راه ساده تر برای به دست آوردن فرم استاندارد

theorem for factoring

۲- طبق قضیه‌ی شانون، هر تابع دلخواه F را می‌توان برحسب یک یا چند متغیر به فرم‌های زیر بسط داد:

$$1)\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot F(1, x_2, \dots, x_n) + \bar{x}_1 \cdot F(0, x_2, \dots, x_n)$$

$$2)\ F(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1 + F(0, x_2, \dots, x_n)] \cdot [\bar{x}_1 + F(1, x_2, \dots, x_n)]$$

تابع $f(x,y,z) = x\bar{y} + \bar{x}z + y\bar{z}$ را برحسب متغیر x به هر دو فرم شانون بسط دهید.

فرم ۱) $f(x,y,z) = x\, f(1,y,z) + \bar{x}\, f(0,y,z)$

$$f(1,y,z) = \underbrace{1.\bar{y}}_{\bar{y}} + \underbrace{\cancel{0.z}}_{0} + y\bar{z} \xlongequal[\substack{a.1=a \\ a.0=0 \\ a+0=a}]{} \bar{y} + y\bar{z} \xlongequal[\text{شبه جذب}]{} \bar{y} + \bar{z}$$

$$f(0,y,z) = \underbrace{\cancel{0.\bar{y}}}_{0} + \underbrace{1.z}_{z} + y\bar{z} \xlongequal[\substack{a.0=0 \\ a.1=a}]{} z + y\bar{z} \xlongequal[\text{شبه جذب}]{} z + y$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = x \cdot (\bar{y} + \bar{z}) + \bar{x} \cdot (z + y) \xlongequal[\text{theorem for factoring}]{} (x + z + y)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

فرم ۲) $f(x,y,z) = [x + \underbrace{f(0,y,z)}_{z+y}] \cdot [\bar{x} + \underbrace{f(1,y,z)}_{\bar{y}+\bar{z}}]$

$$= (x + z + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$$

Subject:

۳ـ در یک راهرو چهار در وجود دارد و در هر کدام یک سوییچ تعبیه شده است. مداری طراحی کنید که با باز شدن حداقل دو عدد از درها، یک لامپ درون راهرو روشن شود.

باز شدن در : A (اول) , B (دوم) , C (سوم) , D (چهارم)

'1' : باز شدن
'0' : بسته شدن

F : روشن شدن لامپ راهرو

'1' : روشن
'0' : خاموش

$$F = A(B+C+D) + B(A+C+D) + C(A+B+D) + D(A+B+C)$$

توضیح: برای اینکه جواب F یک شود کافی است یکی از ۴ تابع شونده یک شود و در هر کدام از آن‌ها مثلاً در $A(B+C+D)$ حتماً باید A و یکی دیگر از درها یک شود تا حاصل یک شود؛ چون در سؤال گفته حداقل ۲ تا.

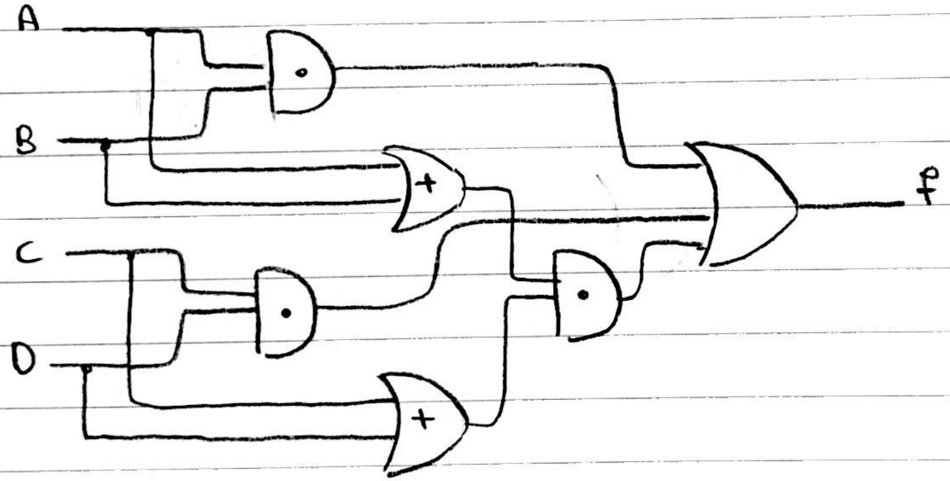
$$\rightarrow F = AB + AC + AD + AB + BC + BD + AC + CB + CD + AD + DB + DC$$

$$= AB + AC + AD + BC + BD + CD$$

$$= AB + A(C+D) + B(C+D) + CD$$

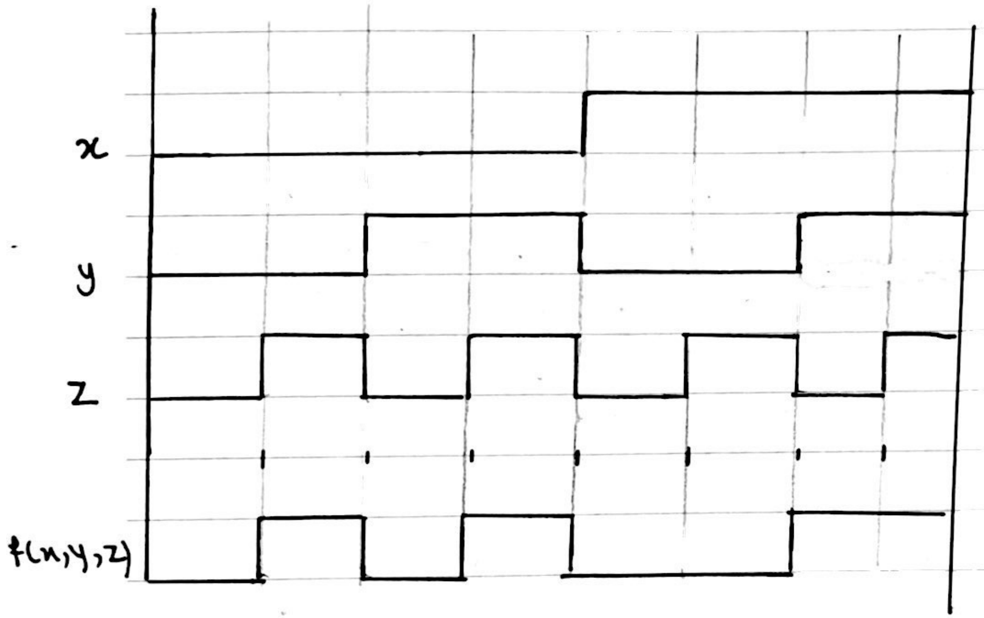
$$= \boxed{AB + (A+B)(C+D) + CD}$$

* رسم سؤال ٣ :



۴- رفتار تابع f با سه ورودی به صورت شکل موج زیر بوده است.

الف) ابتدا این تابع را بدون ساده سازی با عبارت بولین توصیف نمایید.



Subject:

x	y	z	minterm	maxterm	F
0	0	0	$m_0 = x'y'z'$	$M_0 = x+y+z$	0
0	0	1	$m_1 = x'y'z$	$M_1 = x+y+z'$	1
0	1	0	$m_2 = x'yz'$	$M_2 = x+y'+z$	0
0	1	1	$m_3 = x'yz$	$M_3 = x+y'+z'$	1
1	0	0	$m_4 = xy'z'$	$M_4 = x'+y+z$	0
1	0	1	$m_5 = xy'z$	$M_5 = x'+y+z'$	0
1	1	0	$m_6 = xyz'$	$M_6 = x'+y'+z$	1
1	1	1	$m_7 = xyz$	$M_7 = x'+y'+z'$	1

$$f(x,y,z) = \sum m(1,3,6,7) = \prod M(0,2,4,5)$$

$$f = \boxed{x'y'z + x'yz + xyz' + xyz}$$

$$= \boxed{(x+y+z)\cdot(x+y'+z)\cdot(x'+y+z)\cdot(x'+y+z')}$$

ب) پس از ساده سازی تابع را به فرم حاصل جمع حاصل ضرب ها (SOP) و حاصل ضرب حاصل جمع ها (POS) با کمترین تعداد گیت بیان کنید.

$\longrightarrow \quad f = x'y'z + x'yz + xyz' + xyz$

$= x'z\underbrace{(y+y')} + xy\underbrace{(z+z')}$ عکس توزیع • به +

$= x'z\cdot 1 + xy\cdot 1$ $\qquad a+a'=1$

$= \boxed{x'z + xy}$ SOP $\qquad a\cdot 1=a$

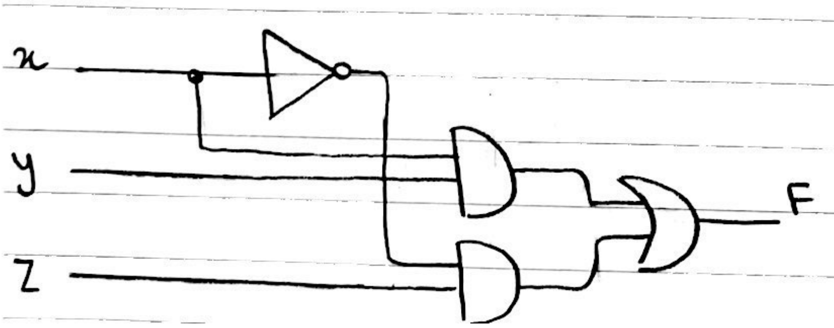
$= \boxed{(x'+y)(x+z)}$ POS $\qquad$ theorem for factoring

پ) تابع را با کمترین تعداد گیت های پایه پیاده سازی کنید.

در هر دو حالت POS و SOP تعداد گیت ها برابر ۴ عدد است.

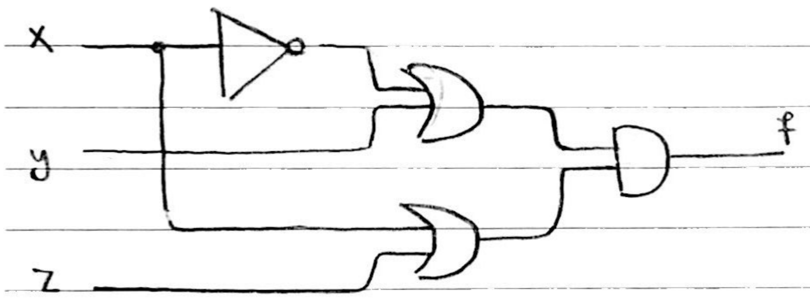
$f = x'z + xy$

فرم SOP :



۴- ب) فرم POS :

$f = (x' + y)(x + z)$



بخش سوم: سؤالات امتیازی

۵ـ تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(a,b,c,d) = \sum m\,(0,2,5,7,8,10,13,15)$$

الف) عبارت بهترین ساده شده این تابع را بدست آورید.

ابتدا مینترم های مورد نظر را به دست می آوریم:

	۸	۴	۲	۱	
	a	b	c	d	minterm
0:	0	0	0	0	$a'b'c'd' = m_0$
2:	0	0	1	0	$a'b'cd' = m_2$
5:	0	1	0	1	$a'bc'd = m_5$
7:	0	1	1	1	$a'bcd = m_7$
8:	1	0	0	0	$ab'c'd' = m_8$
10:	1	0	1	0	$ab'cd' = m_{10}$
13:	1	1	0	1	$abc'd = m_{13}$
15:	1	1	1	1	$abcd = m_{15}$

$$f = \overbrace{a'b'c'd' + a'b'cd'}^{a'b'd'(c+c')} + \overbrace{a'bc'd + a'bcd}^{a'bd(c+c')} + \overbrace{ab'c'd' + ab'cd'}^{ab'd'(c+c')} + \underbrace{abc'd + abcd}_{abd(c+c')}$$

$$= a'b'd' + a'bd + ab'd' + abd$$

$x \cdot 1 = x$
$x + x' = 1$
عکس توزیع ۰ به +

$$= b'd'(a+a') + bd(a+a')$$

عکس توزیع ۰ به +

$$= \boxed{b'd' + bd}$$

$x + x' = 1$
$x \cdot 1 = x$

ب) آیا می‌توان عبارت ساده شده در بخش الف را به صورت تمام NAND رسم کرد؟ در صورت امکان آن را رسم کنید.

بله، زیرا NAND ، universal gate می‌باشد.

$$f = b'd' + bd \underset{\text{دمورگان}}{=} \Big((b+d)\cdot(b'+d')\Big)' = \Big((b'\cdot d')'\cdot(b\cdot d)'\Big)'$$

$$= \Big(\big((b\cdot 1)'\cdot(d\cdot 1)'\big)'\cdot(b\cdot d)'\Big)'$$

Subject:

$$f = \left(\left((b.b)'.(d.d)'\right)'.(b.d)'\right)'$$