Thème Logique des prédicats

Vision sémantique.
Représentation des connaissances

Exercice 1 Soit la formule bien formée du calcul des prédicats : $G = \forall x.\exists y.p(x, y)$, déterminer la sémantique de G dans les différentes interprétations (modèles) suivantes.

Domaine	Prédicat
$\mathbb{N}$	$x \geq y$
$\mathbb{N}$	$x > y$
$\mathbb{Z}$	$x > y$
Humanité	y est le père de x

Exercice 2 Exprimer sous la forme d'une formule bien formée de la logique des prédicats les énoncés suivants :

1. Tous les hommes sont intelligents.
2. Pierre est intelligent.
3. Aucun homme n'est intelligent.
4. Seuls les hommes sont intelligents.
5. Tous les hommes sont soit beaux, soit intelligents.
6. Certains hommes sont intelligents ou beaux.
7. Une condition nécessaire pour que x soit premier est qu'il soit impair ou qu'il soit égal à 2.
8. Il existe un homme qui aime les chiens.
9. Personne ne connait tout le monde.
10. Toute personne connaît au moins une personne.
11. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.
12. Tout le monde a un père. Le grand-père paternel est le père du père. Donc tout le monde a un grand-père paternel.

Exercice 3 Nous souhaitons modéliser l'arithmétique des entiers naturels en exploitant des relations. Nous nous appuyons sur l'approche de Peano exploitant la constante 0 et l'opération d'incrémentation +1.

Notons :

- p_entier est le prédicat unaire de typage ;
- p_zero est le prédicat unaire valide si la valeur de son paramètre est zéro ;
- p_succ est le prédicat binaire valide si la valeur du second paramètre est égale à la valeur du premier augmentée de 1 ;
- $p\_egalite$ est le prédicat binaire valide si la valeur du second paramètre est égale à la valeur du premier ;
- p_somme est le prédicat ternaire valide si la valeur du dernier paramètre est égale à la somme des valeurs des deux premiers.

1. Définir les prédicats unaires p_un et p_deux valides si la valeur de leurs paramètres respectifs sont un et deux.
2. Définir le prédicat $p\_egalite$ de manière inductive (par récurrence) selon les valeurs de ses paramètres.
3. Définir le prédicat p_somme de manière inductive (par récurrence) selon les valeurs de son premier paramètre.

Exercice 4 Nous souhaitons maintenant modéliser l'arithmétique des entiers naturels en exploitant des relations et des termes.

Notons :

- c_zero, c_un, c_deux sont les constantes de valeur zéro, un et deux ;
- f_succ est la fonction unaire dont la valeur est égale à la valeur de son paramètre augmentée de 1 ;
- f_somme est la fonction binaire la valeur est égale à la somme des valeurs de ses deux paramètres.

1. Etablir les relations entre les prédicats et les termes.
2. Définir le prédicat $p\_egalite$ de manière inductive (par récurrence) selon les valeurs de ses paramètres modélisés comme des termes.
3. Définir la fonction f_somme de manière inductive (par récurrence) selon les valeurs de son premier paramètre modélisé comme un terme.

Exercice 5 Montrer que la formule bien formée de la logique des prédicats suivante est valide ou non valide, consistante ou non consistante en utilisant la relation d'équivalence sémantique des formules bien formées:

$$\forall x.\ p(x) \rightarrow \exists x.\ p(x)$$

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

1 Logique des prédicats : Vision sémantique

1.1 Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même sémantique, c'est à dire sont valides sémantiquement pour les mêmes modèles $(\forall \mathcal{M}, (\mathcal{M} \models \varphi) \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \psi))$.

$\mathcal{U} \neq \emptyset$	$\forall x.\ \varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{U}} \varphi$	$\exists x.\ \varphi = \bigvee_{x \in \mathcal{U}} \varphi$
$\mathcal{U} = \emptyset$	$\forall x.\ \varphi = \top$	$\exists x.\ \varphi = \bot$

$\forall x.\ \varphi = \varphi$	$x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset$
$\exists x.\ \varphi = \varphi$	$x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset$
$\forall x.\ \varphi = \forall y.\ [y/x]\,\varphi$	y inutilisée
$\exists x.\ \varphi = \exists y.\ [y/x]\,\varphi$	y inutilisée
$\forall x.\ (\forall y.\ \varphi) = \forall y.\ (\forall x.\ \varphi)$	
$\exists x.\ (\exists y.\ \varphi) = \exists y.\ (\exists x.\ \varphi)$	
$\neg(\forall x.\ \varphi) = \exists x.\ (\neg\varphi)$	
$\neg(\exists x.\ \varphi) = \forall x.\ (\neg\varphi)$	
$\forall x.\ (\varphi \to \psi) = (\exists x.\ \varphi) \to \psi$	$x \notin VL(\psi)$
$\forall x.\ (\varphi \to \psi) = \varphi \to (\forall x.\ \psi)$	$x \notin VL(\varphi)$
$\exists x.\ (\varphi \to \psi) = (\forall x.\ \varphi) \to \psi$	$x \notin VL(\psi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset$
$\exists x.\ (\varphi \to \psi) = \varphi \to (\exists x.\ \psi)$	$x \notin VL(\varphi) \wedge \mathcal{U} \neq \emptyset$
$\forall x.\ (\varphi \wedge \psi) = (\forall x.\ \varphi) \wedge (\forall x.\ \psi)$	
$\forall x.\ (\varphi \vee \psi) = (\forall x.\ \varphi) \vee \psi$	$x \notin VL(\psi)$
$\exists x.\ (\varphi \vee \psi) = (\exists x.\ \varphi) \vee (\exists x.\ \psi)$	
$\exists x.\ (\varphi \wedge \psi) = (\exists x.\ \varphi) \wedge \psi$	$x \notin VL(\psi)$