TD 1 Probabilités - Probabilités élémentaires - 1SN

Loi Binomiale

Exercice 1. On lance k fois un dé régulier à p faces (numérotées de 1 à p). Quelle est la probabilité d'avoir :

1) au plus un 1
2) au moins un 1
3) exactement i fois 1, avec $0 \leq i \leq k$.

Exercice 2. Un laboratoire doit analyser N prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. On admet que pour un prélèvement quelconque, la probabilité qu'il contienne le corps C est p. On pose $q = 1 - p$ et on suppose que les prélèvements sont indépendants.

On répartit les prélèvements en g groupes d'effectif n ($N = ng$) et pour chaque groupe, on constitue un mélange à l'aide de quantités égales de chacun des n prélèvements. Si ce mélange ne contient pas le corps C, une seule analyse aura établi qu'aucun des n prélèvements du groupe ne contient le corps C. Si ce mélange contient le corps C, il faut alors analyser séparément les n prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent le corps C : le nombre d'analyses faites pour le groupe est alors $n + 1$.

On désigne par X le nombre total d'analyses effectuées. Quelles sont les valeurs possibles de X ? Que représente $Y = \frac{X-g}{n}$? Déterminer les valeurs possibles de Y et les probabilités associées.

Probabilités conditionnelles

Exercice 3. Un paquet de 8 cartes est composé de 4 as et de 4 rois. On tire deux cartes de ce jeu et on cherche la probabilité P pour que ces deux cartes soient des as.

1) Déterminer P en considérant qu'un résultat d'expérience est une suite ordonnée de deux éléments pris sans répétition dans l'ensemble $\{AP, AT, AC, AK, RP, RT, RC, RK\}$.
2) Déterminer P en considérant qu'un résultat d'expérience est un sous-ensemble (suite non ordonnée) de deux éléments inclu dans $\{AP, AT, AC, AK, RP, RT, RC, RK\}$.
3) Déterminer P en utilisant les probabilités conditionnelles.

Exercice 4. Un paquet de 8 cartes est composé de 4 as et de 4 rois. On tire deux cartes de ce jeu. Calculer la probabilité pour que ces deux cartes soient des as

1) lorsqu'on ne sait rien a priori sur les deux cartes
2) lorsqu'on sait que l'une d'elles est un as
3) lorsqu'on sait que l'une d'elles est l'as de pique
4) lorsqu'on sait que la première est un as
5) lorsqu'on sait que la première est l'as de pique

Applications aux sciences du numérique

Exercice 5 : Bit 0 ou 1 ?

Soit une source d'information binaire émettant une suite de bits indépendants avec $P(0) = 0.3$ et $P(1) = 0.7$. Ces informations binaires sont transmises vers un récepteur à travers deux canaux de transmissions distincts et indépendants. Ceux-ci sont perturbés de sorte qu'une probabilité d'erreur apparaît sur les deux canaux (on fera les applications numériques avec $P_{e_1} = 10^{-7}$ et $P_{e_2} = 2.10^{-7}$). A un certain instant, on reçoit de la première liaison un "0" et on reçoit de la deuxième liaison un "1". On cherche celui des bits "0" ou "1" qui a le plus de chance d'avoir été émis.

1) On appelle z_1 la sortie de la première liaison, z_2 la sortie de la deuxième liaison et b le bit émis. Déterminer $P[z_1 = 0|b = 0]$, $P[z_1 = 0|b = 1]$, $P[z_2 = 0|b = 0]$ et $P[z_2 = 0|b = 1]$.

2) Déterminer $P[b = 0|z_1 = 0, z_2 = 1]$ et $P[b = 1|z_1 = 0, z_2 = 1]$ et conclure.

Exercice 6 : Codage correcteur d'erreurs

Pour se prémunir des erreurs de transmission introduites par un canal de transmission numérique, on utilise un codage des symboles binaires. On désire étudier l'influence de ce codage sur la probabilité d'erreur pour un bloc d'information de k bits.

1) On note q la probabilité d'erreur pour un bit. Les erreurs étant supposées indépendantes, quelle est la probabilité d'erreur P_1 par mot de k bits sans codage ?

2) On effectue un codage en bloc pour lequel k bits d'information sont codés par des mots de n bits. On suppose que le code est capable de corriger jusqu'à t erreurs par mot de n bits (les mots possédant moins de t erreurs seront corrigés tandis que les autres seront transmis avec des erreurs). On note toujours q la probabilité d'erreur pour un bit. Quelle est la probabilité d'erreur P_2 associée à un mot de n bits ?

Réponses

Exercice 1

La probabilité d'avoir i fois 1 sur k lancers est

$$P_i = \binom{k}{i} \left(\frac{1}{p}\right)^i \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k-i}, \quad i = 1, ..., k \tag{1}$$

avec $\binom{k}{i} = \frac{k!}{i!(k-i)!}$, d'où

1. $P_0 + P_1$
2. $1 - P_0$
3. P_i

Exercice 2

X est à valeurs dans $\{g, g+n, g+2n, ..., g+gn\}$

Y représente le nombres de groupes contenant le corps C donc

$$P[Y = k] = \binom{g}{k} (P_g)^i (1 - P_g)^{g-k} \qquad k = 0, ..., g$$

où P_g est la probabilité qu'un groupe contienne le corps C, i.e., $P_g = 1 - q^n$.

Exercice 3

1)

$$P = \frac{\mathcal{A}_4^2}{\mathcal{A}_8^2}$$

2)

$$P = \frac{\mathcal{C}_4^2}{\mathcal{C}_8^2}$$

3)

$$\begin{aligned} P &= P\left[\ 2^{\text{ème}} \text{ As}\middle|\, 1^{\text{ère}} \text{ As}\right] P\left[1^{\text{ère}} \text{ As}\right] \\ &= \frac{3}{7}\frac{1}{2} = \frac{3}{14} \end{aligned}$$

Exercice 4

1) D'après l'exercice précédent

$$\frac{3}{14}$$

2)

$$\begin{aligned} \frac{P(2 \text{ As})}{1 - P(2 \text{ Rois})} &= \frac{3/14}{1 - 3/14} \\ &= \frac{3}{11} \end{aligned}$$

3)

$$\frac{P(2 \text{ As dont l'As de Pique})}{P(\text{l'une d'elle est l'As de Pique})} = \frac{3}{7}$$

4)

$$\frac{P(2 \text{ As})}{P(1^{\text{ère}} \text{ est un As})} = \frac{3}{7}$$

5)

$$\frac{P(2 \text{ As})}{P(1^{\text{ère}} \text{ est l'As de Pique})} = \frac{3}{7}$$

Exercice 5

On appelle b la sortie du premier canal et c la sortie du deuxième canal

$$\begin{aligned}
P\left[\ 0 \text{ émis} \middle|\, b=0, c=1\right] &= \frac{P\left[\ b=0, c=1 \middle|\, 0 \text{ émis}\right] P\left[0 \text{ émis}\right]}{P\left[b=0, c=1\right]} \\
&= \frac{P\left[\ b=0, c=1 \middle|\, 0 \text{ émis}\right] P\left[0 \text{ émis}\right]}{P\left[\ b=0, c=1 \middle|\, 0 \text{ émis}\right] P\left[0 \text{ émis}\right] + P\left[\ b=0, c=1 \middle|\, 1 \text{ émis}\right] P\left[1 \text{ émis}\right]} \\
&= \frac{\left(1-10^{-7}\right)\left(2.10^{-7}\right)(0.3)}{\left(1-10^{-7}\right)\left(2.10^{-7}\right)(0.3) + \left(1-2.10^{-7}\right)\left(10^{-7}\right)(0.7)} = 0.46
\end{aligned}$$

d'où $P\left[\ 1 \text{ émis} \middle|\, b=0, c=1\right] = 1 - 0.46 = 0.54$

C'est donc le bit 1 qui a le plus de chances d'avoir été émis.

Exercice 6

1)

$$P_1 = 1 - P\left[0 \text{ erreur}\right] = 1 - (1-q)^k$$

2)

$$P_2 = \sum_{i=t+1}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i}$$