Spécification Algébrique. Induction Structurelle.

Soit un ensemble A donné, l'ensemble $liste(A)$ des listes contenant des éléments de A est défini par les opérateurs `Nil` et `Cons` comme le **plus petit** ensemble de termes tels que :

1. $\texttt{Nil} \in \texttt{liste}(A)$
2. $\forall t \in A.\forall q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{Cons}(t, q) \in \texttt{liste}(A)$

Cette définition est équivalente à : $\texttt{liste}(A) = \{\texttt{Nil}\} \cup \{\texttt{Cons}(t, q) \mid t \in A, q \in \texttt{liste}(A)\}$.

Exercice 1 La concaténation de deux listes est définie sous la forme d'équations entre termes :

$$\text{(a) } \forall y \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{append}(\texttt{Nil}, y) = y$$
$$\text{(b) } \forall x \in A.\forall y, z \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{append}(\texttt{Cons}(x, z), y) = \texttt{Cons}(x, \text{append}(z, y))$$

a. En utilisant les équations (a) et (b), transformer le terme t :

$$\text{append}(\texttt{Cons}(1, \texttt{Cons}(2, \texttt{Nil})), \texttt{Cons}(3, \texttt{Nil}))$$

en un terme ne contenant que les symboles `Nil` et `Cons`, qui est appelé la **forme normale** de t.

b. montrer par induction que :

$$\forall x \in \texttt{liste}(A).\ \text{append}(x, \texttt{Nil}) = x$$

c. montrer par induction que :

$$\forall x, y, z \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{append}(x, \text{append}(y, z)) = \text{append}(\text{append}(x, y), z)$$

Exercice 2 Soit la définition suivante de la fonction rev :

$$\text{(c) rev}(\texttt{Nil}) = \texttt{Nil}$$
$$\text{(d) } \forall x \in A.\forall y \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{rev}(\texttt{Cons}(x, y)) = \text{append}(\text{rev}(y), \texttt{Cons}(x, \texttt{Nil}))$$

a. montrer par induction que :

$$\forall x \in \texttt{liste}(A).\ \ \text{rev}(\text{rev}(x)) = x$$

en introduisant éventuellement des lemmes intermédiaires.

[0] La formule "$\forall x \in D.P$" est un raccourci syntaxique pour "$\forall x.(x \in D \to P)$".