コンピュータサイエンス第２

暗号：フォローアップ

換字(かえじ)暗号

シーザー暗号：各文字をアルファベット上で k**字シフト換字**(k 字先の文字に換えること)して暗号を作る暗号方式のこと.

例) $k = 3$　英小文字だけを対象とする

Good		bye !			a	b	c	d	e	f	g	h	...	w	x	y	z								
	↓				↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	↓	↓	↓								
Grrg		ebh !			d	e	f	g	h	i	j	...		z	a	b	c								

暗号解読

- 頻度配列を使う. eが英文に最も頻繁に現れる

鍵の種類：26個

⟹　実は，復号を26回試せば，平文が得られる

換字(かえじ)暗号

アルファベット順でない換字

Hellow !

↓

Hdjjow!

a	b	c	d	e	f	g	h	...	w	x	y	z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	↓	↓	↓
m	i	n	a	d	e	b	c	...				

この表が鍵

鍵の種類: 26! 個

⇒ 全てを試すのは非現実的

暗号解読

- 頻度配列を使う暗号解読ができる

換字(かえじ)暗号

周期換字暗号:変換規則が周期的に切り替わる

例) シーザー暗号を元にした周期換字

$k_1 = 3$, $k_2 = 5$

i 番目の文字を $k_1 + i \times k_2$ 字シフト換字

鍵の種類: 26 × 26個

暗号解読

- 26 × i番目の文字だけ考える

$$(k_1 + 26 \times i \times k_2) \ \% \ 26 = k_1$$

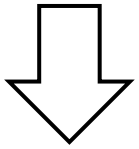
- i番目とi+1 番目の文字を考える

転置暗号

転置暗号：文字の位置を置き換える

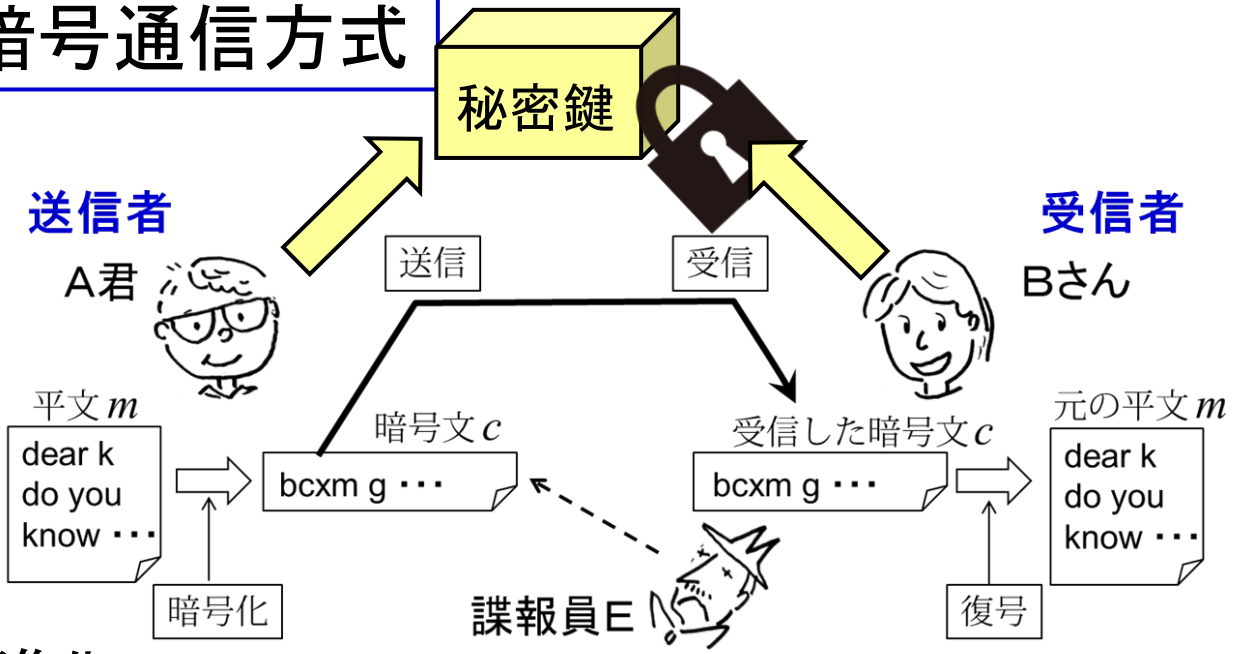
例）各行を10文字にして，左から縦に読む

```
0123456789
Tokyo Inst
itute of T
echnology
```



Tieotckuhytnoeo lloonfgs y tT

4. 現代の暗号通信方式



暗号方式の進化

シーザー暗号: ローマ皇帝シーザーが使ったと言われる方式
エニグマ: 第二次世界大戦時にドイツ軍が使った方式
DES, AES: 現在使われている代表的な暗号方式

1980 年頃

秘密鍵暗号方式

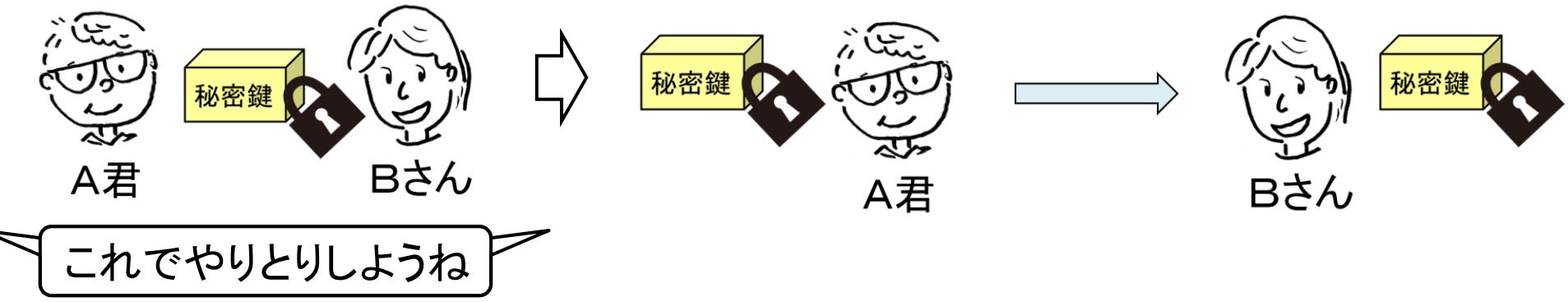
公開鍵暗号方式

公開鍵・・・皆に知らせてよい鍵，暗号化に使う

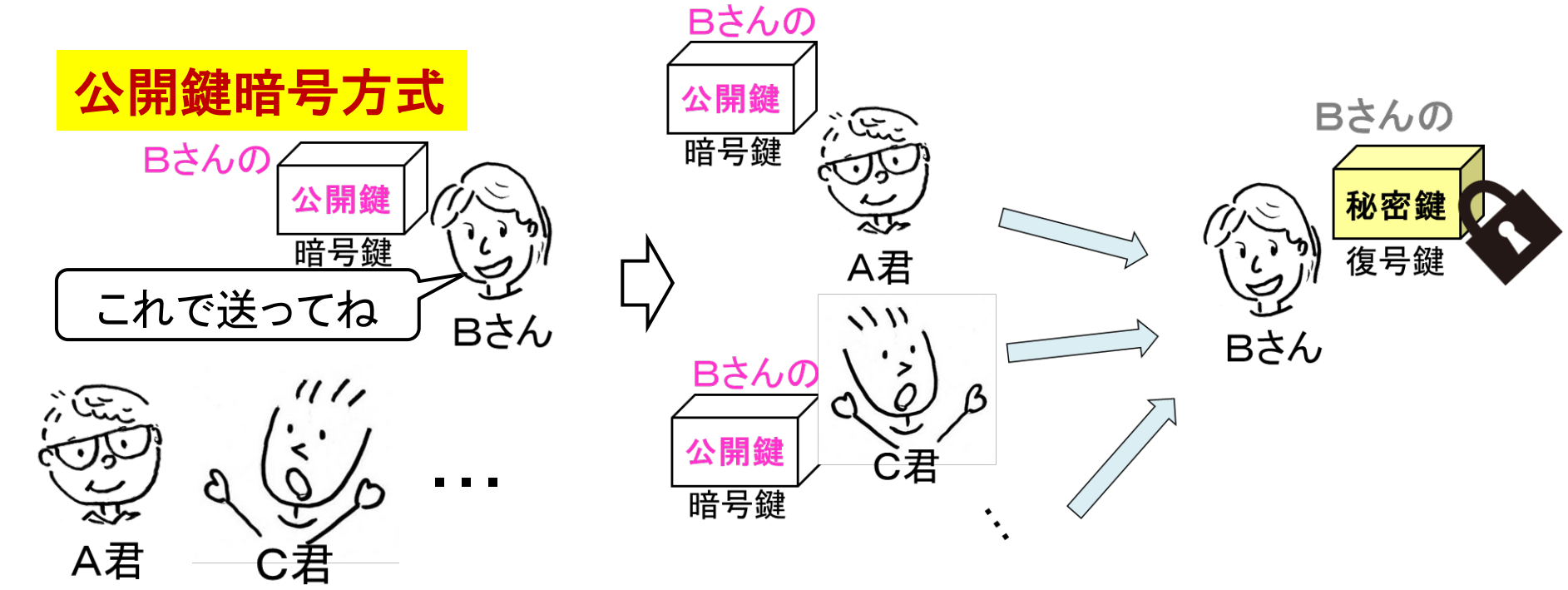
秘密鍵・・・復号に使う

4. 現代の暗号通信方式

秘密鍵暗号方式



公開鍵暗号方式



RSA暗号(1977年)

RSA（Rivest-Shamir-Adleman, リベスト-シャミア-エーデルマン）暗号

剰余演算，特に，フェルマーの小定理が基礎

フェルマーの小定理

p は素数，a は p の倍数でない整数

$$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

剰余演算の復習

分配則

$(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$

$ab \bmod n = ((a \bmod n) \times (b \bmod n)) \bmod n$

$a^k \bmod n = (a \bmod n)^k \bmod n$

記法

$a = b \pmod n$

$\Leftrightarrow$

$a \bmod n = b \bmod n$

RSA暗号: 鍵生成

1. 大きい素数 p と q $(p \neq q)$ を選ぶ
2. $n = pq$
3. 暗号化用の鍵 e を $(p - 1)(q - 1)$ と互いに素になるように選ぶ
4. ユークリッドの互除法で, 以下の等式を満たす 復号用の鍵 d を求める

   $ed = 1 \bmod (p - 1)(q - 1)$
5. 公開鍵: e と n

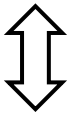
   秘密鍵: d

RSA暗号:鍵 d の求め方

鍵　e と (p – 1)(q – 1)　は互いに素

ユークリッドの互除法で, 以下の等式を満たす鍵 d を求める

$$e\,d = 1 \bmod (p-1)(q-1)$$



$$e\,d + (p-1)(q-1)\,k = 1 = \gcd(e, (p-1)(q-1))$$

互除法で 1次不定方程式の整数解 x, y を求めれば良い

$$a\,x + b\,y = 1$$

ただし,　a = e, b = (p – 1)(q– 1)

RSA暗号：暗号化と復号

暗号化

1. 平文を n より小さいブロックに分ける
2. 一つのブロックを m とする
3. 暗号文のブロック c を下の式で計算

$$c = m^e \mod n$$

復号

$$m = c^d \mod n$$

例：RSA暗号

1. 素数： p = 3, q=17, n= pq = 51
2. (p – 1)(q – 1) = 2 × 16 = 32
3. e = 13 とする

問題

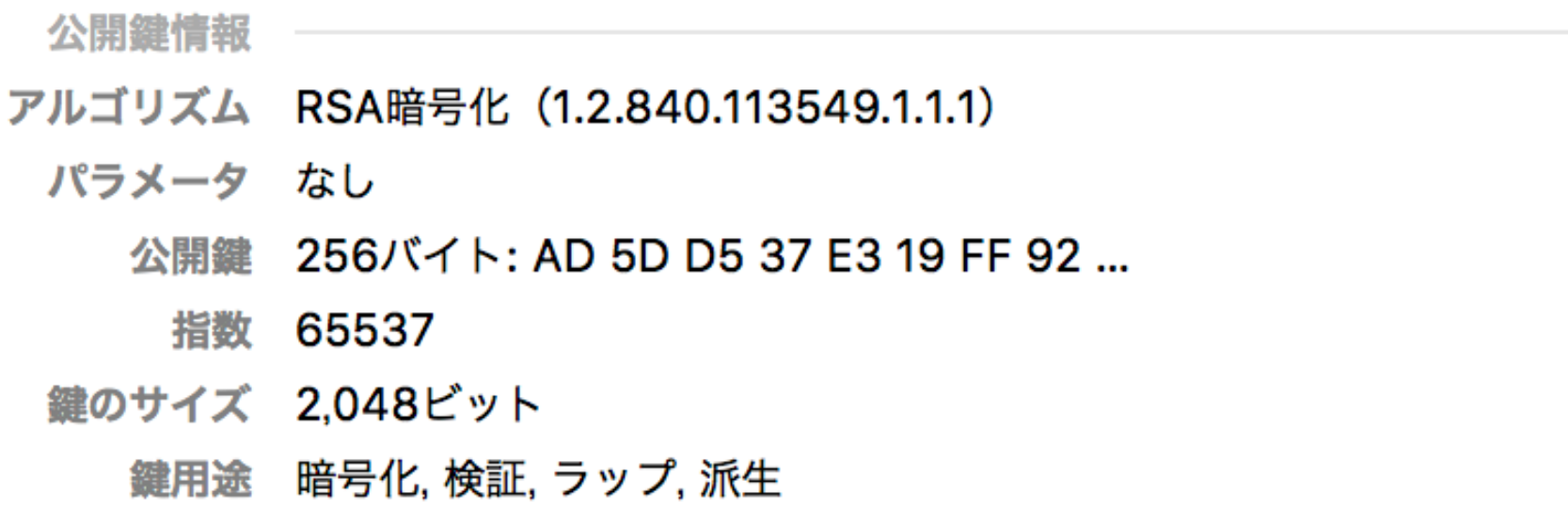
- d を求めよ
- 整数 2 を暗号化せよ
- 暗号化した数を復号すると 2 に戻ることを確認せよ

RSA暗号の公開鍵を見てみよう！：Windows Edge

1. ウェブブラウザーで
   https://www.yahoo.co.jp/
   を開く
2. 鍵のマークが暗号を使っていることを表している.
3. 鍵をクリック
4. 証明書をクリック
5. 詳細をクリック

RSA暗号の公開鍵を見てみよう！: Mac Safari

1. ウェブブラウザーで
   https://www.yahoo.co.jp/
   を開く
2. 鍵のマークが暗号を使っていることを表している.
3. 鍵をクリック
4. 証明書をクリック
5. 詳細な情報をクリック



RSA暗号：正当性

暗号化　　$c = m^e \mod n$

復号　　$m' = c^d \mod n$

公開鍵で暗号化し，秘密鍵で復号すると元に戻る

正当性：　　$m' = m$

m' を計算すると

$$m' = c^d \mod n$$
$$= (m^e \mod n)^d \mod n$$
$$= m^{ed} \mod n$$

よって以下を示す

$$m^{ed} = m \pmod n$$

$m^{ed} = m \pmod{n}$ の証明

$m^{ed} = m \pmod{p}$ を示す

- m が p の倍数の時: すなわち $m = 0 \pmod{p}$

  $m^{ed} = 0 \pmod{p}$ が成立

- m が p の倍数でない時

$$m^{ed} = m^{k(p-1)(q-1)+1}$$
$$= m\,(m^{(p-1)})^{k(q-1)}$$
$$= m \pmod{p}$$

$\because ed = 1 \bmod (p-1)(q-1)$

赤の部分にフェルマーの小定理

p は素数，a は p の倍数でない
$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$

$m^{ed} = m \pmod{n}$ の証明

$$m^{ed} = m \pmod{p}$$

同様にして

$$m^{ed} = m \pmod{q}$$

よって

$$m^{ed} = m \pmod{pq} = m \pmod{n}$$

RSA暗号：なぜ安全と考えられているか？

公開鍵： e と n

n を素因数分解できると

⇒ p, q が分かってしまう

⇒ 解読できる

なぜ安全と考えられているか？

「大きな整数の素因数分解が難しい」と考えられている

RSA Factoring Challenge

2009年: RSA-768, 768bitの数が素因数分解された
2000 CPU year

課題2: RSA 暗号

公開鍵が n= 91, e=5 の時，暗号文 c=2 を解読せよ.

- 締め切り: 12月21日 22:00
- PDFファイル
  - 手書きをスキャンしたものでもOK
  - 途中の計算をある程度書くこと