換字(かえじ)暗号

シーザー暗号: **各文字をアルファベット上で** ***k*字シフト換字** **(k 字先の文字に換えること)して暗号を作る暗号方式のこと.**

例) $k = 3$ 英小文字だけを対象とする

Good bye !
↓
Grrg ebh !

a	b	c	d	e	f	g	h	...	w	x	y	z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	↓	↓	↓
d	e	f	g	h	i	j	...		z	a	b	c

暗号解読

- 頻度配列を使う. eが英文に最も頻繁に現れる

鍵の種類: 26個

⇨ 実は, 復号を26回試せば, 平文が得られる

換字(かえじ)暗号

アルファベット順でない換字

Hellow !
↓
Hdjjow!

a	b	c	d	e	f	g	h	…	w	x	y	z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	…	↓	↓	↓	↓
m	i	n	a	d	e	b	c	…				

この表が鍵

鍵の種類: 26! 個

全てを試すのは非現実的

暗号解読
- 頻度配列を使う暗号解読ができる

換字（かえじ）暗号

周期換字暗号：変換規則が周期的に切り替わる

例）シーザー暗号を元にした周期換字

$k_1 = 3$, $k_2 = 5$

i 番目の文字を $k_1 + i \times k_2$ 字シフト換字

鍵の種類: 26 × 26個

暗号解読

- 26 × i番目の文字だけ考える

$$(k_1 + 26 \times i \times k_2) \% 26 = k_1$$

- i番目とi+1 番目の文字を考える

転置暗号

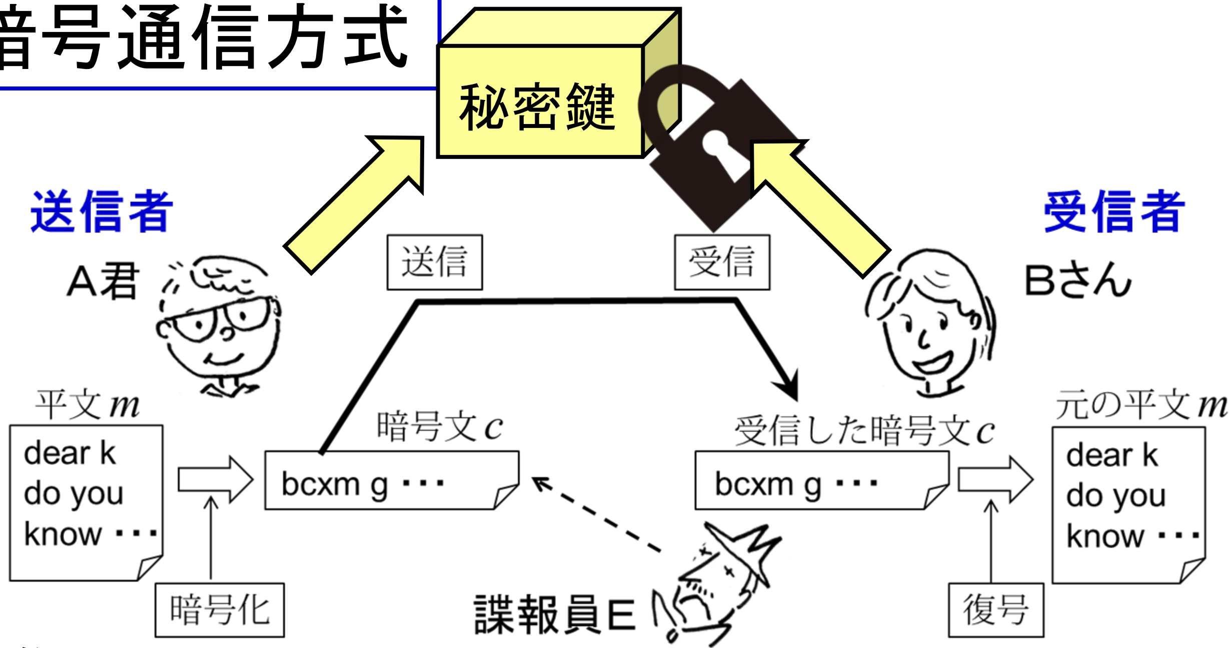
転置暗号：文字の位置を置き換える

例）各行を10文字にして，左から縦に読む

```
0123456789
Tokyo Inst
itute of T
echnology
```

Tieotckuhytnoeo Iloonfgs y tT

4. 現代の暗号通信方式



暗号方式の進化

シーザー暗号: ローマ皇帝シーザーが使ったと言われる方式
エニグマ: 第二次世界大戦時にドイツ軍が使った方式
DES, AES: 現在使われている代表的な暗号方式

秘密鍵暗号方式

1980 年頃

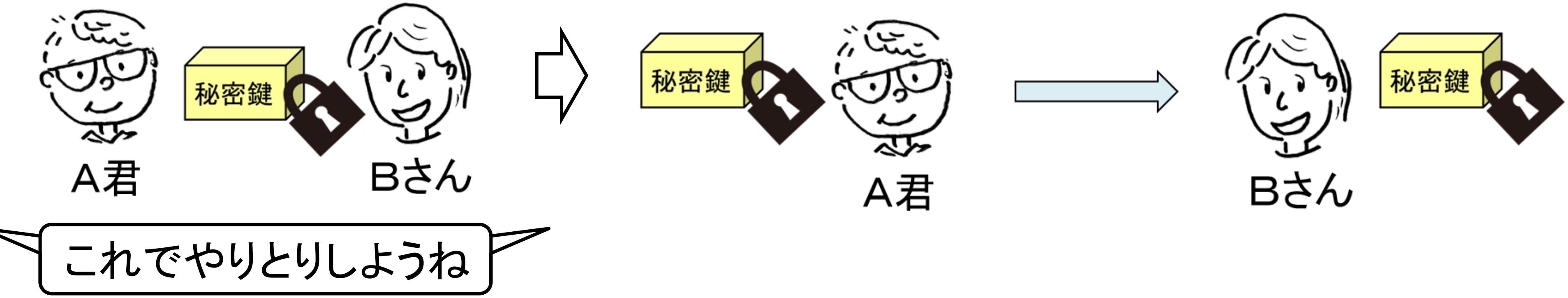
公開鍵暗号方式

公開鍵・・・皆に知らせてよい鍵，暗号化に使う

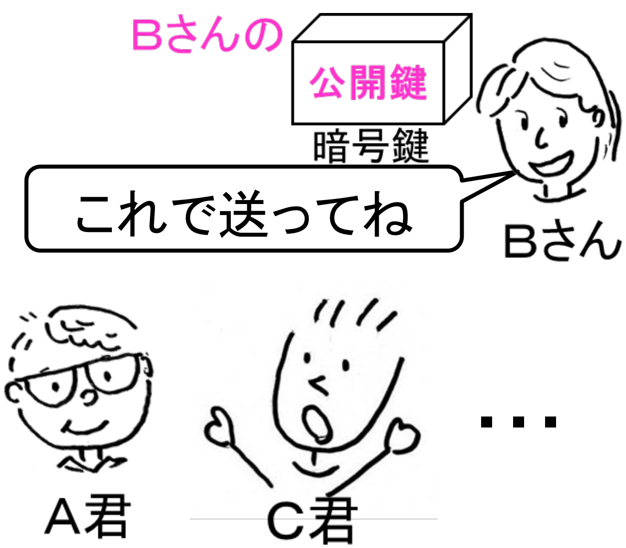
秘密鍵・・・復号に使う

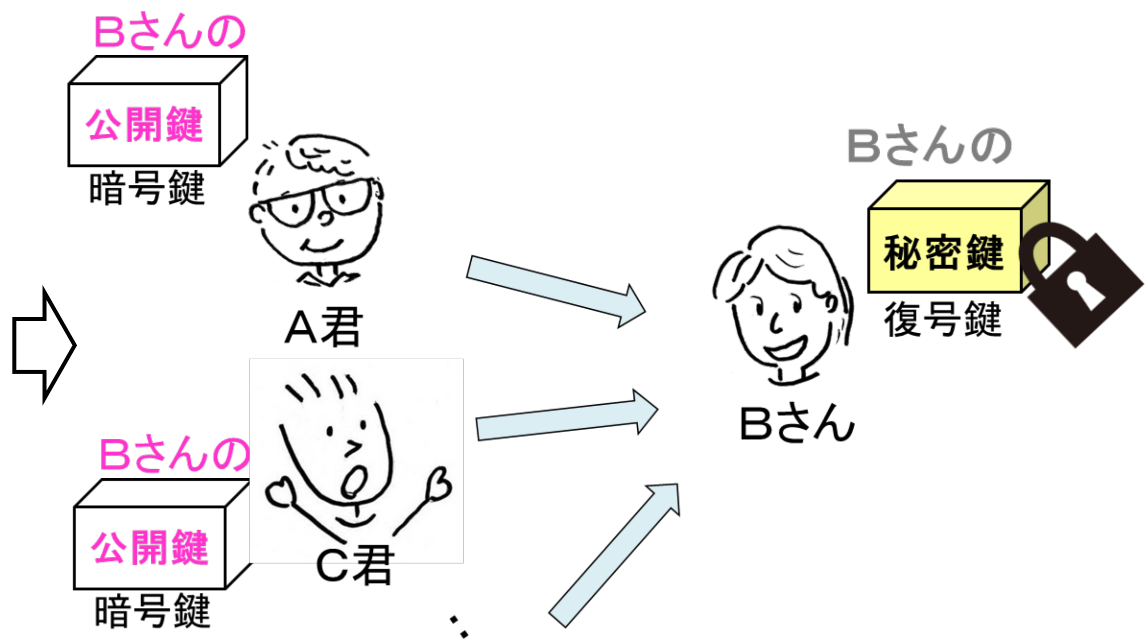
4. 現代の暗号通信方式

秘密鍵暗号方式



公開鍵暗号方式





RSA暗号(1977年)

RSA（Rivest-Shamir-Adleman, リベスト-シャミア-エーデルマン）暗号

剰余演算，特に，フェルマーの小定理が基礎

フェルマーの小定理

p は素数， a は p の倍数でない整数

$$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$$

剰余演算の復習

分配則

$$(a+b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$$

$$ab \bmod n = ((a \bmod n) \times (b \bmod n)) \bmod n$$

$$a^k \bmod n = (a \bmod n)^k \bmod n$$

記法

$$a = b \pmod{n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a \bmod n = b \bmod n$$

RSA暗号: 鍵生成

1. 大きい素数 p と q $(p \neq q)$ を選ぶ
2. $n = pq$
3. 暗号化用の鍵 e を $(p-1)(q-1)$ と互いに素になるように選ぶ
4. ユークリッドの互除法で, 以下の等式を満たす 復号用の鍵 d を求める

   $ed = 1 \bmod (p-1)(q-1)$
5. 公開鍵: e と n

   秘密鍵: d

RSA暗号:鍵 d の求め方

鍵　e と (p – 1)(q – 1)　は互いに素

ユークリッドの互除法で, 以下の等式を満たす鍵 d を求める

$$e\,d = 1 \bmod (p-1)(q-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$e\,d + (p-1)(q-1)\,k = 1 = \gcd(e, (p-1)(q-1))$$

互除法で 1次不定方程式の整数解 x, y を求めれば良い

$$a\,x + b\,y = 1$$

ただし,　$a = e,\ b = (p-1)(q-1)$

RSA暗号：暗号化と復号

暗号化

1. 平文を n より小さいブロックに分ける
2. 一つのブロックを m とする
3. 暗号文のブロック c を下の式で計算

$$c = m^e \mod n$$

復号

$$m = c^d \mod n$$

例：RSA暗号

1. 素数： $p = 3$, $q=17$, $n= pq = 51$
2. $(p-1)(q-1) = 2 \times 16 = 32$
3. $e = 13$ とする

問題

- d を求めよ
- 整数 2 を暗号化せよ
- 暗号化した数を復号すると 2 に戻ることを確認せよ

RSA暗号の公開鍵を見てみよう！

1. ウェブブラウザーで
   https://www.yahoo.co.jp/
   を開く
2. 鍵のマークが暗号を使っていることを表している.
3. 鍵をクリック
4. 証明書をクリック
5. 詳細な情報をクリック

公開鍵情報

アルゴリズム	RSA暗号化（1.2.840.113549.1.1.1）
パラメータ	なし
公開鍵	256バイト: AD 5D D5 37 E3 19 FF 92 ...
指数	65537
鍵のサイズ	2,048ビット
鍵用途	暗号化, 検証, ラップ, 派生

RSA暗号：正当性

暗号化 $c = m^e \mod n$

復号 $m' = c^d \mod n$

公開鍵で暗号化し，秘密鍵で復号すると元に戻る

正当性： $m' = m$

m' を計算すると

$$
\begin{aligned}
m' &= c^d \mod n \\
&= (m^e \mod n)^d \mod n \\
&= m^{ed} \mod n
\end{aligned}
$$

よって以下を示す

$$m^{ed} = m \pmod n$$

$m^{ed} = m \pmod{n}$ の証明

$m^{ed} = m \pmod{p}$ を示す

- m が p の倍数の時: すなわち $m = 0 \pmod{p}$

  $m^{ed} = 0 \pmod{p}$ が成立

- m が p の倍数でない時

$$m^{ed} = m^{k(p-1)(q-1)+1}$$

∵ $ed = 1 \bmod (p-1)(q-1)$

$$= m\,(m^{(p-1)})^{k(q-1)}$$

赤の部分にフェルマーの小定理

$$= m \pmod{p}$$

p は素数，a は p の倍数でない
$a^{p-1} = 1 \pmod{p}$

$\boxed{m^{ed} = m \pmod{n}}$ の証明

$$m^{ed} = m \pmod{p}$$

同様にして

$$m^{ed} = m \pmod{q}$$

よって

$$m^{ed} = m \pmod{pq} = m \pmod{n}$$

RSA暗号：なぜ安全と考えられているか？

公開鍵:　e と n

n を素因数分解できると

⇒ p, q が分かってしまう

⇒ 解読できる

なぜ安全と考えられているか？

「大きな整数の素因数分解が難しい」と考えられている

RSA Factoring Challenge

2009年: RSA-768, 768bitの数が素因数分解された
2000 CPU year

RSA暗号：実際に鍵を作ってみよう

$ openssl genrsa 32 > private.txt

32ビットの鍵を作って，private.txt に保存する

$ cat private.txt

-----BEGIN RSA PRIVATE KEY-----
MC4CAQACBQDr1WRBAgMBAAECBQCs5O3BAgM
-----END RSA PRIVATE KEY-----

$ openssl rsa -text -in private.txt

Private-Key: (32 bit)

modulus: 3956630593 (0xebd56441) n=pq

publicExponent: 65537 (0x10001) e

privateExponent: 2900684225 (0xace4edc1) d

prime1: 63299 (0xf743) p

prime2: 62507 (0xf42b) q