

コンピュータサイエンス第2

南出 靖彦

第7回

今日の予定

- ▶ 宿題の解説
- ▶ 計算可能性理論と計算量理論
- ▶ 期末試験について
- ▶ アンケート

宿題 問題 1 : ポストの対応問題

$v_i = 10, 011, 101$ と $w_i = 101, 11, 011$ は, 解を持たない.

解があるとする

1. v_2 と w_2 からは始まらない.

$$v_2 = 011$$

$$w_2 = 11$$

2. v_3 と w_3 からは始まらない.

$$v_3 = 101$$

$$w_3 = 011$$

3. よって, v_1 と w_1 で始まる.

$$v_1 = 10$$

$$w_1 = 101$$

$v_i = 10, 011, 101$ と $w_i = 101, 11, 011$ は, 解を持たない.

3. よって, v_1 と w_1 で始まる.

$$v_1 = 10$$

$$w_1 = 101$$

4. 上段は, 次は 1 で始まる

▶ 10 と 101 の場合

$$v_1 v_1 = 1010$$

$$w_1 w_1 = 101101$$

となり, 失敗.

▶ 101 と 011 の場合

$$v_1 v_3 = 10101$$

$$w_1 w_3 = 101011$$

▶ 下段の方が 1 長く, 最後が 1

▶ v_1 と w_1 と同じ状況. これ以上続けても解は構成できない.

問題全体

- ▶ プログラムの停止性判定問題
- ▶ ディオファントス方程式の整数解存在判定問題
- ▶ 文字列の置換問題, ポストの対応問題

計算可能問題

有限時間で計算可能な問題

- ▶ プレスバーガー算術命題の真偽判定問題

NP 問題

一般に指数関数的に増加する有限の候補中の解の存在を問い, 解が示されれば確認は多項式時間で計算可能な問題

- ▶ ハミルトン閉路問題, 巡回セールスマン問題, 部分和问题

P 問題

(この境界線が未確定 : $P \neq NP$ 予想)

多項式時間で計算可能な問題

- ▶ オイラー閉路問題

P 問題

入力サイズの多項式オーダーの時間で答が求まる問題を **P 問題**と呼ぶ。

- ▶ P は Polynomial (多項式) の頭文字。
- ▶ 正確には, 問題 Ψ が P 問題であるとは次のようなプログラム A が存在することである。
- ▶ 多項式 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + c_1 x + x_0$ が存在して,
- ▶ 問題 Ψ に対するどんな入力 x に対しても,
- ▶ x を入力データとして A を実行開始すると
- ▶ $f(|x|)$ ステップ以内に停止して正しい答 (Yes/No) を出力する。
ただし $|x|$ は x の大きさ (文字列としての長さ)。

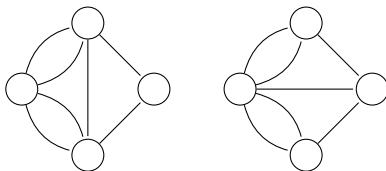
P 問題の例

【オイラー閉路問題】

入力 グラフ G

出力 G にオイラー閉路が存在するか否か

- ▶ すべての辺をちょうど1回ずつ通って出発点に戻る経路（出発点に戻る一筆書き）



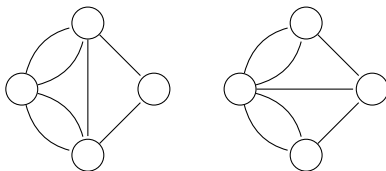
P 問題の例

【オイラー閉路問題】

入力 グラフ G

出力 G にオイラー閉路が存在するか否か

- ▶ すべての辺をちょうど1回ずつ通って出発点に戻る経路（出発点に戻る一筆書き）



グラフがオイラー閉路を持つ



全ての頂点の次数が偶数

- ▶ 次数：各頂点から出ている辺の本数

⇒ すべての頂点の次数が偶数か確認すれば良い.

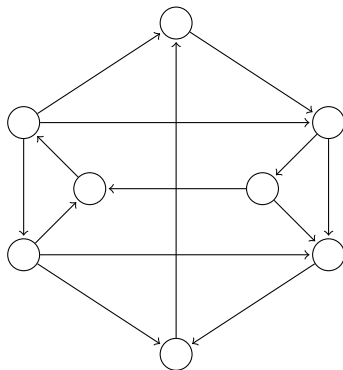
多項式時間で解けないと考えられている問題

【ハミルトン閉路問題】

入力 グラフ G

出力 G にハミルトン閉路が存在するか否か

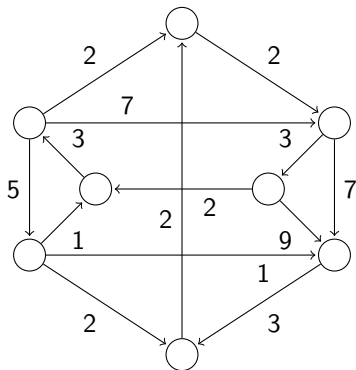
- ▶ すべての頂点をちょうど1回ずつ通って出発点に戻る経路



【巡回セールスマン問題】

入力 n 個の都市間の移動に要するコスト（時間または費用）の一覧 ($\frac{n(n-1)}{2}$ 個の自然数), および使用可能なコストを表す自然数 c

出力 すべての都市をちょうど 1 回ずつ訪れて出発点に戻ってきてその移動に要するコストの総和が c 以下になる経路が存在するか否か



【部分和問題】

入力 自然数 m , および自然数 a_1, a_2, \dots, a_n

出力 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の部分集合で全要素の和が m になるものが存在するか否か

NP 問題

問題 Ψ が **NP** 問題であるとは次の条件を満たすプログラム A が存在することである。

- ▶ NP は Non-deterministic (非決定性) Polynomial の頭文字。
- 1. A は非決定的な文 (「ふたつの文のうちどちらかを実行せよ」という命令) を含んでいてもよい。
 - ▶ したがって同じ入力で何回も実行すると、そのたびに実行結果が異なってもよい。
- 2. 多項式 $f(x)$ が存在して、問題 Ψ に対するどんな入力 x に対しても、 x を入力データとして A を実行開始すると、 $f(|x|)$ ステップ以内に停止して答を出力する。
- 3. その出力された答は次の条件を満たす。
 - ▶ 入力 x に対する正解が Yes の場合 : Yes を出力する可能性がゼロでない、つまり非決定的な部分でうまく選択をすれば Yes を出力することができる。
 - ▶ 入力 x に対する正解が No の場合 : 絶対に No を出力する、つまり非決定的な部分でどんな選択をしても No を出力する。

部分和問題は NP 問題

部分和問題を解く非決定性 Python もどきプログラム

```
print("和の目標を入力してください")
goal = int(input())
print("複数の自然数を空白で区切って入力してください")
a = list(map(int, input().split()))
n = len(a)
# 以上で入力自然数が goal と a[0],a[1],...,a[n-1] に入る
sum = 0
for i in range(n):
    次のどちらかを実行
        sum = sum + a[i]
    または
        sum = sum
# 以上で a[0],...,a[n-1] から非決定的に選んだひとつの部分集合の和が sum に
    入る
if (sum == goal):
    print("Yes")
else:
    print("No")
```

NP 問題（の中で難しい問題）はたいてい次の形をしている：

- ▶ 条件を満たす組み合わせが存在するか否かを Yes/No で答える
- ▶ 組み合わせは有限個なので全検索すれば正解が答えられる
- ▶ 組み合わせ総数は入力サイズに対して一般に指数関数的に増えるので、全検索の方法は多項式時間でできない。
- ▶ ただし、組み合わせがひとつだけ与えられた場合に「それが条件を満たしているか？」という計算は多項式時間でできる。

$P \neq NP$ 予想

- ▶ P 問題は定義上 NP 問題でもある。
- ▶ $P \neq NP$ 予想：逆（「 NP 問題は P 問題である」）は成り立たない。

$P \neq NP$ だとすると

- ▶ NP 問題の中の難しい問題は、指数関数的な時間をかけて全検索（に近いこと）をするしか解法がない

計算可能 & NP より難しい

【プレスバーガー算術命題の真偽判定問題】

入力 プレスバーガー算術命題 A

- ▶ 以下を組み合わせて作られる命題
 - ▶ 自然数定数, 自然数変数, $+$, $=$, $<$, \neq
 - ▶ かつ, または, ならば, \forall , \exists
- ▶ 掛け算は使えない

出力 A が真であるか偽であるか

例：プレスバーガー算術命題

$$\forall n(\exists k(n = k + k \vee n = k + k + 1))$$

- ▶ すべての自然数は, 偶数であるか奇数である.

期末試験について

- ▶ W351 講義室
- ▶ 日時： 1/29（水） 10:45 ～ 12:15
 - ▶ 試験時間は 1 時間
- ▶ 持ち込み不可
- ▶ 内容
 - ▶ 再帰プログラム
 - ▶ ソート
 - ▶ 浮動小数点数
 - ▶ もう 1 問ぐらい