Методы вычислений

Лабораторная работа 1

Задание 1

Необходимо найти решение системы нелинейных уравнений $f(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$ с помощью метода Ньютона, и дискретного варианта метода Ньютона (подбор шагов в замене производной выполнить самостоятельно, обосновать свой выбор). Требуется предварительно выбрать начальное приближение (можно графически). Для каждого метода укажите количество итераций, необходимое для достижения заданной точности (полученное на практике), и значение $f(x^n)$, где x^n – полученное решение. Сравните используемые методы решения систем нелинейных уравнений. Объясните быструю / медленную сходимость каждого из методов.

1) $\begin{cases} e^{-x^2} + y^2 = 5, \\ x^2 - 10y = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + \sin y = 5, \\ x^2 + y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} e^x + \cos y = 3, \\ \dfrac{1}{x+10} - y^2 = -4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} e^{\sin y} + x = 8, \\ x^2 = y^2 - 7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \ln x^2 = 2, \\ y - e^x - 2x = 30; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 y - y^2 + 4x = 10, \\ \dfrac{1}{(3y-2)^2} - x = 5; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x \sin^2 y - 4y = -2, \\ x^4 - 5y + 8y^2 = 3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \operatorname{th}(xy^3) - y^4 + 4x = 3, \\ \dfrac{1}{x^2+2} + x - y^2 = 9; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \operatorname{ch} y + 2x = 45, \\ \dfrac{x^2}{5} - y^2 + 10x = 500; \end{cases}$

10) $\begin{cases} e^{-2x} + \dfrac{x}{y} = 1, \\ \sin x + y = 2; \end{cases}$

11) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y-5} + x^2 = 13, \\ \cos 2x = 6y; \end{cases}$

12) $\begin{cases} \cos \dfrac{x-7}{y} + 2xy = 5, \\ y - (x+2)^8 = 5x; \end{cases}$

13) $\begin{cases} e^{\sin^2 x} + y = -7, \\ \dfrac{10x}{(2x-7)^2 + (y+4)^2} = 1; \end{cases}$

Задание 2

Рассмотрим функции

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \ \ x \in \left[\dfrac{1}{10}, 5\right];$

2) $f(x) = \cos x, \ \ x \in [0, 22];$

3) $f(x) = \sin x, \ \ x \in [0, 22];$

4) $f(x) = x + \cos x, \ \ x \in [0, 22];$

5) $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos x, \ \ x \in [0, 22];$

6) $f(x) = x \cos x, \ \ x \in [0, 22];$

7) $f(x) = x \cos x, \ \ x \in [-11, 11];$

8) $f(x) = \cos x^2, \ \ x \in \left[0, \sqrt{22}\right];$

9) $f(x) = e^{-x^2}, \ \ x \in [-5, 5];$

10) $f(x) = e^{-x^2} \sin 7x, \ \ x \in [-2, 2];$

11) $f(x) = \tanh x, \ \ x \in [-5, 5];$

12) $f(x) = \coth x, \ \ x \in \left[\dfrac{1}{10}, 5\right];$

13) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \ \ x \in [-1, 1];$

Для функции, соответствующей вашему варианту, проделать следующее:

1. Построить интерполяционные многочлены функции $f(x)$ по $6, 12, 18$ равноотстоящим узлам.

2. Построить интерполяционные многочлены функции $f(x)$ по $6, 12, 18$ узлам Чебышева.

3. Построить интерполяционные сплайны третьего порядка функции $f(x)$ по $6, 12, 18$ равноотстоящим узлам.

4. На графике функции $f(x)$ выбрать 100 случайных точек на отрезке и построить по ним наилучшие среднеквадратичные приближения для базиса $\varphi_i(x) = x^i,\ i = \overline{0, n}$ при $n = 1, 2, 4, 6$.

5. Вывести отчет в формате .txt. В отчет должно входить:

   - Время, затраченное на построение каждого интерполяционного многочлена.

   - Время, затраченное на построение каждого сплайна.

   - Время, затраченное на построение каждого среднеквадратичного приближения.

Задание 3

Рассмотрим функции

1) $g(x, y) = x\,y,\ \ x \in \left[\frac{1}{3}, 2\right],\ \ y \in \left[\frac{1}{3}, 2\right];$

2) $g(x, y) = \frac{1}{x\,y},\ \ x \in \left[\frac{1}{3}, 2\right],\ \ y \in \left[\frac{1}{3}, 2\right];$

3) $g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\ \ x \in \left[\frac{1}{3}, 2\right],\ \ y \in \left[\frac{1}{3}, 2\right];$

4) $g(x, y) = \cos x + \cos y,\ \ x \in [0, 11],\ \ y \in [0, 11];$

5) $g(x, y) = \cos x \cos y,\ \ x \in [0, 11],\ \ y \in [0, 11];$

6) $g(x, y) = \cos xy,\ \ x \in [0, 4],\ \ y \in [0, 4];$

7) $g(x, y) = x + y + \cos x + \cos y,\ \ x \in [0, 11],\ \ y \in [0, 11];$

8) $g(x, y) = x + y + \cos x \cos y,\ \ x \in [0, 11],\ \ y \in [0, 11];$

9) $g(x, y) = (x + y)(\cos x + \cos y),\ \ x \in [0, 11],\ \ y \in [0, 11];$

10) $g(x,y) = (x+y)\cos x \cos y$, $x \in [0, 11]$, $y \in [0, 11]$;

11) $g(x,y) = e^{xy}$, $x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $y \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$;

12) $g(x,y) = e^{-x^2y^2}$, $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 3]$;

13) $g(x,y) = e^{-x^2y^2}\sin(x+y)$, $x \in [-3, 3]$, $y \in [-3, 3]$;

Для функции, соответствующей вашему варианту, проделать следующее:

1. Построить интерполяционные многочлены двух переменных функции $g(x,y)$ на прямоугольнике по сеткам 6×6, 12×12, 18×18 равноотстоящих узлов.

2. Построить бикубические сплайны функции $g(x,y)$ на прямоугольнике по сеткам 6×6, 12×12, 18×18 равноотстоящих узлов.

3. Вывести отчет в формате .txt. В отчет должно входить:

   - Время, затраченное на построение каждого интерполяционного многочлена двух переменных.

   - Время, затраченное на построение каждого бикубического сплайна.

Написать отчет в формате .docx (или .pdf), в котором изложить все выводы на основании полученных результатов. В отчете должны быть подробно изложены все отличия реализованных алгоритмов от базовых (например, в случае реализации параллелизма, необходимо объяснить причины его внедрения, указать задействованную область и расписать полученные знания). Кроме того, в отчете обязательно должно быть:

- График функции $f(x)$ и графики всех построенных интерполяционных многочленов.

- График функции $f(x)$ и графики всех построенных сплайнов.

- Графики всех построенных среднеквадратичных приближений вместе с выбранными точками.

- График функции $g(x,y)$ и графики всех построенных интерполяционных многочленов двух переменных.

- График функции $g(x,y)$ и графики всех построенных бикубических сплайнов.

Папку с проектом и файлы отчетов добавить в итоговый архив .zip, расширение которого по необходимости переименовать в .mcha.