Доскоч Роман 3курс ПИ ТП

Лабораторная работа №2

1) Построить многочлен $P_3(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$ удовлетворяющей условиям:

1) $P(1) = 9$
$P(-1) = 7$
$P(0) = 8$
$P(2) = 22$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 = 9 \\ a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 + a_3(-1)^3 = 7 \\ a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + a_3 \cdot 0^3 = 8 \\ a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 = 22 \end{cases}$$

$a_0 = 8,$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ -a_1 + a_2 - a_3 = -1 \\ 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 14 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{2} & \cancel{6} & \cancel{12} \\ & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

$a_3 = 5/2$

$a_2 = 0$

$a_1 = 1$

$a_0 = 8$ Ответ: $P_3(x) = 8 + x + 5/2 x^3$

2. С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа второй степени, построенного по значениям функции $f(x)$ в данных узлах x_0, x_1, x_2, найти её приближённое значение в указанной точке x и оценить погрешность приближения.

л) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.5$, $x_* = 1.25$;

$f(x)$	x
1	0
$\sqrt{3}$	0.5
$3\sqrt{3}$	1.5

Используем форму

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)} f_i, \quad x = 1.25, \quad n=2$$

Используем след. матрицу

$$\begin{pmatrix} - & x-x_1 & x-x_2 \\ x-x_0 & - & x-x_2 \\ x-x_0 & x-x_1 & - \end{pmatrix}, \quad \frac{\omega(x)}{x-x_i} = \text{произведения } i\text{-го}^{+1}$$

$$\begin{pmatrix} - & (1.25-0.5) & (1.25-1.5) \\ (1.25-0) & - \ \cancel{(1.25-0.5)} & (1.25-1.5) \\ (1.25-0) & (1.25-0.5) & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & 0.75 & -0.25 \\ 1.25 & - & -0.25 \\ 1.25 & 0.75 & - \end{pmatrix}$$

$$\frac{\omega(1.25)}{1.25-x_0} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{3}{16}; \quad x_1 = -\frac{5}{16}, \quad x_2 = \frac{15}{16}$$

Построим ту же матрицу при $x = x_i$

$$\begin{pmatrix} - & x_0 - x_1 & x_0 - x_2 \\ x_1 - x_0 & - & x_1 - x_2 \\ x_2 - x_0 & x_2 - x_1 & - \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} - & -0.5 & -1.5 \\ 0.5 & - & -1 \\ 1.5 & 1 & - \end{pmatrix}$$

$\omega'(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} = 0.75$

$\omega'(x_1) = -0.5$

$\omega'(x_2) = 1.5$

$l_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$; $l_0(1.25) = \frac{-3/16}{3/4} = -1/4$

$l_1(1.25) = \frac{-5/16}{-1/2} = 5/8$

$l_2(1.25) = \frac{15/16}{3/2} = \cancel{15}\,5/8$

$P(1.25) = -\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{5}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{0.5}\,\cancel{10}} + \frac{\cancel{4}5}{8} \cdot 3\sqrt{3} =$

$= \frac{-2 + \cancel{5\sqrt{3}} + 1\cancel{40}\sqrt{3}}{8} = \frac{\cancel{7}0\sqrt{3} - 1}{4} = \cancel{30.06}08$, $3^{125} = \underline{3.9402}$

$\underline{4,08012}$

Оценим погрешность

$\|f(x) - P_2(x)\| = \frac{\|f^{(3)}(x)\|}{3!} \|\omega(x)\| = \frac{3^{1.25} \ln^3 3}{\cancel{6}\,2} \cdot \frac{15}{64} = 0.6135.$

$\|\omega(x)\| = |1.25 \cdot (1.25 - 0.5)(1.25 - 1.\cancel{7}5)| = \left| \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{-1}{4} \right| = \frac{15}{64}$

$f^{(3)}(1.25) = 3^x \cdot \ln^3 3$