Квадратурные формулы Гаусса

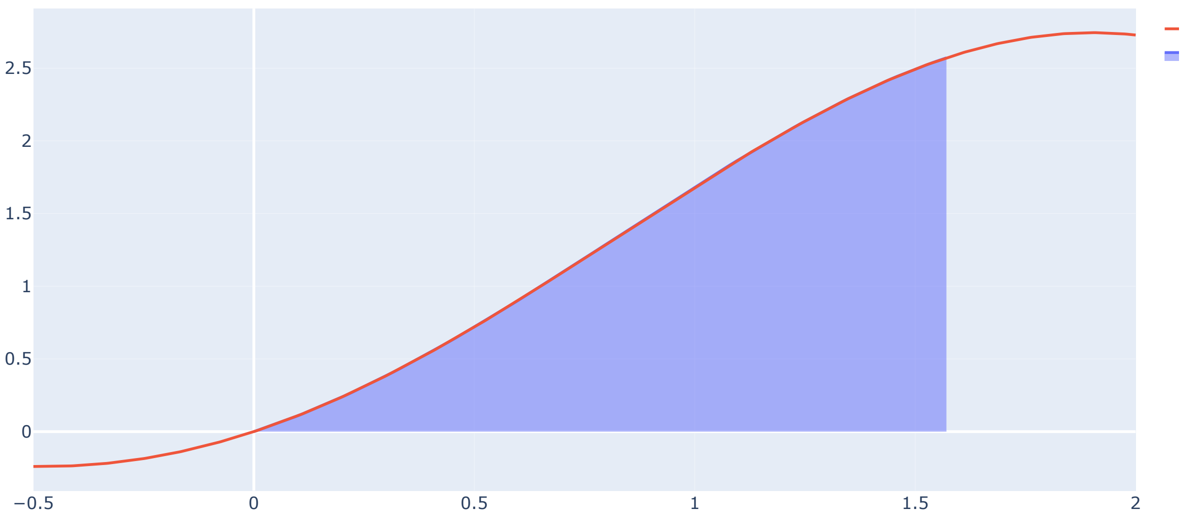
Дз №10

Варинт 5 Доскоч Роман 3 курс 13 группа

In [1]:
```python
import plotly as pl
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from numpy import sqrt,sin,log,pi,cos
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x dx, \epsilon = 10^{-5}$$

In [2]:
```python
f = lambda x: (x+1)*sin(x)
a, b = 0, pi/2
x=np.linspace(a, b, 100)
fig = go.Figure(go.Scatter(x=x, y=f(x), fill='tonexty'))
x1=np.linspace(-.5, 2, 500)
fig.add_trace(go.Scatter(x=x1, y=f(x1)))
```



Точное значение итегралла

$$\int (x+1)\sin x dx = \int sinxdx + \int x\sin x dx = \begin{bmatrix} u = x & du = 1 \\ dv = \sin x dx & v = -cosx \end{bmatrix} =$$

$$-\cos x - x\cos x - \int -\cos x 1 dx = -\cos x - x\cos x + \int \cos x dx = -\cos x - x\cos x + \sin x;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\sin x dx = -\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + \cos 0 + 0\cos 0 - \sin 0 = 2$$

In [3]:
```python
F = lambda x:-cos(x) - x*cos(x)+sin(x)
real_I = F(b)-F(a)
```

Составная квадратурная формула Гаусса-2

In [4]:
```
def gauss_2(p):
    h=p[1]-p[0]
    return h/2*sum(f((p[1:] + p[:-1] - h/sqrt(3))/2)+f((p[1:] + p[:-1] + h/sqrt(3))/2))
```

Составная квадратурная формула Симпсона

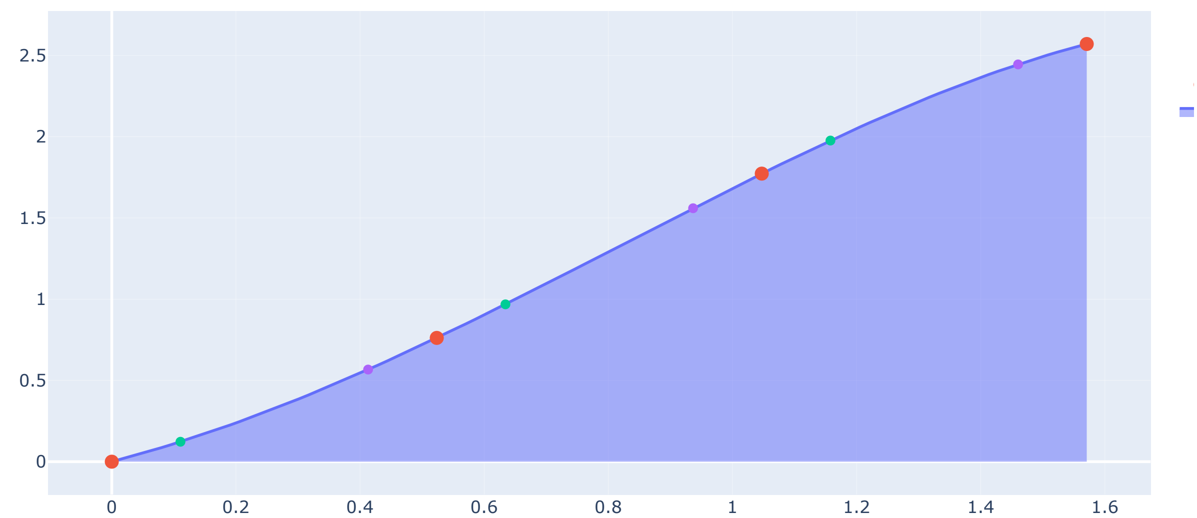
In [5]:
```
def simson(p):
    return (p[1]-p[0])/6*sum(f(p[:-1]) + 4*f((p[1:]+p[:-1])/2) + f(p[1:]))
```

Расчеты

In [6]:
```
p=np.linspace(a,b,4)
h=p[1]-p[0]
gp1, gp2 = (p[1:] + p[:-1] - h/sqrt(3))/2, (p[1:] + p[:-1] + h/sqrt(3))/2
print(f'Гаусс-2: {gauss_2(p)}, R(f)={real_I-gauss_2(p)}')
print(f'Симпсон-3: = {simson(p)}, R(f)={real_I-simson(p)}')
```

```
Гаусс-2: 2.000035409293247, R(f)=-3.540929324685749e-05
Симпсон-3: = 1.999946943581328, R(f)=5.305641867203725e-05
```

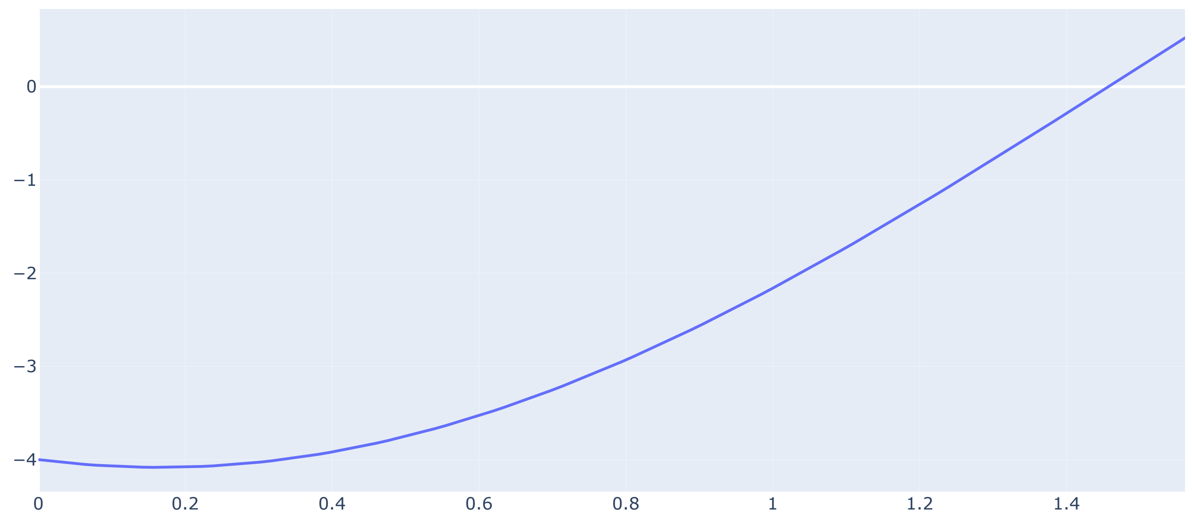
In [7]:
```
fig = go.Figure(go.Scatter(x=x, y=f(x), fill='tonexty',name='f(x)'))
fig.add_scatter(mode='markers',x=p,y=f(p),marker=dict(size=10))
fig.add_scatter(mode='markers',x=gp1,y=f(gp1),marker=dict(size=7))
fig.add_scatter(mode='markers',x=gp2,y=f(gp2),marker=dict(size=7))
```



$$10^{-5} \geqslant h^4 \frac{\pi/2 - 0}{4320} \max |f^{(4)}(\xi)|$$

График 4 производной f

In [8]:
```
df4=lambda x: (x-1)*sin(x) - 4*cos(x)
go.Figure(go.Scatter(x=x, y=df4(x)))
```



Из графика видно что максимум в точке $\frac{\pi}{2}$

$$h \leqslant \sqrt[4]{\frac{10^{-5}4320}{\frac{\pi}{2} f^{(4)}(\frac{\pi}{2})}}$$

In [9]:
```
e=10e-5
h = (2*e*4320/pi/df4(pi/2))**0.25
h
```

Out[9]: 0.8331451586940442

Вывод

С помощью НАСТ на 2 точках и 3 разбиениях удалось достигнуть точности до 4 знаков.
Еще видно что метод гаусса почти в 2 раза лучше метода симсона.