# Правило Рунге оценки погрешности

## Дз №11

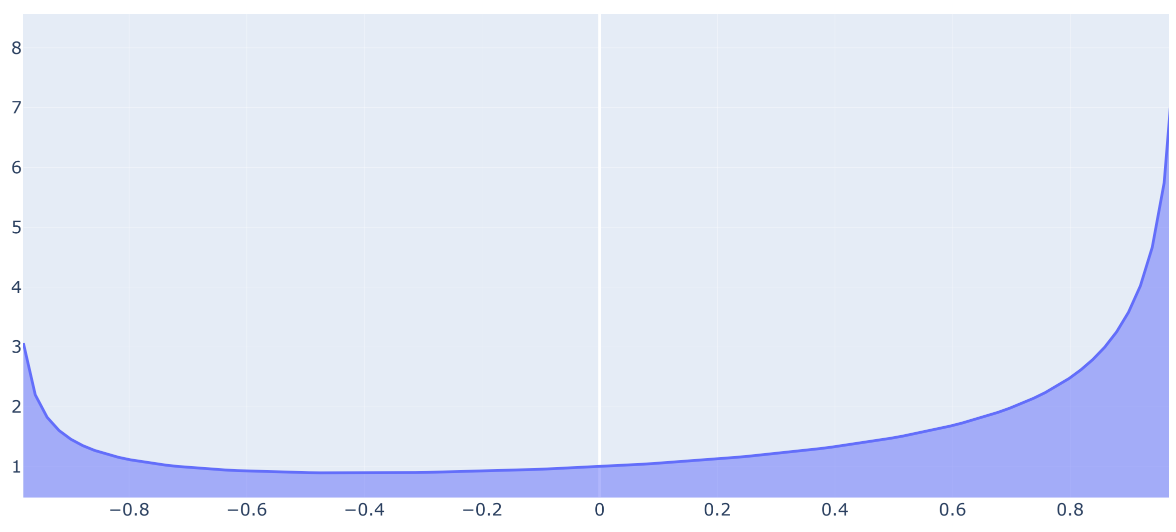
### Варинт 5 Доскоч Роман 3 курс 13 группа

In [1]:
```
import plotly as pl
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from numpy import sqrt,sin,log,pi,cos,exp,pi
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.pyplot import plot
from scipy import integrate
import math
```

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

## По квадратурной формуле НАСТ с n = 4 вычислить интеграл и оценить погрешность:

In [2]:
```
f = lambda x: exp(x/2)/sqrt(1-x**2)
a, b = -1, 1
x=np.linspace(a, b, 100)
x[(x==-1) | (x==1)] = np.nan
go.Figure(go.Scatter(x=x, y=f(x), fill='tonexty'))
```




$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{x_k}{2}},$$

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad (\text{узлы чебышева})$$

$$R_n(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)} \xi, \xi \in [-1; 1]$$

In [3]:
```
func = lambda x:exp(x/2)
def NAST(n):
    k = np.arange(1,n+1)
    return pi/n*sum(func(cos(pi*(2*k-1)/(2*n))))
```

In [4]:
```
v, _ = integrate.quad(f, -1, 1)
nast4=NAST(4)
print(f'nast(4) = {nast4}')
print(f'v=\t{v}')
print(f'err = {v-nast4}')
```

```
nast(4) = 3.3410315423414656
v=      3.341031544735635
err = 2.394169307251559e-09
```

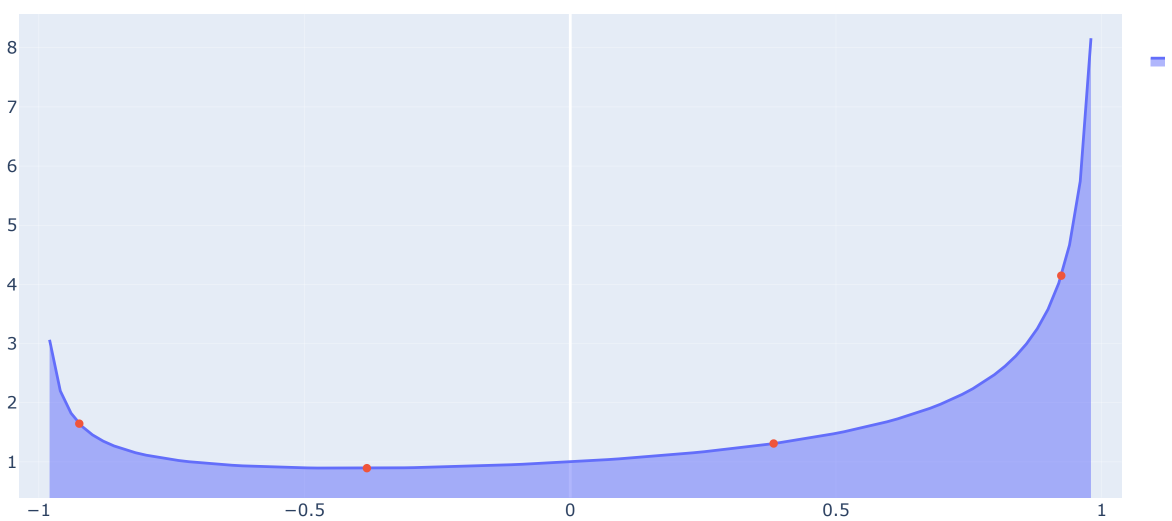
$$f^{(2n)}(\xi) = (e^{\frac{x}{2}})^{(8)} = 2^{-8}e^{\frac{1}{2}}\ max \text{ при } \xi = 1$$

$$\|R_n(f)\| \leq \frac{\pi}{2^7 8!}2^{-8}e^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi\sqrt{e}}{80640} = 6.405335664632904 * 10^{-5}$$

In [5]:
```
R=pi*sqrt(exp(1))/80864
print(f'Ошибка R(f)={R}')
```

```
Ошибка R(f)=6.405335664632904e-05
```

In [6]:
```
n=4
k = np.arange(1,n+1)
p=cos(pi*(2*k-1)/(2*n))
fig = go.Figure(go.Scatter(x=x, y=f(x), fill='tonexty',name='f(x)'))
fig.add_scatter(mode='markers',x=p,y=f(p))
```




Вычислить интеграл из № 2 стр. 122 методом Гаусса-2 с шагами: $\frac{b-a}{3}$ и $\frac{b-a}{2}$, где $a$ и $b-$ границы отрезка интегрирования. Используя правило Рунге, оценить погрешность интегрирования. Определить шаг интегрирования $h$, при котором погрешность будет не более $\varepsilon = 10^{-5}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin x dx = 2, \varepsilon = 10^{-5}$$

$$\tilde{I_{h_1}} = \text{Гаусс2}, h_1 = \frac{b-a}{2}$$
$$\tilde{I_{h_2}} = \text{Гаусс2}, h_2 = \frac{b-a}{3}$$
$$K = \frac{\tilde{I_{h_1}} - \tilde{I_{h_2}}}{h_2^p - h_1^p}, p = 4$$

### Составная квадратурная формула Гаусса-2

In [7]:
```
def gauss_2(p):
    h=p[1]-p[0]
    return h/2*sum(f((p[1:] + p[:-1] - h/sqrt(3))/2)+f((p[1:] + p[:-1] + h/sqrt(3))/2))
```

In [8]:
```
f=lambda x:(x+1)*sin(x)
a,b=0,pi/2
p=4
h1=(b-a)/2
h2=(b-a)/3
p_h1=np.linspace(a,b,3)
p_h2=np.linspace(a,b,4)
I_h1 = gauss_2(p_h1)
I_h2 = gauss_2(p_h2)
K=(I_h1-I_h2)/(h2**p-h1**p)
print(f'{h1=}')
print(f'{h2=}')
print(f'{I_h1=}')
print(f'{I_h2=}')
print(f'{K=}')
print(f'I=I_h2+K*h2^p={I_h2+K*h2**p}')
print(f'Погрешность = {abs(K*h2)}')
```

```
h1=0.7853981633974483
h2=0.5235987755982988
I_h1=2.0001832318918638
I_h2=2.000035409293247
K=-0.00048411993841677536
I=I_h2+K*h2^p=1.999999022192049
Погрешность = 0.0002534846069977474
```

$$|Kh_e^p| < e$$
$$h_e = \sqrt[p]{\frac{e}{|K|}}$$

In [9]:
```
e=10e-5
h_e=(e/abs(K))**(1/p)
h_e
```

Out[9]:
```
0.6741581011293004
```

In [ ]:
```

```