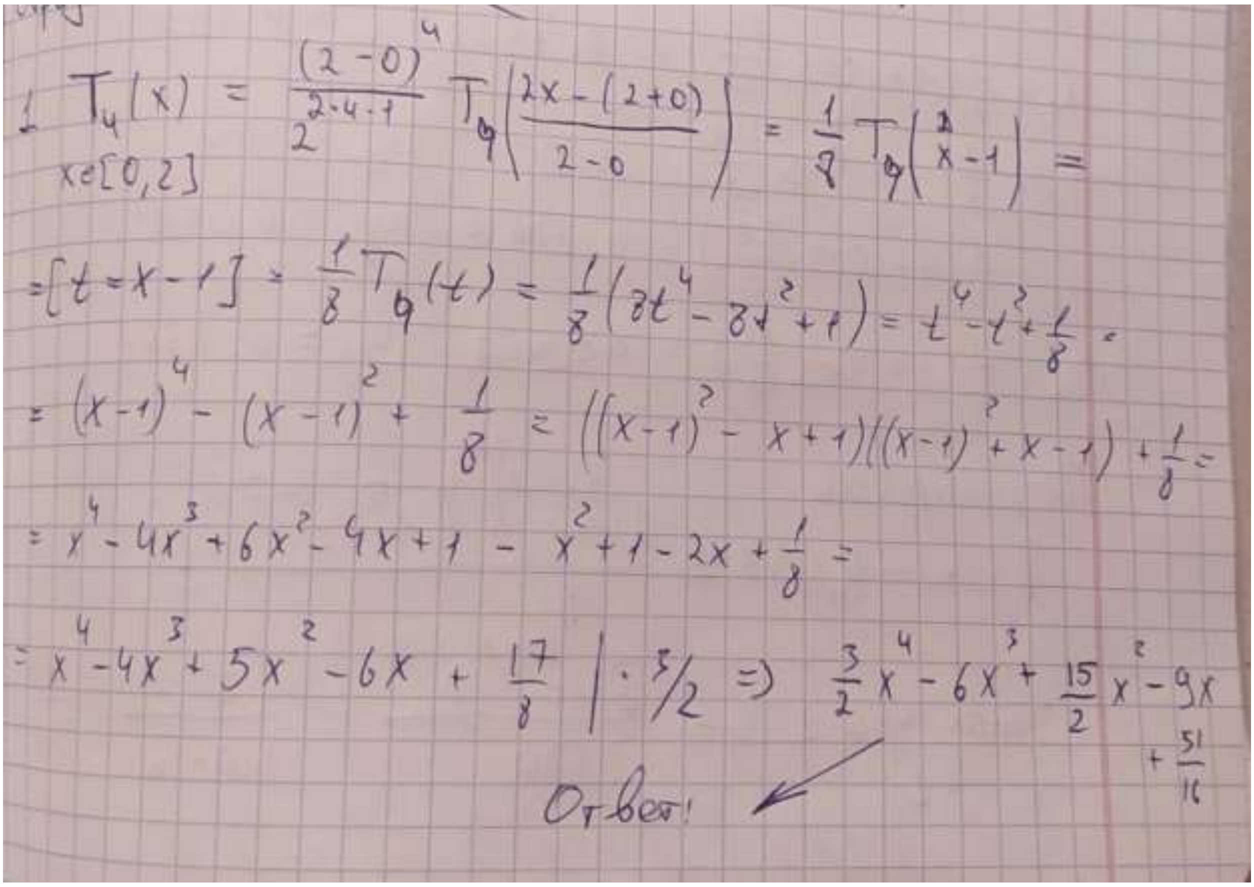
Домашняя работа №4

Доскоч Роман 3 курс 13 группа

1) Среди всех многочленов вида $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке [a; b] и заданном одном из коэффициентов a_i при следующих данных:

   л) $a_4 = 1.5$, $x \in [0; 2]$;



1 $T_4(x) = \frac{(2-0)^4}{2^{2\cdot 4-1}} T_4\left(\frac{2x-(2+0)}{2-0}\right) = \frac{1}{8} T_4\left(\frac{2}{2}x-1\right) =$

$x \in [0,2]$

$=[t=x-1] = \frac{1}{8}T_4(t) = \frac{1}{8}(8t^4-8t^2+1) = t^4-t^2+\frac{1}{8} =$

$=(x-1)^4-(x-1)^2+\frac{1}{8} = ((x-1)^2-x+1)((x-1)^2+x-1)+\frac{1}{8} =$

$= x^4-4x^3+6x^2-4x+1 - x^2+1-2x+\frac{1}{8} =$

$= x^4-4x^3+5x^2-6x+\frac{17}{8} \;\Big|\cdot 3/2 \Rightarrow \frac{3}{2}x^4-6x^3+\frac{15}{2}x^2-9x+\frac{51}{16}$

Ответ!

2) Построить таблицу для интерполирования функции y = f (x) на отрезке [a;b] многочленом четвертой степени, расположив узлы интерполирования наилучшим образом, и оценить погрешность интерполирования в равномерной норме при следующих данных:

   л) $e^{2x-1} = x \in [0;1]$

2

$f(x) = e^{2x-1}, \; x \in [0;1]$

Точки наилучшего приближения

$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right), \; m = \overline{0, n-1}$

$n = 5$

$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = 0.9755$	$y_0 = 2.588$
$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{3\pi}{10}\right) = 0.7938$	$y_1 = 1.799$
$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{5\pi}{10}\right) = 0.5$	$y_2 = 1.0$
$x_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{7\pi}{10}\right) = 0.20610$	$y_3 = 0.555$
$x_4 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{9\pi}{10}\right) = 0.02447$	$y_4 = 0.3863$

Погрешность

$$\| f(x) - P_n(x) \| \le \frac{\| (e^{2x-1})^{(5)} \| \, 1^5 \cdot 2^{1-2\cdot 5}}{5!} =$$

$$= \left[\underset{x=1}{\max \text{ при } 1} \right] = \frac{2^5 \cdot e^{2x-1} \cdot 2^{-9}}{120} = \frac{2}{120 \cdot 16} = \frac{1}{960}$$

Барицентрическая формула:

$$\partial_i = (-1)^i \sin\frac{2i+1}{2n+2}\pi$$

$$\partial_0 = \sin\frac{\pi}{10} = 0.309$$

$$\partial_1 = -\sin\frac{3\pi}{10} = -0.809$$

$$\partial_2 = \sin\frac{5\pi}{10} = 1.0$$

$$\partial_3 = -\sin\frac{7\pi}{10} = -0.809$$

$$\partial_4 = \sin\frac{9\pi}{10} = 0.309$$

$$P_4(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\partial_i}{x-x_i}}{\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial_i}{x-x_i}} = \left(\frac{2.588\cdot 0.309}{x-0.975} + \frac{-1.799\cdot 0.809}{x-0.7938} + \frac{1\cdot 1}{x-0.5} + \frac{-0.55\cdot 0.809}{x-0.206} + \frac{0.386\cdot 0.309}{x-0.0244}\right) \div$$

$$\left(\frac{0.309}{x-0.975} + \frac{-0.809}{x-0.7938} + \frac{1}{x-0.5} + \frac{-0.809}{x-0.206} + \frac{0.309}{x-0.0244}\right)$$

3) Функция y = f(x) приближается многочленом Лагранжа на отрезке [a;b] по n узлам Чебышева $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2i-1}{2n}\pi$, i = 1,…,n. Найти наибольшее целое p в оценке погрешности в равномерной норме вида, $\varepsilon_n = 10^{-p}$ если имеют место следующие данные:

л) $y = \cos 2x - \sin x$, $x \in [0; \pi]$, $n = 4$

3. из формулы $\|f - P_{n-1}(x)\| \le \frac{\|f^{(n)}\|(b-a)^n 2^{1-2n}}{n!}$

оценим $\|f^{(n)}\| = \|(\cos(2x) - \sin(x))^{(4)}\| = \|16\cos 2x - \cos x\| = 16$

$$\frac{16\cdot\pi^4\cdot 2^{-7}}{24} = \frac{\pi^4}{192} < 10^{-p} \Rightarrow p = 1$$

$$0.5 < 10^{-p}$$

Ответ