Лабораторная работа №2 задание 1

Доскоч Роман вариант 5

НАСТ

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(b) + A_2 f'(a) + A_3 f'(b)$$

In [1]:
```python
import plotly as pl
import numpy as np
import plotly.graph_objs as go
from numpy import sqrt,sin,log,pi,cos,exp
```

$$\text{Из условия } \int_a^b p(x)x^m dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k x_k^m, m = \overline{0, 2\text{n} - 1}$$

$$p(x) \equiv 1, \text{ в моем случае}$$

Составим систему

$$\begin{cases} \int_a^b 1dx = b - a = A_0 + A_1 + 0 + 0 \\ \int_a^b xdx = \frac{b^2-a^2}{2} = aA_0 + bA_1 + A_2 + A_3 \\ \int_a^b x^2dx = \frac{b^3-a^3}{3} = a^2A_0 + b^2A_1 + 2aA_2 + 2bA_3 \\ \int_a^b x^3dx = \frac{b^4-a^4}{4} = a^3A_0 + b^3A_1 + 3a^2A_2 + 3b^2A_3 \end{cases}$$

После долгих вычислений и суждений симметрии $A_0 = A_1 = \frac{b-a}{2}, A_2 = \frac{(b-a)^2}{12}, A_3 = \frac{-(b-a)^2}{12}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b) + \frac{(b-a)^2}{12}f'(a) - \frac{(b-a)^2}{12}f'(b) =$$

$$\frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{h^2}{12}(f'(a) - f'(b))$$

Составная форма

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(a + (i-1)h) + f(a + ih)) + \frac{h^2}{12}\sum_{i=1}^{n}(f'(a + (i-1)h) - f'(a + ih))$$

Вычислим главый член погрешности

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \omega_{n+1}^2(x)dx$$

$$\omega_{n+1}(x) = (x-a)^2(x-b)^2, n = 1$$

$$R_n(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{2}\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx$$

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{4320}f^{(4)}(\xi)$$

Так как в квадратурной форме присутствуют производные то нужно учесть в прогрешности и это

$$R_n(f') = -\frac{(b-a)^5}{4320}f^{(5)}(\xi)$$

Итоговая погрешность

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{2160}(f^{(4)}(\xi) + f^{(5)}(\xi))$$

Главный член погрешности

$$-\frac{(b-a)^5}{2160}$$

Порядок точности 5

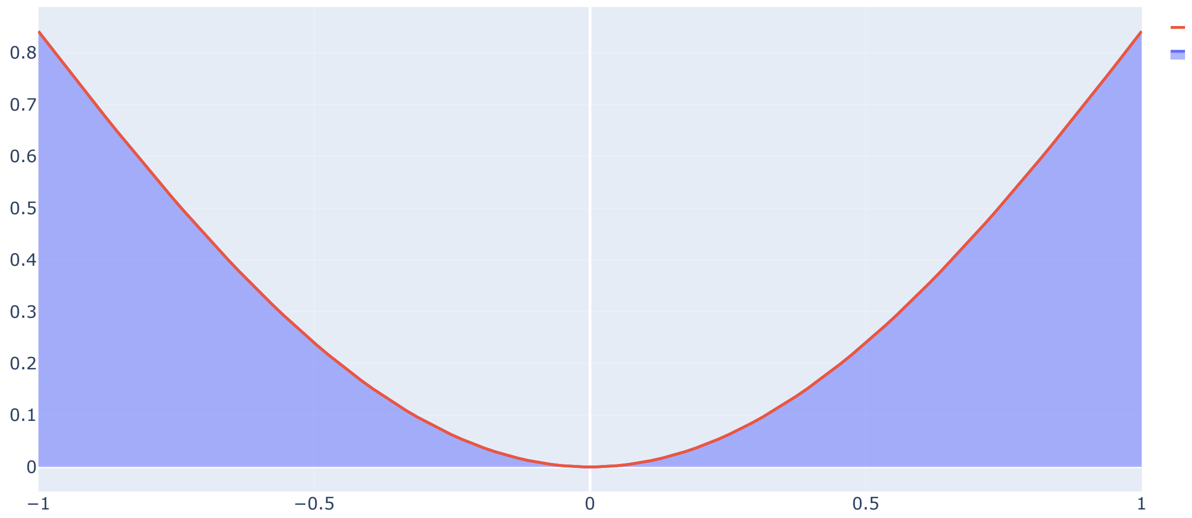
Проверим на следущей функции

$$\int_{-1}^{1} x\sin x dx = -x\cos x + \sin x = 0.602337357879514$$

In [2]:
```
f=lambda x:x*sin(x)
df=lambda x:sin(x)+x*cos(x)
```

In [3]:
```
def NAST(p):
    h=p[1]-p[0]
    return h / 2 * sum(f(p[:-1]) + f(p[1:])) + h**2 / 12 * sum(df(p[:-1]) - df(p[1:]))
```

In [4]:
```
real_I=0.602337357879514
a, b = -1, 1
x=np.linspace(a, b, 100)
fig = go.Figure(go.Scatter(x=x, y=f(x), fill='tonexty'))
fig.add_trace(go.Scatter(x=x, y=f(x)))
```



Найдем приближеный интеграл на 10 разбиениях

In [5]:
```
p=np.linspace(a,b,10)
nast=NAST(p)
print(real_I)
print(nast)
print(abs(real_I - nast))
```

```
0.602337357879514
0.6023581562456499
2.0798366135887925e-05
```