MATHEMATIK

LEISTUNGSKURS

NEVER GUDE

Carl-Friedrich-Gauß Gymnasium Hockenheim
GitHub

j.gude@posteo.de

Inhaltsverzeichnis

Analytische Geometrie

Section 1

Modellieren von geradlinigen Bewegungen

Definition 1

Eine geradlinige Bewegung kann in Form einer Geraden modelliert werden. Hierbei ist $\vec{x}$ die Position zum Zeitpunkt t. Der Körper startet bei $t = 0$ in Punkt $\vec{p}$ und bewegt sich in Richtung $\vec{v}$ mit Geschwindigkeit $|\vec{v}|$.

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$$

Example

```python
import numpy as np

def incmatrix(genl1,genl2):
string = "Hello World"
m = len(genl1)
n = len(genl2)
M = None #to become the incidence matrix dsjklasd dsa dsadasda da dsadadadas
VT = np.zeros((n*m,1), int)  #dummy variable

#compute the bitwise xor matrix
M1 = bitxormatrix(genl1)
M2 = np.triu(bitxormatrix(genl2),1)

for i in range(m-1):
  for j in range(i+1, m):
    [r,c] = np.where(M2 == M1[i,j])
    for k in range(len(r)):
      VT[(i)*n + r[k]] = 1;
      VT[(i)*n + c[k]] = 1;
      VT[(j)*n + r[k]] = 1;
      VT[(j)*n + c[k]] = 1;

      if M is None:
        M = np.copy(VT)
      else:
        M = np.concatenate((M, VT), 1)

      VT = np.zeros((n*m,1), int)

return M
```

Stochastik

Section 1

Elementare Kombinatorik

Definition 2

Aus n Elementen werden k ausgewählt. Die **Anzahl der Möglichkeiten**

mit Reihenfolge mit Wiederholung	mit Reihenfolge ohne Wiederholung	ohne Reihenfolge ohne Wiederholung
n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Section 2

Pfadregeln

Beim Wiederholen eines Spiels, z. B. beim mehrfachen Ziehen einer Kugel aus einer Urne oder mehrfachen Würfeln, werden die Wahrscheinlichkeiten jedes Durchgangs „aneinander gereiht".
Beim traversieren des Baumes in die Tiefe wird multipliziert, beim traversieren in die Breite wird addiert

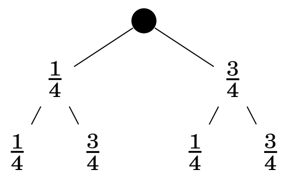

Abbildung 1. Binärbaum

Definition 3

Beim Berechnen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E (anhand eines Baums), das aus mehreren Ergebnissen besteht, gelten folgende Regeln

Produktregel Für Wahrscheinlichkeit eines Erbegnisses, alle Wahrscheinlichkeiten des Pfades multiplizieren

Summenregel Für Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E, alle Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse addieren

SECTION 3
Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Definition 4
Die Zufallsgröße X kann die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen.
Der **Erwartungswert** $E(X)$ ist definiert als Wert, der für X auf lange Sicht zu erwarten ist.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Ein Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist

Die **Varianz** $Var(X)$ ist definiert als Maß für die Streuung der Werte um den Erwartungswert $E(X)$. Dabei wird die mittlere quadratische Abweichung:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$$

Um Einheiten wie €^{2} zu vermeiden wird für die **Standardabweichung** σ die Wurzel aus $Var(X)$ gezogen:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)}$$

SECTION 4
Binomialverteilte Zufallsvariablen

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, dass als Ergebnisse nur *Treffer* und *Nicht-Treffer* kennt. Die Trefferwahrscheinlichkeit wird mit p angegeben.
Bei n unabhängigen Wiederholung spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Definition 5
Die Wahrscheinlichkeit einer **Bernoulli-Kette** der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p für genau k Treffer wird wie folgt berechnet:

$$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Für höchstens k Treffer gilt folgendes:

$$P_p^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P_p^n(X = i)$$

Remark Berechnung mit WTR:

$P_p^n(X = k)$: `2nd→stat-reg/distr→DISTR→Binomialpdf`

$P_p^n(X \leq k)$: `2nd→stat-reg/distr→DISTR→Binomialcdf`

SECTION 5
Bedingte Wahrscheinlichkeit

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Tabelle 1. Vierfeldertafel

Definition 6

Für zwei Ergebnisse A und B mit $P(A) \neq 0$ ist $P_A(B)$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Definition 7

Zwei Ergebnisse A und B mit $P(A) \neq 0$ sind **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

also

$$P_A(B) = P(B)$$

SECTION 6

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei Binomialverteilung

Definition 8

Ist eine Zufallsgröße binomialverteilt, also $B_{n,p}$-verteilt, so ist

Erwartungswert $\mu = n \cdot p$

Varianz $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

SECTION 7
Testen von Hypothesen

SUBSECTION 7.1
Einseitiger Hypothesentest

Example Ein Betrieb bezieht Bauteile von einer Zulieferfirma. Der Betriebsleiter vermutet, dass mehr als 5% der Bauteile defekt sind. Dazu führt er einen Hypothesentest mit einem Stichprobenumfang von 200 Bauteilen auf dem Signifikanzniveau 5% durch. Als Nullhypothese wählt er:
„Höchstens 5% der Bauteile sind defekt“.

a) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel.

$H_0 \leq 0,05$	Höchstens 5% der Bauteile sind defekt; D. h. Rechtsseitiger Test
$H_1 > 0,05$	Mehr als 5% der Bauteile sind defekt
$n = 200; \hat{\alpha} = 0,05$	Stichprobenumfang; Signifikanzniveau
$\overline{A} = [g; \ldots; n]$	Ablehnungsbereich $\overline{A}$
$P_p^n(X \geq g) \leq \hat{\alpha}$	Rechtsseitigen Test durchführen
$1 - P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1) \leq 0,05$	
$P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1) \geq 0,95$	Gesucht ist kleinste natürliche Zahl g, die Kriterium erfüllt

$P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1)$	g
$0,976$	17
$0,956$	16
$0,922$	15

Per `Binomialcdf` ausprobieren; $g = 16$ ist kleinste natürliche Zahl, die Kriterium erfüllt

$\overline{A} = [16; \ldots; 200]$	Wenn das Stichprobenergebnis mehr als 15 defekte Bauteile liefert, wird H_0 verworfen, sonst nicht.

b) Geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit an.

$1 - P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1) \leq 0,05$	Fehler 1. Art berechnen
$1 - P_{0,05}^{200}(X \leq 16 - 1) \leq 0,05$	Gesucht ist kleinste natürliche Zahl g, die Kriterium erfüllt
$1 - 0,956 \leq 0,05$	
$0,044 \leq 0,05$	Irrtumswahrscheinlichkeit ist $0,044$

SUBSECTION 7.2

Zweiseitiger Hypothesentest

Example Bei einer leicht verbeulten Münze wird vermutet, dass „Wappen" nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% fällt. Dazu soll ein Hypothesentest durchgeführt werden, bei dem die Münze 100-mal geworfen wird. Als Signifikanzniveau wird 5% gewählt. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel

$H_0 = 0,5$ — „Wappen" fällt in 50% der Fälle

$H_1 \neq 0,5$ — „Wappen" fällt nicht in 50% der Fälle

$n = 100; \hat{\alpha} = 0,05$ — Stichprobenumfang; Signifikanzniveau

$\overline{A} = [0; \dots; g_1] \cup [g_2; \dots; n]$ — Ablehnungsbereich $\overline{A}$

$P_p^n(X \leq g_1) \leq \frac{\hat{\alpha}}{2}$ — Linksseitigen Test durchführen

$P_{0,5}^{100}(X \leq g_1) \leq 0,025$ — Gesucht ist größte natürliche Zahl g_1, die Kriterium erfüllt

$P_{0,5}^{100}(X \leq g_1)$	g_1
$0,01$	38
$0,018$	39
$0,028$	40

Per `Binomialcdf` ausprobieren; $g_1 = 39$ ist größte natürliche Zahl, die Kriterium erfüllt

$P_p^n(X \geq g_2) \leq \frac{\hat{\alpha}}{2}$ — Rechtsseitigen Test durchführen

$1 - P_{0,5}^{100}(X \leq g_2 - 1) \leq 0,025$

$P_{0,5}^{100}(X \leq g_2 - 1) \geq 0,975$ — Gesucht ist kleinste natürliche Zahl g_2, die Kriterium erfüllt

$P_{0,5}^{100}(X \leq g_2 - 1)$	g_2
$0,99$	62
$0,982$	61
$0,972$	60

Per `Binomialcdf` ausprobieren; $g_2 = 61$ ist kleinste natürliche Zahl, die Kriterium erfüllt

$\overline{A} = [0; \dots; 39] \cup [61; \dots; 100]$ — Wenn das Stichprobenergebnis weniger als 40 oder mehr als 60 mal „Wappen" liefert, wird H_0 verworfen, sonst nicht.

SECTION 8
Stetige Zufallsgrößen

SUBSECTION 8.1
Normalverteilung

Example Kartoffelchips werden in Tüten gefüllt. Die Masse (in Gramm) des Tüteninhalts ist normalverteilt mit $\mu = 250$ und $\sigma = 10$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Inhalt der Tüte

a) eine Masse von mindestens 230g hat

$\mu = 250; \sigma = 10$	Erwartungswert; Standardabweichung
$a = 230; b = \infty$	Per `Normalcdf` ausrechnen; `LOWERBnd = 230; UPPERBnd = 1E99`
$P(X \geq a) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)dx$	Wahrscheinlichkeit berechnen
$P(X \geq 230) = 0,977$	Wahrscheinlichkeit für mindestens 230g beträgt $0,997$

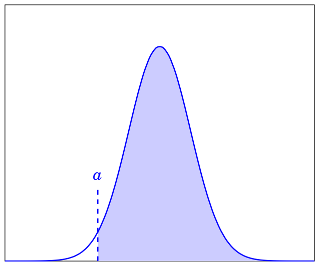

Abbildung 2. Zu Teilaufgabe a)

b) eine Masse von weniger als 250g hat

$\mu = 250; \sigma = 10$	Erwartungswert; Standardabweichung
$a = \infty; b = 250$	Per `Normalcdf` ausrechnen; `LOWERBnd = -1E99; UPPERBnd = 250`
$P(X < a) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)dx$	Wahrscheinlichkeit berechnen
$P(X < 250) = 0,5$	Wahrscheinlichkeit für weniger als 250g beträgt $0,5$

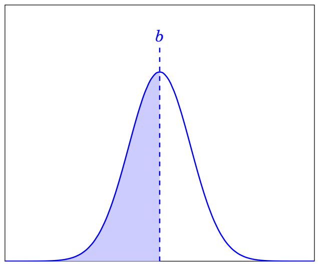

Abbildung 3. Zu Teilaufgabe b)

c) eine Masse zwischen 245g und 255g hat

$\mu = 250; \sigma = 10$	Erwartungswert; Standardabweichung
$a = 245; b = 255$	Per `Normalcdf` ausrechnen; `LOWERBnd = 245; UPPERBnd = 255`
$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_{\mu;\sigma}(x)dx$	Wahrscheinlichkeit berechnen
$P(245 \leq X \leq 255) = 0,383$	Wahrscheinlichkeit für mindestens 245g und höchstens 255 beträgt $0,383$

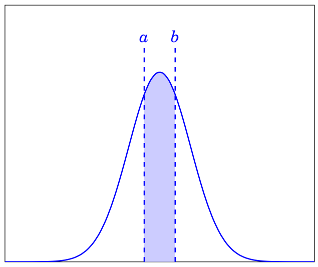

Abbildung 4. Zu Teilaufgabe c)