

MATHEMATIK

LEISTUNGSKURS

NEVER GUDE

Carl-Friedrich-Gauß Gymnasium Hockenheim

[GitHub](#)

j.gude@posteo.de

Inhaltsverzeichnis

1	ANALYTISCHE GEOMETRIE	1
1	Modellieren von geradlinigen Bewegungen	1
2	STOCHASTIK	2
1	Elementare Kombinatorik	2
2	Pfadregeln	2
3	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	3
4	Binomialverteilte Zufallsvariablen	3
5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	4
6	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei Binomialverteilung	4
7	Testen von Hypothesen	4
7.1	Einseitiger Hypothesentest	5
7.2	Zweiseitiger Hypothesentest	6

ANALYTISCHE GEOMETRIE

SECTION 1

Modellieren von geradlinigen Bewegungen

Definition 1 Eine geradlinige Bewegung kann in Form einer Geraden modelliert werden. Hierbei ist \vec{x} die Position zum Zeitpunkt t . Der Körper startet bei $t = 0$ in Punkt \vec{p} und bewegt sich in Richtung \vec{v} mit Geschwindigkeit $|\vec{v}|$.

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$$

Example

```
1 import numpy as np
2
3 def incmatrix(genl1, genl2):
4     string = "Hello World"
5     m = len(genl1)
6     n = len(genl2)
7     M = None #to become the incidence matrix dsjklasd dsa dsadasda
8             ↪ da dsadadadas
9     VT = np.zeros((n*m, 1), int) #dummy variable
10
11     #compute the bitwise xor matrix
12     M1 = bitxormatrix(genl1)
13     M2 = np.triu(bitxormatrix(genl2), 1)
14
15     for i in range(m-1):
16         for j in range(i+1, m):
17             [r, c] = np.where(M2 == M1[i, j])
18             for k in range(len(r)):
19                 VT[(i)*n + r[k]] = 1;
20                 VT[(i)*n + c[k]] = 1;
21                 VT[(j)*n + r[k]] = 1;
22                 VT[(j)*n + c[k]] = 1;
23
24     if M is None:
25         M = np.copy(VT)
26     else:
27         M = np.concatenate((M, VT), 1)
28
29     VT = np.zeros((n*m, 1), int)
30
31     return M
```

STOCHASTIK

SECTION 1

Elementare Kombinatorik

Definition 2

Aus n Elementen werden k ausgewählt. Die **Anzahl der Möglichkeiten**

mit Reihenfolge
mit Wiederholung
 n^k

mit Reihenfolge
ohne Wiederholung
 $\frac{n!}{(n-k)!}$

ohne Reihenfolge
ohne Wiederholung
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

SECTION 2

Pfadregeln

Beim Wiederholen eines Spiels, z. B. beim mehrfachen Ziehen einer Kugel aus einer Urne oder mehrfachen Würfeln, werden die Wahrscheinlichkeiten jedes Durchgangs „aneinander gereiht“.

Beim traversieren des Baumes in die Tiefe wird multipliziert, beim traversieren in die Breite wird addiert

Definition 3

Beim Berechnen der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E (anhand eines Baums), das aus mehreren Ergebnissen besteht, gelten folgende Regeln

Produktregel Für Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses, alle Wahrscheinlichkeiten des Pfades multiplizieren

Summenregel Für Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E , alle Wahrscheinlichkeiten der zu E gehörenden Ergebnisse addieren

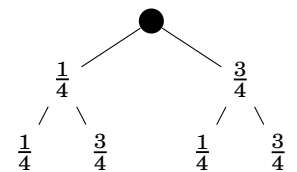


Abbildung 1. Binärbaum

SECTION 3

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Definition 4 Die Zufallsgröße X kann die Werte x_1, x_2, \dots, x_n annehmen. Der **Erwartungswert** $E(X)$ ist definiert als Wert, der für X auf lange Sicht zu erwarten ist.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Ein Spiel ist fair, wenn $E(X) = 0$ ist

Die **Varianz** $Var(X)$ ist definiert als Maß für die Streuung der Werte um den Erwartungswert $E(X)$. Dabei wird die mittlere quadratische Abweichung:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$$

Um Einheiten wie €^2 zu vermeiden wird für die **Standardabweichung** σ die Wurzel aus $Var(X)$ gezogen:

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)}$$

SECTION 4

Binomialverteilte Zufallsvariablen

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, dass als Ergebnisse nur *Treffer* und *Nicht-Treffer* kennt. Die Trefferwahrscheinlichkeit wird mit p angegeben.

Bei n unabhängigen Wiederholung spricht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n .

Definition 5 Die Wahrscheinlichkeit einer **Bernoulli-Kette** der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p für genau k Treffer wird wie folgt berechnet:

$$P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Für höchstens k Treffer gilt folgendes:

$$P_p^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k P_p^n(X = i)$$

Remark Berechnung mit WTR:

$P_p^n(X = k)$: 2nd→stat→reg/distr→DISTR→Binomialpdf

$P_p^n(X \leq k)$: 2nd→stat→reg/distr→DISTR→Binomialcdf

SECTION 5

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Definition 6

Für zwei Ergebnisse A und B mit $P(A) \neq 0$ ist $P_A(B)$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Definition 7

Zwei Ergebnisse A und B mit $P(A) \neq 0$ sind **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

also

$$P_A(B) = P(B)$$

	B	\bar{B}	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
\bar{A}	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Tabelle 1. Vierfeldertafel

SECTION 6

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung bei Binomialverteilung

Definition 8

Ist eine Zufallsgröße binomialverteilt, also $B_{n,p}$ -verteilt, so ist

Erwartungswert $\mu = n \cdot p$

Varianz $Var(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

SECTION 7

Testen von Hypothesen

SUBSECTION 7.1

Einseitiger Hypothesentest

Example

Ein Betrieb bezieht Bauteile von einer Zulieferfirma. Der Betriebsleiter vermutet, dass mehr als 5% der Bauteile defekt sind. Dazu führt er einen Hypothesentest mit einem Stichprobenumfang von 200 Bauteilen auf dem Signifikanzniveau 5% durch. Als Nullhypothese wählt er:
„Höchstens 5% der Bauteile sind defekt“.

- a) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel.

$H_0 \leq 0,05$ Höchstens 5% der Bauteile sind defekt; D.
h. Rechtsseitiger Test

$H_1 > 0,05$ Mehr als 5% der Bauteile sind defekt

$n = 200; \hat{\alpha} = 0,05$ Stichprobenumfang; Signifikanzniveau

$\bar{A} = [g; \dots; n]$ Ablehnungsbereich \bar{A}

$P_p^n(X \geq g) \leq \hat{\alpha}$ Rechtsseitigen Test durchführen

$$1 - P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1) \leq 0,05$$

$P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1) \geq 0,95$ Gesucht ist kleinste natürliche Zahl g , die Kriterium erfüllt

$P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1)$	g
0,976	17
0,956	16
0,922	15

Per `Binomialcdf` ausprobieren; $g = 16$
ist kleinste natürliche Zahl, die das Kriterium erfüllt

$\bar{A} = [16; \dots; 200]$ Wenn das Stichprobenergebnis mehr als 15 defekte Bauteile liefert, wird H_0 verworfen, sonst nicht.

- b) Geben Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit an.

$1 - P_{0,05}^{200}(X \leq g - 1) \leq 0,05$ Fehler 1. Art berechnen

$1 - P_{0,05}^{200}(X \leq 16 - 1) \leq 0,05$ Gesucht ist kleinste natürliche Zahl g , die das Kriterium erfüllt

$$1 - 0,956 \leq 0,05$$

$0,044 \leq 0,05$ Irrtumswahrscheinlichkeit ist 0,044

SUBSECTION 7.2

Zweiseitiger Hypothesentest

Example

Bei einer leicht verbeulten Münze wird vermutet, dass „Wappen“ nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% fällt. Dazu soll ein Hypothesentest durchgeführt werden, bei dem die Münze 100-mal geworfen wird. Als Signifikanzniveau wird 5% gewählt. Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich und formulieren Sie die Entscheidungsregel

$$H_0 = 0,5$$

„Wappen“ fällt in 50% der Fälle

$$H_1 \neq 0,5$$

„Wappen“ fällt nicht in 50% der Fälle

$$n = 100; \hat{\alpha} = 0,05$$

Stichprobenumfang; Signifikanzniveau

$$\bar{A} = [0; \dots; g_1] \cup [g_2; \dots; n]$$

Ablehnungsbereich \bar{A}

$$P_p^n(X \leq g_1) \leq \frac{\hat{\alpha}}{2}$$

Linksseitigen Test durchführen

$$P_{0,5}^{100}(X \leq g_1) \leq 0,025$$

Gesucht ist größte natürliche Zahl g_1 , die das Kriterium erfüllt

$P_{0,5}^{100}(X \leq g_1)$	g_1
0,01	38
0,018	39
0,028	40

Per `Binomialcdf` ausprobieren; $g_1 = 39$ ist größte natürliche Zahl, die das Kriterium erfüllt

$$P_p^n(X \geq g_2) \leq \frac{\hat{\alpha}}{2}$$

Rechtsseitigen Test durchführen

$$1 - P_{0,5}^{100}(X \leq g_2 - 1) \leq 0,025$$

$$P_{0,5}^{100}(X \leq g_2 - 1) \geq 0,975$$

Gesucht ist kleinste natürliche Zahl g_2 , die das Kriterium erfüllt

$P_{0,5}^{100}(X \leq g_2 - 1)$	g_2
0,99	62
0,982	61
0,972	60

Per `Binomialcdf` ausprobieren; $g_2 = 61$ ist kleinste natürliche Zahl, die das Kriterium erfüllt

$$\bar{A} = [0; \dots; 39] \cup [61; \dots; 100]$$

Wenn das Stichprobenergebnis weniger als 40 oder mehr als 60 mal „Wappen“ liefert, wird H_0 verworfen, sonst nicht.