일반물리학실험 보고서

등전위선과 전기장

학과 : 전기컴퓨터공학부

학번 : 201924451

이름 : 김태훈

공동실험자 :

담당 교수 : 정광식

담당 조교 :

실험 날짜 : 2019.10.14(월)

제출 날짜 : 2019.11.04.(월)

1. 실험 목적

주어진 전극 배치에 대해 등전위선과 전기력선을 그려봄으로서 전위와 전기장의 개념을 이해한다.

2. 실험 원리

점전하 q와 q' 사이에는 쿨롱 법칙에 의해서 다음과 같은 힘이 작용한다.

$$\vec{F} = K\frac{qq'}{r^2}\hat{r}$$

여기서 K는 상수로 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$또는 $8.99 \times 10^9 Nm^2/C^2$이고, r은 두 전하 사이의 거리이며, $\hat{r}$은 단위 벡터이다. 임의의 점전하 q가 다른 전하로 인해 생긴 전기장$\vec{E}$로 인해 힘$\vec{F}$를 받을 때 그 점에서의 전기장은

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

로 정의되며, 그 점의 전위 V는 단위 전하당의 위치 에너지로 정의된다.

이때 두 전하 사이의 위치에너지는 $-W = -\int_{x_i}^{x_f}\frac{Kqq'}{x^2}dx = \frac{Kqq'}{x_f} - \frac{Kqq'}{x_i} = U_f - U_i = \Delta U$

이므로 전하 q에서 거리 r만큼 떨어진 위치에서의 전위는

$$V = \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

가 된다. 이 식으로부터 점전하 q에서 방사상으로 같은 거리 r만큼 떨어진 점의 집합인 구의 표면이 전위가 같은 등전위면임을 알 수 있다. 이와 같은 전기장 내에는 같은 전위를 갖는 점들이 존재하며, 이 점들을 연결하면 3차원에서는 등전위면을, 2차원에서는 등전위선을 이룬다.

전기장 $\vec{E}$ 하에서 전하 q를 한 점에서 다른 점으로 $d\vec{l}$만큼 이동시키는 데 필요한 일 dW는 다음 식과 같이 주어진다.

$$dW = q\,dV = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

여기서 dV는 두 점사이의 전위차이며, (-)부호는 전기장의 반대 방향으로 일을 한다는 것이다.
W와 q의 단위가 각각 J(Joule)과 C(Coulomb)이면, 전위 V의 단위는 Volt로 주어진다.(1V=1J/C)
등전위선 위 두 점의 전위차 dV는 0이므로, 등전위선을 따라 전하를 이동시키는데 필요한 양은 dW로 0이다. 따라서 전기장의 방향은 등전위선에 수직이며, 그 방향으로의 미소 변위를 $d\vec{l}$이라 하면 $\vec{E}$와 V 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dl}\hat{r}$$

여기서 $\hat{r}$은 등전위선에 수직인 단위 벡터이다. 등전위선에 수직인 방향은 단위 길이당 전위차가 최대인 방향이므로, 전기장의 방향은 등전위선에 수직인 방향 즉 전위차가 최대인 방향이다.
2차원의 전도선 종이에 두 전극을 통해 전류를 흘린다면, 전도성 종이 표면의 저항에 의해 전압 강하가 일어나게 되고, 같은 전위를 가지는 점들(등전위선)이 생긴다. 그리고 이 등전위선에 수직한 방향으로 (+)극에서 (-)극으로 전기장이 생긴다. 임의의 두 등전위선 V_A, V_B에서 전기장의 방향은

등전위선에 수직이고, 이는 두 등전위선을 잇는 가장 짧은 직선이 된다.(즉 단위 길이당 전위차가 최대인 방향)

3. 실험 기구 및 재료

전도성 종이, 직선 금속전극, 원형 금속전극, 나비볼트, 베이클라이트 밑판, 전선, 직류 전원공급기, 멀티미터, 색연필

4. 실험 방법

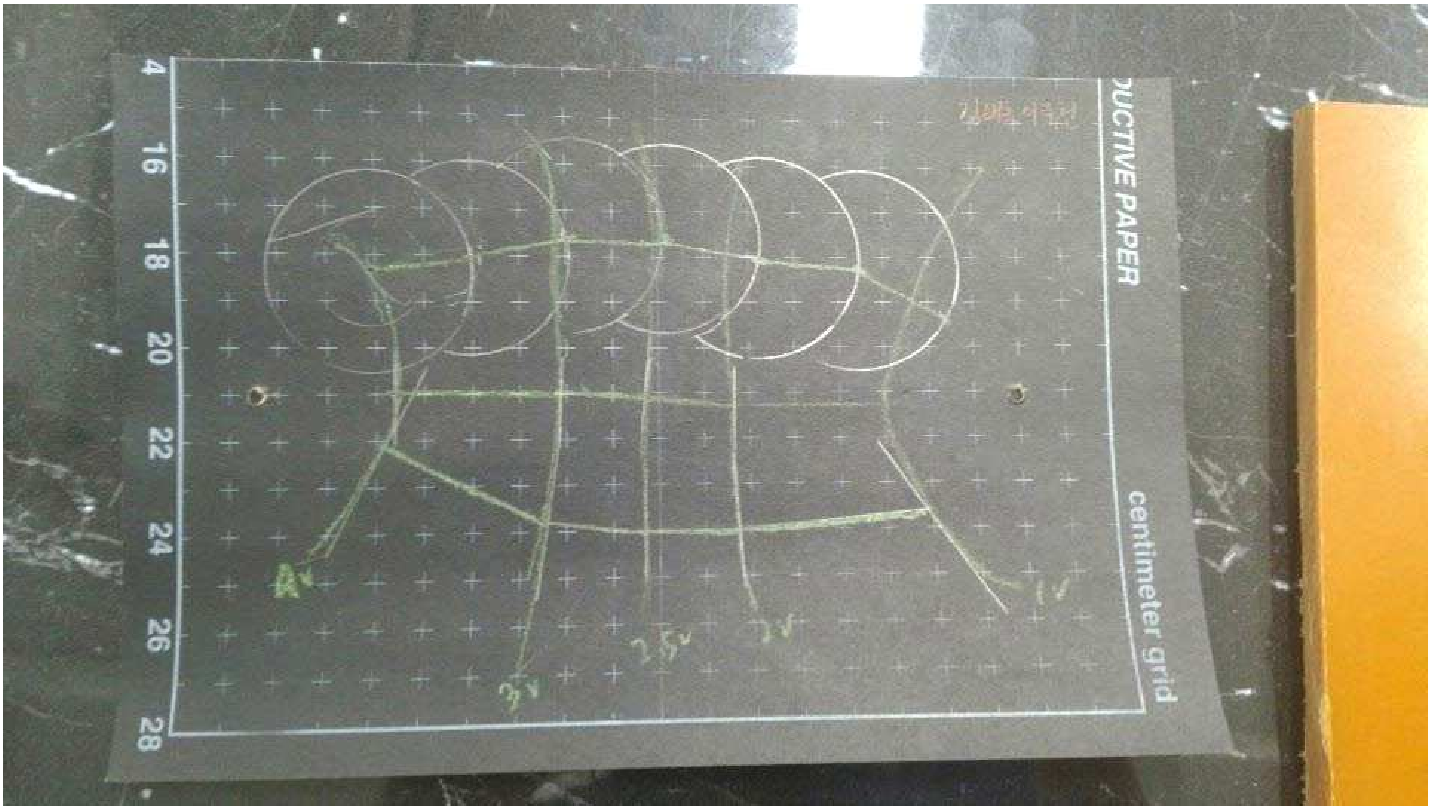
(1)등전위선 측정

ⓐ베이클라이트 밑판 위에 전도성 종이를 올려놓고, 원하는 형태의 금속 전극을 올리고 나비볼트가 금속전극과 전도성 종이를 관통하여 밑판의 나사 구멍에 고정이 되도록 돌려 잠근다.(금속전극이 흔들리지 않도록 고정시켜야 한다.)
ⓑ나비볼트에 선을 연결하고 전원을 연결한다. 이때 전극이 전원과 확실히 접촉되었는지 확인한다.
ⓒ멀티미터의 검정색 탐침을 (-)극에 접촉시키고, 나머지 탐침을 전도성 종이위에 접촉시켜 특정한 전위를 갖는 점을 여러 개 찾아 색연필로 표시한다.
ⓓ여러 개의 등전위선을 일정한 전위차 간격으로 찾고, (-)극에서 등전위선 사이의 전압을 전도성 종이위에 표시한다.

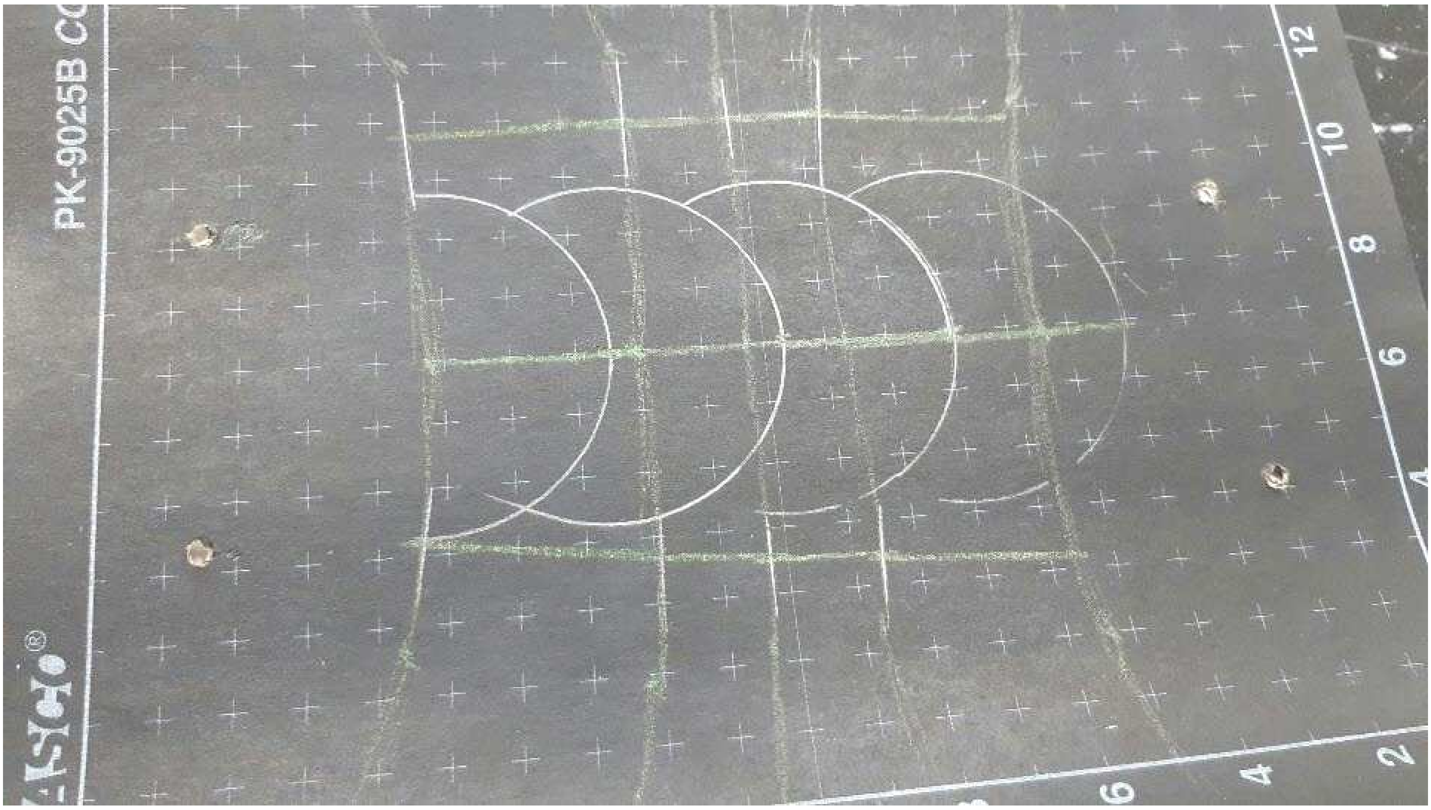
(2)전기장 측정

ⓐ실험 (1)에서 찾은 등전위선 위를 중심으로 원을 그리고, 원주 위에 탐침을 대어 가장 작은 전위차를 가진 점을 찾는다.(전기장 방향대로 갈수록 (+)극과의 전위차는 커진다.)
ⓑ원의 중심과 최대 전위차 점을 연결한 선을 긋고 화살이 원의 중심방향((+)극에서 (-)극 방향)으로 향하도록 화살표를 그린다.
ⓒ ⓐ~ⓑ과정을 반복한다.
ⓓ등전위선에 수직이 되도록 선을 그어 전기장을 그린다.
ⓔ측정이 끝나면 전도성 종이를 꺼내고 등전위선, 전기장모양, 전극모양을 그린다.

5. 실험 결과



<그림1 : 원형 금속전극 사이에서의 등전위선과 전기장>



<그림2 : 직선 금속전극 사이에서의 등전위선과 전기장, 등전위선은 왼쪽부터 4v, 3v, 2.5v, 2v, 1v>

6. 결과에 대한 논의

(1)원형 금속전극의 등전위선

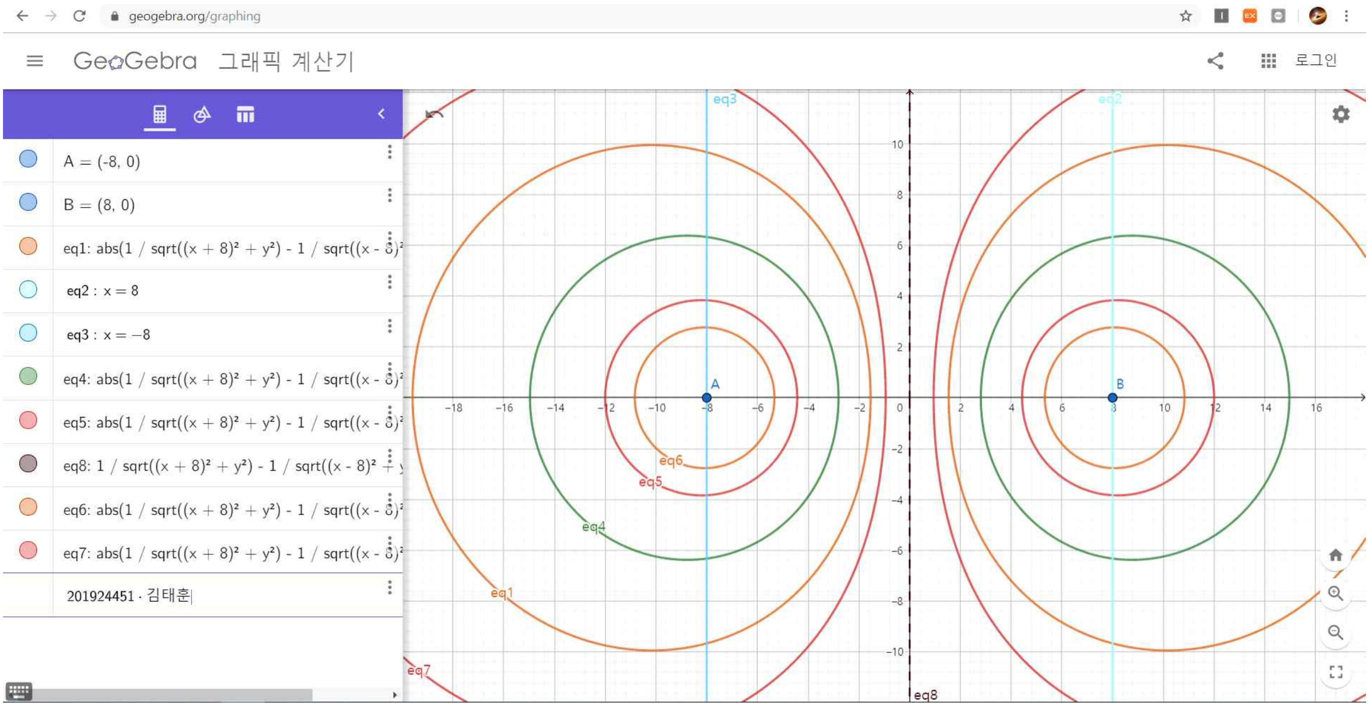
등전위선은 전위가 같은 점을 모은 선으로 하나의 점전하의 등전위선은 원($V = K\frac{q}{r}$)이지만, 전극이 두 개이기에 등전위선은 다른 모양이 된다. 전위는 스칼라이므로 전하 q를 가지는 두 점전하 사이의 등전위선은 다음 식을 통해 얻을 수 있다.

$$K\frac{q}{r_1} - K\frac{q}{r_2} = V_i \ , \ \therefore \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = C \ (C\text{는 상수})$$

이때 두 점전하의 위치를 A(-8,0), B(8,0)이라 하고, 등전위선의 자취 (x,y)를 그리면 식은 다음과 같다.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(x-8)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+8)^2 + y^2}} \right| = C_{ep}$$

예를 들어 C_{ep}가 0, 0.25, 0.03, 0.04, 0.1 등일 때 그래프를 보면 다음과 같다.



<그림3 : 16cm 떨어져 있는 두 점전하에서 등전위선, GeoGebra로 작성>

중간 지점으로 갈수록 곡률이 커지고 중간에는 직선이 형성되어 실제로 그린 등전위선과 비슷하다. A와 B에 각각 수직인 직선(eq2, eq3)는 실험에서 등전위선을 그린 범위를 표시한 것이다.

(2)직선 금속전극의 등전위선

선전하가 x축에 좌표상으로 (-a,0)부터 (b,0)에 있을 때 (0.0)에서 선전하로부터 거리 d에 있는 점 (0,d)의 전기 퍼텐셜은 다음과 같다.

$$V = \int \frac{Kdq}{r} = \int_{-a}^{b} \frac{K\lambda dx}{r} = \int_{-a}^{b} \frac{K\lambda dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = K\lambda \ln\left[\frac{b+\sqrt{b^2+d^2}}{-a+\sqrt{a^2+d^2}}\right]$$

따라서 선전하가 (-a,0), a,0)에 있고 (0,0)에서 선전하로부터 거리 r에 있는 점 (0,r)의 전기 퍼텐셜은 다음과 같다.

$$\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left[\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{-a+\sqrt{a^2+r^2}}\right]$$

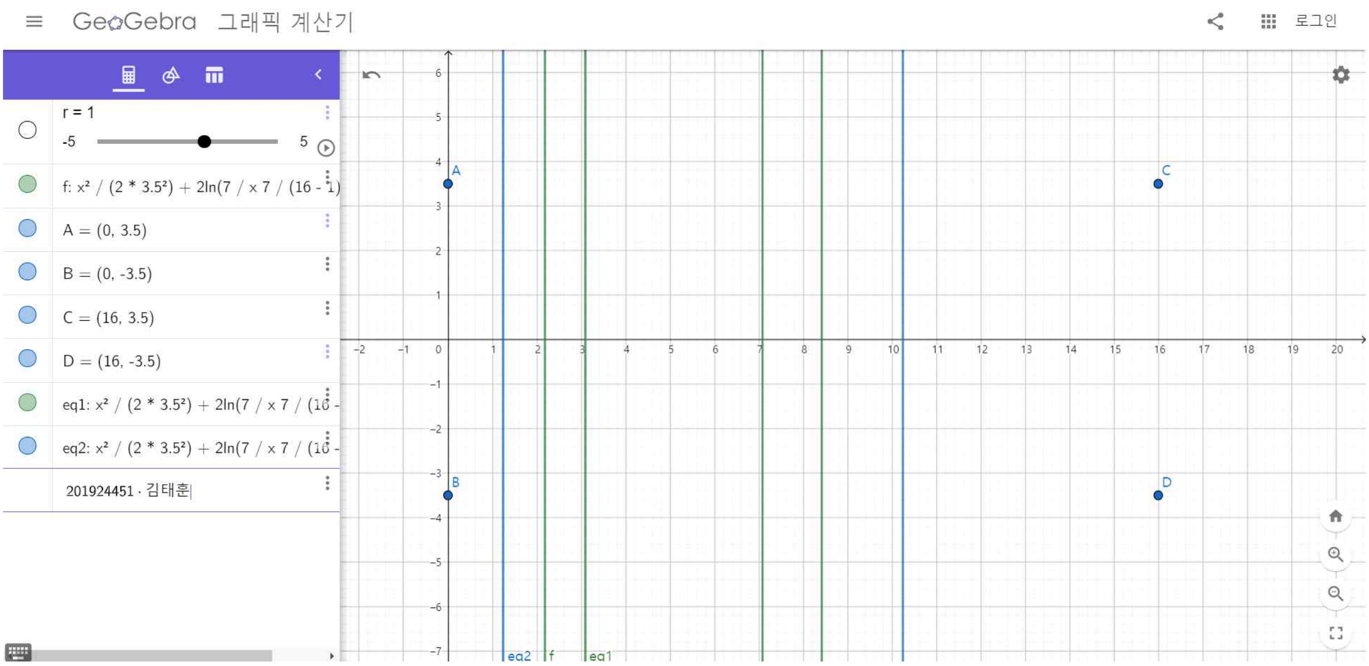
위 식은 $\sqrt{1\pm x}\approx 1\pm\frac{1}{2}x$, $\ln(1+x)\approx x$임을 활용하여 다음과 같이 바꿀 수 있다.(부록 참고)

$$V\approx\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\left(\frac{r^2}{4a^2}+2\ln\left(\frac{2a}{r}\right)\right)$$

따라서, a=7cm인 선전하가 16cm 떨어져있을 때 왼쪽 선전하에서 rcm 떨어진 곳의 전기 퍼텐셜은 다음과 같다.

$$V\approx\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\left(\frac{r^2}{2a^2}+2\ln\left(\frac{2a}{r}\times\frac{2a}{16-r}\right)\right)=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\left(\frac{r^2}{2\times(3.5)^2}+2\ln\left(\frac{7}{r}\times\frac{7}{16-r}\right)\right)$$

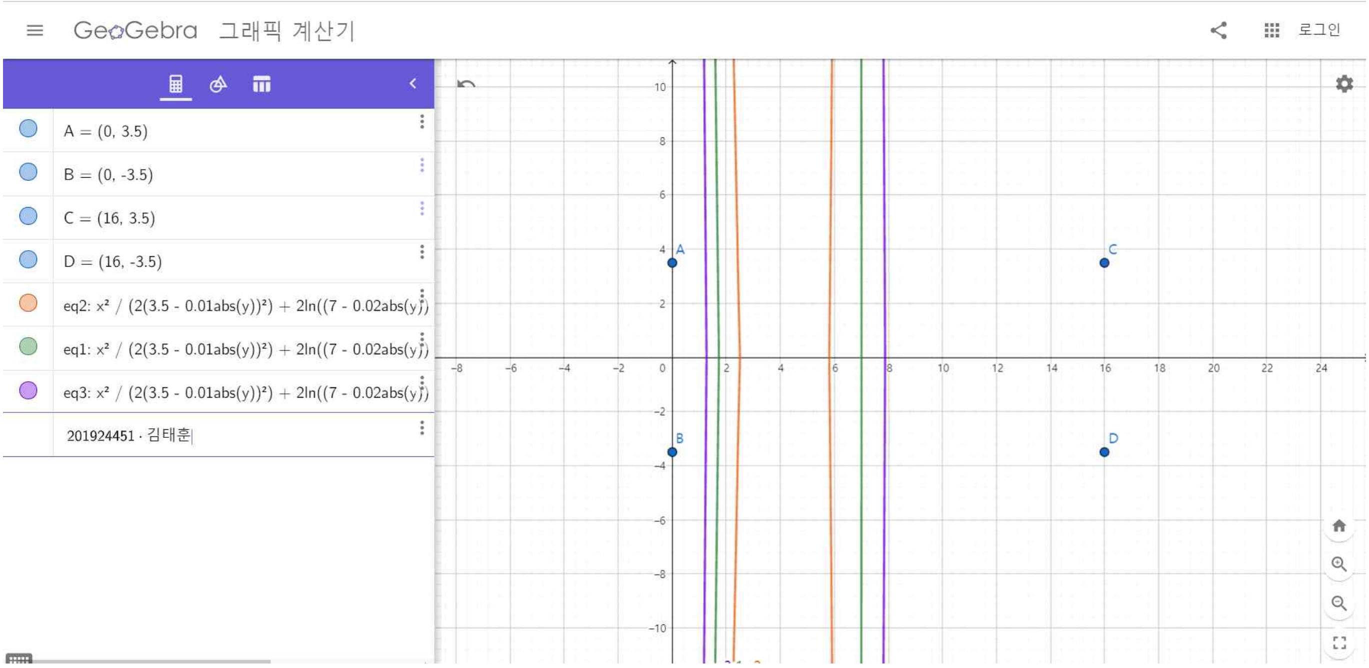
$$\left(\because V\approx\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\left(\frac{r^2}{4a^2}+2\ln\left(\frac{2a}{r}\right)\right)+\frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\left(\frac{r^2}{4a^2}+2\ln\left(\frac{7}{16-r}\right)\right)\right)$$



<그림4 : 실험한 선전하가 무한한 선전하일 때 등전위선>

$\left(\frac{r^2}{2\times(3.5)^2}+2\ln\left(\frac{7}{r}\times\frac{7}{16-r}\right)\right)=C$ 그래프를 그리면 <그림4>와 같지만, 이 식은 문제가 있는데, 실험한 금속전극의 길이가 금속전극 사이의 거리에 비해 크지 않다. 따라서 a=3.5 대신에 a=3.5-0.01|y|를 대입하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{r^2}{2\times(3.5-0.01|y|)^2}+2\ln\left(\frac{7-0.02|y|}{r}\times\frac{7-0.02|y|}{16-r}\right)\right)=C$$



<그림5 : 유한한 선전하의 등전위선, □ABDC 내부에서만 유효>
<그림5>에서 알 수 있듯, 금속전극에 가까워질수록 등전위선이 약간 휘어지는 것을 알 수 있으며, 실제 실험한 결과와 비슷하다.

(3)원형 금속전극과 직선 금속전극의 전기장
전기장 $\vec{E}$ 하에서 전하 q를 한 점에서 다른 점으로 $d\vec{l}$ 만큼 이동시키는 데 필요한 일 dW는 다음 식과 같이 주어진다.

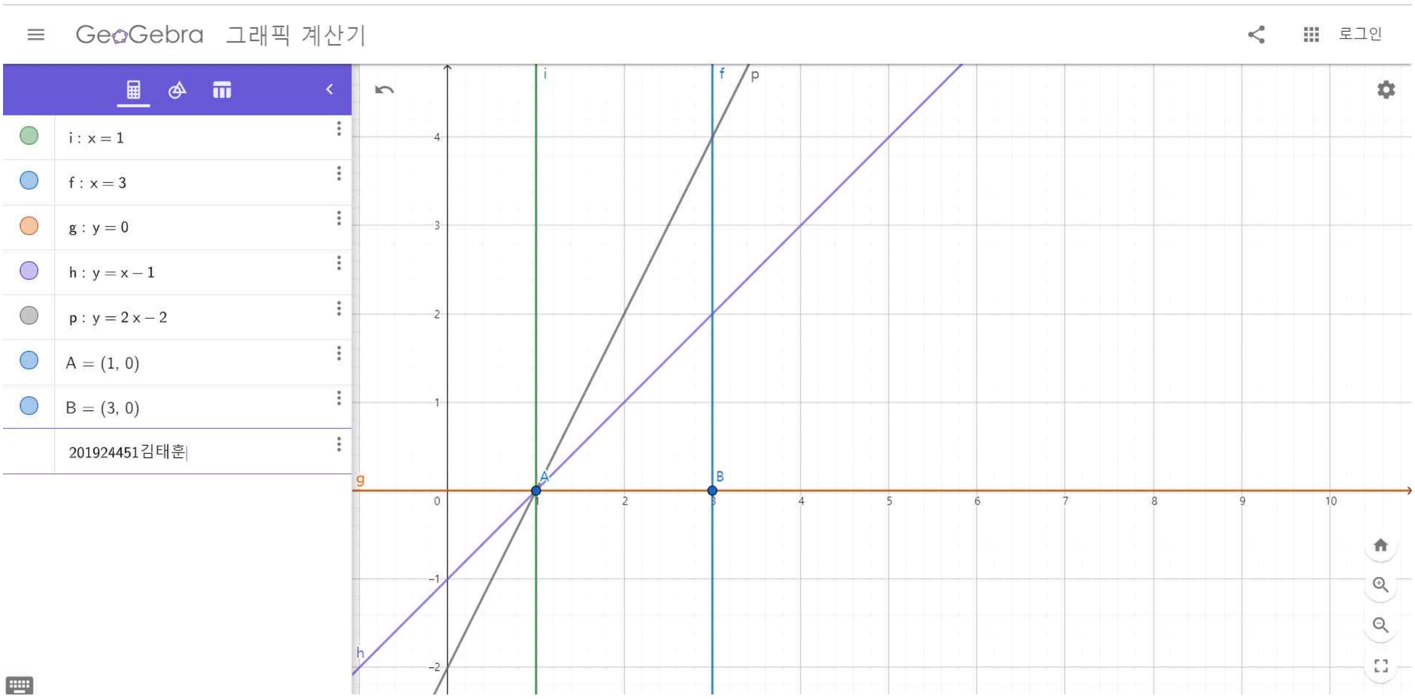
$$dW = q\,dV = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

여기서 dV는 두 점사이의 전위차이며, (-)부호는 전기장의 반대 방향으로 일을 한다는 것이다.
W와 q의 단위가 각각 J(Joule)과 C(Coulomb)이면, 전위 V의 단위는 Volt로 주어진다.(1V=1J/C)
등전위선 위 두 점의 전위차 dV는 0이므로, 등전위선을 따라 전하를 이동시키는데 필요한 양은 dW로 0이다. 따라서, 등전위선 접선 방향의 전기장은 0이고, 전기장의 방향은 등전위선에 수직이다. 또, 등전위선의 수직인 방향은 단위길이당 전위차가 가장 큰 방향이다.
왜냐하면 <그림6>에서 등전위선 I의 전위를 3v, f의 전위를 2v라 하고, I 등전위선의 접선과 p,h,g 직선과의 각도를 θ라 하면 단위길이당 전위차는 다음과 같다.

$\Delta V_{단위길이당} = \dfrac{1}{\overline{AB}\sec(90^\circ - \theta)}$, 이때 전기장의 방향은 등전위선에 수직이므로,

$$\theta = 90^\circ,\ \therefore \Delta V_{단위길이당} = \frac{1}{\overline{AB}} > \frac{1}{\overline{AB}\sec(90^\circ - \theta)} (0^\circ < \theta < 90^\circ)$$

따라서 등전위선의 수직인 방향은 단위길이당 전위차가 가장 큰 방향이다.



<그림6 등전위선과 전기장 방향>

또는 $dW = q\,dV = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$ 식에서 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$dV = -q\vec{E} \cdot d\vec{l} = |E||dl|cos\theta$$

이때 dV가 최대가 되기 위해서는 $\theta = 0^\circ$ 이어야 하고, 이는 $\vec{E}, d\vec{l}$ 방향이 동일하다는 것으로, 즉 $d\vec{l}$이 전기장 방향일 때 dV가 최대가 됨을 알 수 있고, 전기장 방향은 등전위선에 수직이므로, 등전위선에 수직인 방향이 전위차가 최대가 되는 방향임을 알 수 있다.

7. 결론

멀티미터를 이용하여 원형 금속전극, 직선 금속전극 사이의 등전위선를 찾고, 전기장을 찾아 그렸다. 원형 금속전극에서 등전위선은 <그림1>과 같고, 이를 그래프에 옮기면 <그림3>과 같다. 직선 금속전극에서 등전위선은 <그림2>와 같고, 이를 그래프로 옮기면 <그림5>와 같다. 또 전기장은 등전위선에 수직임을 알 수 있고, 이는 단위길이당 전위차가 가장 큰 방향이다.

8. 부록

(1)선전하의 전기퍼텐셜 구하기

선전하의 전기퍼텐셜은 다음과 같다.

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left[\frac{a+\sqrt{a^2+r^2}}{-a+\sqrt{a^2+r^2}}\right]$$

이 때 ln안에 있는 분수의 분모와 분자에 a를 나누면 다음과 같다.

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left(\frac{\sqrt{1+(\frac{r}{a})^2}+1}{\sqrt{1+(\frac{r}{a})^2}-1}\right)$$

이때 $\sqrt{1\pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x$ 임을 이용하면

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left(\frac{1+\frac{r^2}{2a^2}+1}{1+\frac{r^2}{2a^2}-1}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left(\frac{2+\frac{r^2}{2a^2}}{\frac{r^2}{2a^2}}\right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}\ln\left(\frac{1+\frac{r^2}{4a^2}}{\frac{r^2}{4a^2}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}[\ln(1+\frac{r^2}{4a^2}) - \ln(\frac{r^2}{4a^2})]$$

이때 $\ln(1+x) \approx x$임을 이용하면

$$V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}(\frac{r^2}{4a^2} + 2\ln(\frac{2a}{r}))$$

$\therefore V \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon}(\frac{r^2}{4a^2} + 2\ln(\frac{2a}{r}))$이며 만약 r보다 a가 매우 클 경우 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{a\rightarrow\infty} \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon}\ln(\frac{2a}{r})$$

9. 참고문헌

(1)일반물리학실험, 5판, 부산대학교 물리학교재편찬위원회, 청문각,2019

(2)대학물리학, 4판, 26장, Randall D. Knight (심경무 외 옮김), 청문각, 2019

(3)부산대학교 일반물리학실험실, https://gplab.pusan.ac.kr/gplab/index..do

(4)Potential of Line Charge
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/potlin.html

(5)UY1: Electric Potential Of An Infinite Line Charge
https://www.miniphysics.com/uy1-electric-potential-of-an-infinite-line-charge.html