数学归纳原理与递归

数学 X 计算机科学

背景知识

皮亚诺公理体系

1. 0是一个自然数
2. 如果n是一个自然数，那么n++也是一个自然数
3. 0不紧跟在任何自然数之后。
4. 对于不同的自然数，紧跟在它们之后的数字也一定是不同的。
5. 令P(n) 表示自然数n的任意一个性质，如果P(0)为真且P(n)为真时，一定有P(n++)也为真，那么对于任意自然数n，P(n)一定为真。（数学归纳原理）

皮亚诺公理体系

1. $0 \in N$
2. $\forall\, n \in N$，$n{+}{+} \in N$
3. $\forall\, n \in N$，$n{+}{+} \neq 0$
4. $\forall\, n, m \in N$，$n \neq m \Rightarrow n{+}{+} \neq m{+}{+}$
5. 令P(n) 表示自然数n的任意一个性质，如果P(0)为真且P(n)为真时，一定有P(n++)也为真，那么对于任意自然数n，P(n)一定为真

数学归纳原理的等价表述

令*P*(n) 表示自然数n的任意一个性质，如果*P*(0)为真且*P*(n)为真时，一定有*P*(n++)也为真，那么对于任意自然数n，*P*(n)一定为真

如果：

1. 性质P(0) 为真
2. 性质P(n)为真时，性质P(n++)为真

那么：

性质*P*对于任意自然数成立

数学归纳原理的证明

设S是一个让性质*P*成立的所有自然数的集合（包含0），假定S不是所有自然数的集合，那么就存在至少一个自然数不属于集合S使得性质*P*不成立。那么这样的自然数中必然存在一个最小的自然数，记为k（k≠0）。因为k>0, 所以k--是小于k的自然数，并且一定在集合S中，即*P*(k--)成立。又因为条件2，*P*((k--)++)成立，即*P*(k)成立这与假设不符，所以数学归纳原理成立

第二数学归纳原理

Swift Review

1. 常量或变量的声明：**let/var** name: Type = Value
2. 几个基本类型：String, Int, Double, Bool, Array<T>
3. 条件语句: if BE {..} else if BE {..} else {..}
4. 循环语句:
    1. while BE {..}
    2. for element in Array where BE {..}

1. 函数(在swift中，函数是一等公民)：
    1. func fname(_ name1: Type, name_out name2: Type, name3: Type) {..}
    2. “Return” Func: func fname(..) -> Type {..}
2. 使用函数:
    1. fname(value1, name_out: value2, name3: value3)
    2. “Return” Func: var a = fname(..)
        1. Now a have fname’s return value
3. 函数也是一种「类型」

函数的递归

见Xcode playground

汉诺塔问题

1. 证明对于n个圆环，至少需要移动2^n - 1次才能把所有圆环搬到另一个柱子上（提示：我们先把n-1个圆环移动到中间的柱子，然后把最大的圆环移到目标位置，最后把中间柱子上的所有圆环都移动到目标位置）

2. 尝试把你刚才的证明过程用Swift代码实现，即不用你得到的结论，而是用刚才的证明过程去编写计算最小移动次数的代码

3. 如何优化现有代码