北京大学暑期课《ACM/ICPC竞赛训练》

北京大学信息学院 郭炜
guo_wei@PKU.EDU.CN
http://weibo.com/guoweiofpku

课程网页：http://acm.pku.edu.cn/summerschool/pku_acm_train.htm

最小生成树(MST)问题

北京大学信息学院

郭炜/郑聃崴/陈国鹏

图的生成树

- 在一个连通图G中，如果取它的全部顶点和一部分边构成一个子图G’，即：

  $$V(G')=V(G);E(G')\in E(G)$$

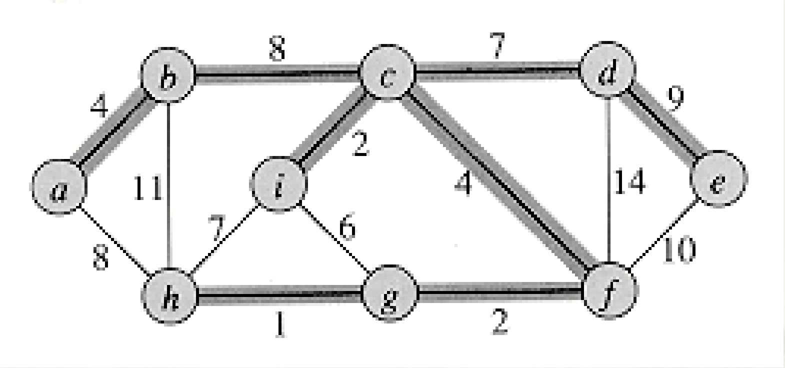
  若边集E(G’)中的边既将图中的所有顶点连通又不形成回路，则称子图G’是原图G的一棵生成树。
- 一棵含有n个点的生成树，必含有n-1条边。

最小生成树

- 对于一个连通网（连通带权图，假定每条边上的权均为大于零的实数）来说，每棵树的权（即树中所有边的权值总和）也可能不同
- 具有权最小的生成树称为最小生成树。

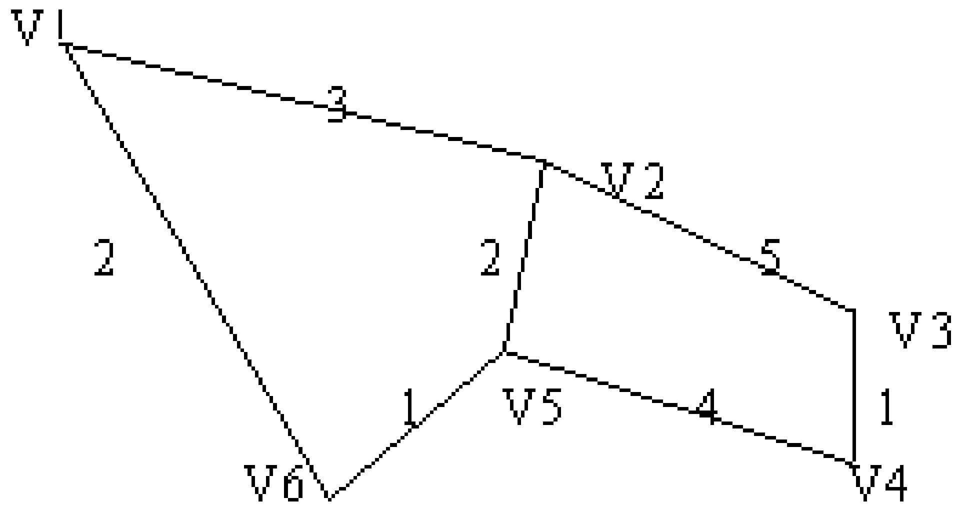
最小生成树

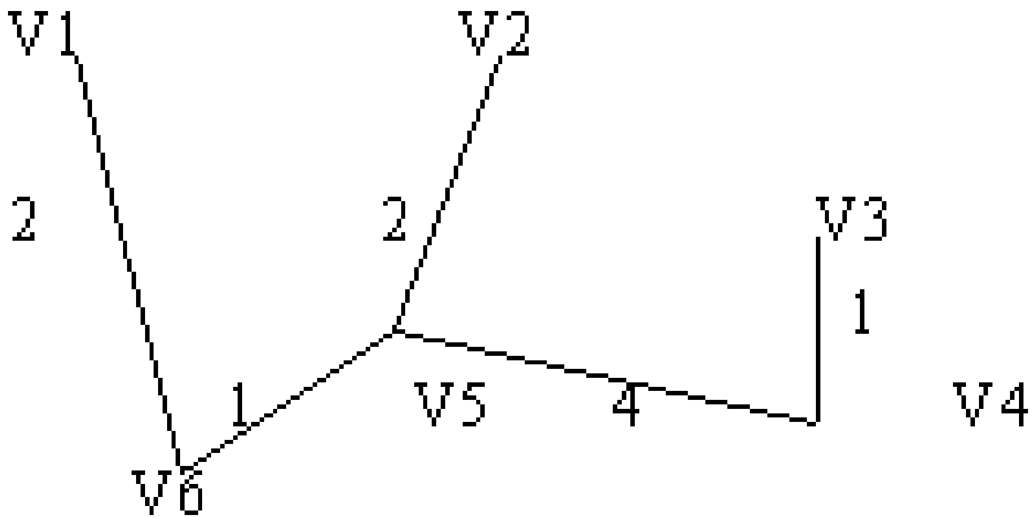
- 生成树
  - 无向连通图的边的集合
  - 无回路
  - 连接所有的点
- 最小
  - 所有边的权值之和最小



Prim算法

- 假设G=(V,E)是一个具有n个顶点的连通网，T=(U,TE)是G的最小生成树，U,TE初值均为空集。
- 首先从V中任取一个顶点（假定取v1），将它并入U中，此时U={v1}，然后只要U是V的真子集(U∈V)，就从那些一个端点已在T中，另一个端点仍在T外的所有边中，找一条最短边，设为(v_i,v_j),其中$v_i \in U, v_j \in V-U$，并把该边(v_i, v_j)和顶点v_j分别并入T的边集TE和顶点集U，如此进行下去，每次往生成树里并入一个顶点和一条边，直到n-1次后得到最小生成树。


V1
3
V2
2
2
5
V3
1
V5
4
1
V6
V4


V1
V2
2
2
V3
1
1
V5
4
V4
V6

Prim算法实现

- 图节点数目为N,正在构造的生成树为T,
- 维护Dist数组,Dist[i]表示Vi到T的“距离”
- 开始所有Dist[i] = 无穷大, T 为空集

1) 若 |T| = N， 最小生成树完成。否则取Dist[i]最小的不在T中的点Vi, 将其加入T

2) 更新所有与Vi有边相连且不在T中的点Vj的Dist值：

Dist[j] = min(Dist[j],W(Vi,Vj))

3) 转到1）

关键问题

- **每次如何从连接T中和T外顶点的所有边中，找到一条最短的**
- 1) 如果用邻接矩阵存放图，而且选取最短边的时候遍历所有点进行选取，则总时间复杂度为 $O(V^2)$, V 为顶点个数
- 2)用邻接表存放图,并使用堆来选取最短边，则总时间复杂度为O(ElogV)
- 不加堆优化的Prim 算法适用于密集图，加堆优化的适用于稀疏图

POJ 1258 最小生成树模版题

输入图的邻接矩阵，求最小生成树的总权值（多组数据）

输入样例：

4

0 4 9 21

4 0 8 17

9 8 0 16

21 17 16 0

输出样例：

28

prioirty_queue实现 Prim + 堆 完成POJ1258

```
//by Guo Wei
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
#include <queue>
using namespace std;
const int  INFINITE = 1 << 30;
struct Edge
{
        int v; //边端点，另一端点已知
        int w; //边权值，也用来表示v到在建最小生成树的距离
        Edge(int v_ = 0, int w_ = INFINITE):v(v_),w(w_) { }
        bool operator <(const Edge & e) const
        {
                return w > e.w; //在队列里，边权值越小越优先
        }
};
vector< vector <Edge> > G(110); //图的邻接表
```

```
int HeapPrim(const vector<vector<Edge> > & G,  int n)
//G是邻接表,n是顶点数目，返回值是最小生成树权值和
{
        int i,j,k;
        Edge xDist(0,0);
        priority_queue<Edge> pq; //存放顶点及其到在建生成树的距离
        vector<int> vDist(n); //各顶点到已经建好的那部分树的距离
        vector<int> vUsed(n);//标记顶点是否已经被加入最小生成树
        int nDoneNum = 0; //已经被加入最小生成树的顶点数目
        for( i = 0;i < n;i ++ ) {
                vUsed[i] = 0;
                vDist[i] = INFINITE;
        }
        nDoneNum = 0;
        int nTotalW = 0; //最小生成树总权值
        pq.push(Edge(0,0)); //开始只有顶点0，它到最小生成树距离0
```

```
    while( nDoneNum < n && !pq.empty() ) {
        do {//每次从队列里面拿离在建生成树最近的点
            xDist = pq.top();        pq.pop();
        } while( vUsed[xDist.v] == 1 && ! pq.empty());
        if( vUsed[xDist.v] == 0 ) {
            nTotalW += xDist.w;   vUsed[xDist.v] = 1;  nDoneNum ++;
            for( i = 0;i < G[xDist.v].size();i ++ ) {//更新新加入点的邻点
                int k = G[xDist.v][i].v;
                if( vUsed[k] == 0) {
                    int w = G[xDist.v][i].w ;
                    if( vDist[k] > w ) {
                        vDist[k] = w;
                        pq.push(Edge(k,w));
                    }
                }
            }
        }
    }
    if( nDoneNum < n )
        return -1; //图不连通
    return nTotalW;
}
```

考察了所有的边，且考察一条边时 可能执行 pq.push(Edge(k,w)) 故复杂度O(ELogV)

```
int main()
{
        int N;
        while(cin >> N) {
                for( int i = 0;i < N; ++i)
                        G[i].clear();
                for( int i = 0; i < N; ++i)
                        for( int j = 0; j < N; ++j) {
                                int w;
                                cin  >> w;
                                G[i].push_back(Edge(j,w));
                        }
                cout << HeapPrim(G,N) << endl;
        }
}
```

Kruskal算法

- 假设G=(V,E)是一个具有n个顶点的连通网，T=(U,TE)是G的最小生成树，U=V,TE初值为空。
- 将图G中的边按权值从小到大依次选取，若选取的边使生成树不形成回路，则把它并入TE中，若形成回路则将其舍弃，直到TE中包含N-1条边为止，此时T为最小生成树。

关键问题

- **如何判断欲加入的一条边是否与生成树中边构成回路。**
- 将各顶点划分为所属集合的方法来解决，每个集合的表示一个无回路的子集。开始时边集为空，N个顶点分属N个集合，每个集合只有一个顶点，表示顶点之间互不连通。
- 当从边集中按顺序选取一条边时，若它的两个端点分属于不同的集合，则表明此边连通了两个不同的部分，因每个部分连通无回路，故连通后仍不会产生回路，此边保留，同时把相应两个集合合并

Kruskal算法完成POJ1258

```
//by Guo Wei
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>
using namespace std;
struct Edge
{
        int s,e,w; //起点，终点，权值
        Edge(int ss,int ee,int ww):s(ss),e(ee),w(ww) { }
        Edge() { }
        bool operator < (const Edge & e1) const {
                return w < e1.w;
        }
};
vector <Edge> edges;
vector <int> parent;
```

```
int GetRoot(int a)
{
        if( parent[a] == a)
                return a;
        parent[a] = GetRoot(parent[a]);
        return parent[a];
}
void Merge(int a,int b)
{
        int p1 = GetRoot(a);
        int p2 = GetRoot(b);
        if( p1 == p2)
                return;
        parent[p2] = p1;
}
```

```
int main()   {
        int N;
        while(cin >> N) {
                parent.clear();        edges.clear();
                for( int i = 0;i < N; ++i)   parent.push_back(i);
                for( int i = 0; i < N; ++i)
                        for( int j = 0; j < N; ++j) {
                                int w;
                                cin  >> w;
                                edges.push_back(Edge(i,j,w));
                        }
                sort(edges.begin(),edges.end()); //排序复杂度O(ElogE）
                int done =  0;          int totalLen = 0;
                for( int i = 0;i < edges.size(); ++i) {
                        if( GetRoot(edges[i].s) != GetRoot(edges[i].e)) {
                                Merge(edges[i].s,edges[i].e);
                                ++done;
                                totalLen += edges[i].w;
                        }
                        if( done == N – 1)  break;
                }
                cout << totalLen << endl;
        }
}
```

算法：Kruskal 和 Prim

- Kruskal:将所有边从小到大加入，在此过程中判断是否构成回路
  - 使用数据结构：并查集
  - 时间复杂度：O(ElogE)
  - 适用于稀疏图
- Prim:从任一节点出发，不断扩展
  - 使用数据结构：堆
  - 时间复杂度：O(ElogV) 或 O(VlogV+E)(斐波那契堆）
  - 适用于密集图
  - 若不用堆则时间复杂度为$O(V^2)$

例题： POJ 2349 Arctic Network

- 某地区共有n座村庄，每座村庄的坐标用一对整数(x, y)表示，现在要在村庄之间建立通讯网络。
- 通讯工具有两种，分别是需要铺设的普通线路和无线通讯的卫星设备。
- 只能给k个村庄配备卫星设备，拥有卫星设备的村庄互相间直接通讯。
- 铺设了线路的村庄之间也可以通讯。但是由于技术原因，两个村庄之间线路长度最多不能超过 d, 否则就会由于信号衰减导致通讯不可靠。要想增大 d 值，则会导致要投入更多的设备（成本）

例题：**POJ 2349 Arctic Network**

- 已知所有村庄的坐标 (x , y)，卫星设备的数量 k 。
- 问：如何分配卫星设备，才能使各个村庄之间能直接或间接的通讯，并且 d 的值最小？求出 d 的最小值。
- 数据规模：$0 <= k <= n <= 500$

(From Waterloo University 2002)

思路

- 假设 d 已知，把所有铺设线路的村庄连接起来，构成一个图。需要卫星设备的台数就是图的连通支的个数。
- d越小，连通支就可能越多。
- 那么，只需找到一个最小的d，使得连通支的个数小于等于卫星设备的数目。

答案

把整个问题看做一个完全图，村庄就是点，图上两点之间的边的权值，就是两个村庄的直线距离。

只需在该图上求最小生成树，d 的最小值即为第 K 长边！

因为：最小生成树中的最长k-1条长边都去掉后，正好将原树分成了k 个连通分支，在每个连通分支上摆一个卫星设备即可

为什么d不可能比第k长边更小？

假设最小生成树T上，第k长边连接的点是a,b，那么将边<a,b>去掉后，树就分成了两个部分T1 和T2

要使T1和T2能够通讯，必须在T1中找一点p和T2中的点q相连，若边<p,q>的长度小于<a,b>，则在T上用<p,q>替换<a,b>就能得到更小的生成树，矛盾。因此找不到长度小于<a,b>的<p,q>。

对任何比第k长边短的边e，同理也不可能找到替代e的边。

因此 d不可能更小了

最小生成树可能不止一棵，为什么第k长边长度一定相同？因为有以下结论：

- 一个图的两棵最小生成树，边的权值序列排序后结果相同

证明：假设某个最小生成树T1的边权从小到大排序后的序列为:
a1, a2 …. an
某个最小生成树T2的边权从小到大排序后的序列为:
b1,b2…bn
两者若不同，则必然存在一个最小的i,使得 ai > bi

假设T2中有m条边的权为bi，那么，T1中最多只有m-1条边的权和bi相同。

但是对于T2中任何一条不在T1中的权为bi的边，如果将其从T2去掉，则T2被分成A,B两个部分。那么在T1中连接A,B这两个部分的边，必然权值是等于bi的，否则经过替换，要么T1的权值可以变得更小，要么T2的权值可以变得更小，这和T1,T2是最小生成树矛盾。对T2中每个权值为bi的边，都可以在T1中找到一个权值相同且不在T2的边与其对应，而这些边由于是连接不同部分的，所以不可能相同，因此，在T1中也应该有m条权值为bi的边，这和T1中最多m-1条权值为bi的边矛盾。因此，不存在i,使得的ai>bi，即两个边权序列应该相同。

2011 ACM/ICPC亚洲区预选赛北京赛站

Problem A. Qin Shi Huang's National Road System

一个无向完全图，边有正权值，点也有正权值。可以选择一条边，将其边权值变为0。要求选定这条边(假定为e0)并将其权值变为0后，满足以下条件：A/B最大。其中A是e0连接的两个点的点权值和，B是修改后的图的最小生成树的边权值和。

解题思路：先求一棵最小生成树，求的过程中，每加入一个点，就记录已经在树上的所有点到该点的路径（树上的路径）上的最长边的权值。然后枚举权值要变成0的边uv，如果uv不是树边，则用它替换uv路径上的最大权值边，o(1)时间即得新最小生成树的边权值和；uv是树边，新最小生成树的边权值和即为原最小生成树的边权值和减去边uv的权值。

- 红色部分的做法：
- prim算法中，已经加入生成树的点集合为W
- 往W新增点s时，设 u 属于W,且 s是被连接到W中的v点的，
- 则
- Max_val[v][s] = 边(v,s)的权
- Max_val[u][s] = Max(Max_val[v][s], Max_val[u][v])
- 用时O(V^2)。