北京大学暑期课《ACM/ICPC竞赛训练》

北京大学信息学院 郭炜
guo_wei@PKU.EDU.CN
http://weibo.com/guoweiofpku

课程网页：http://acm.pku.edu.cn/summerschool/pku_acm_train.htm

线段树和树状数组

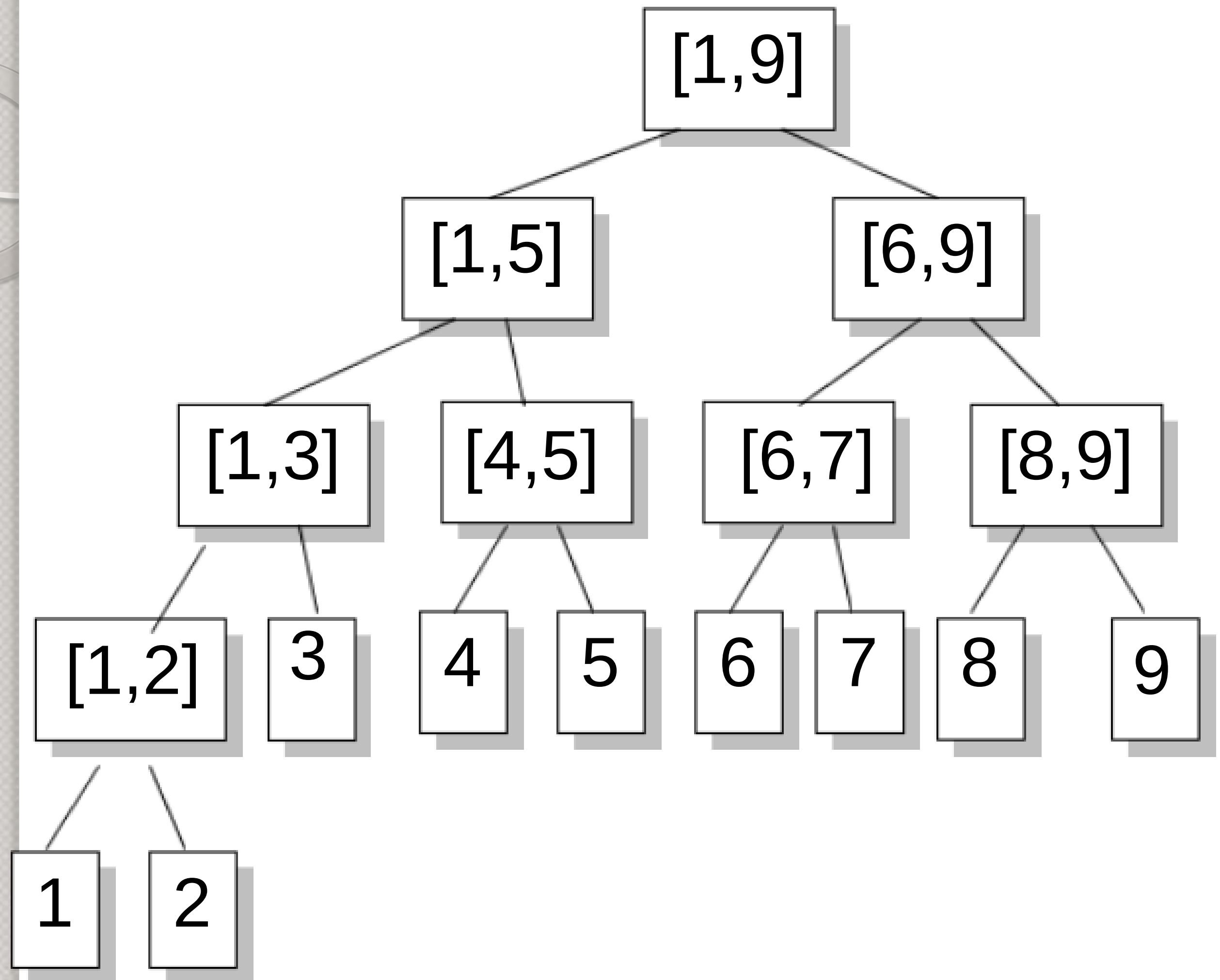
北京大学信息学院 郭炜

线段树(Interval Tree)

- 实际上还是称为区间树更好理解一些。
- 树：是一棵树，而且是一棵二叉树。
- 线段：树上的每个节点对应于一个线段(还是叫“区间”更容易理解，区间的起点和终点通常为整数)
- 同一层的节点所代表的区间，相互不会重叠。同一层节点所代表的区间，加起来是个连续的区间。
- 叶子节点的区间是单位长度，不能再分了。

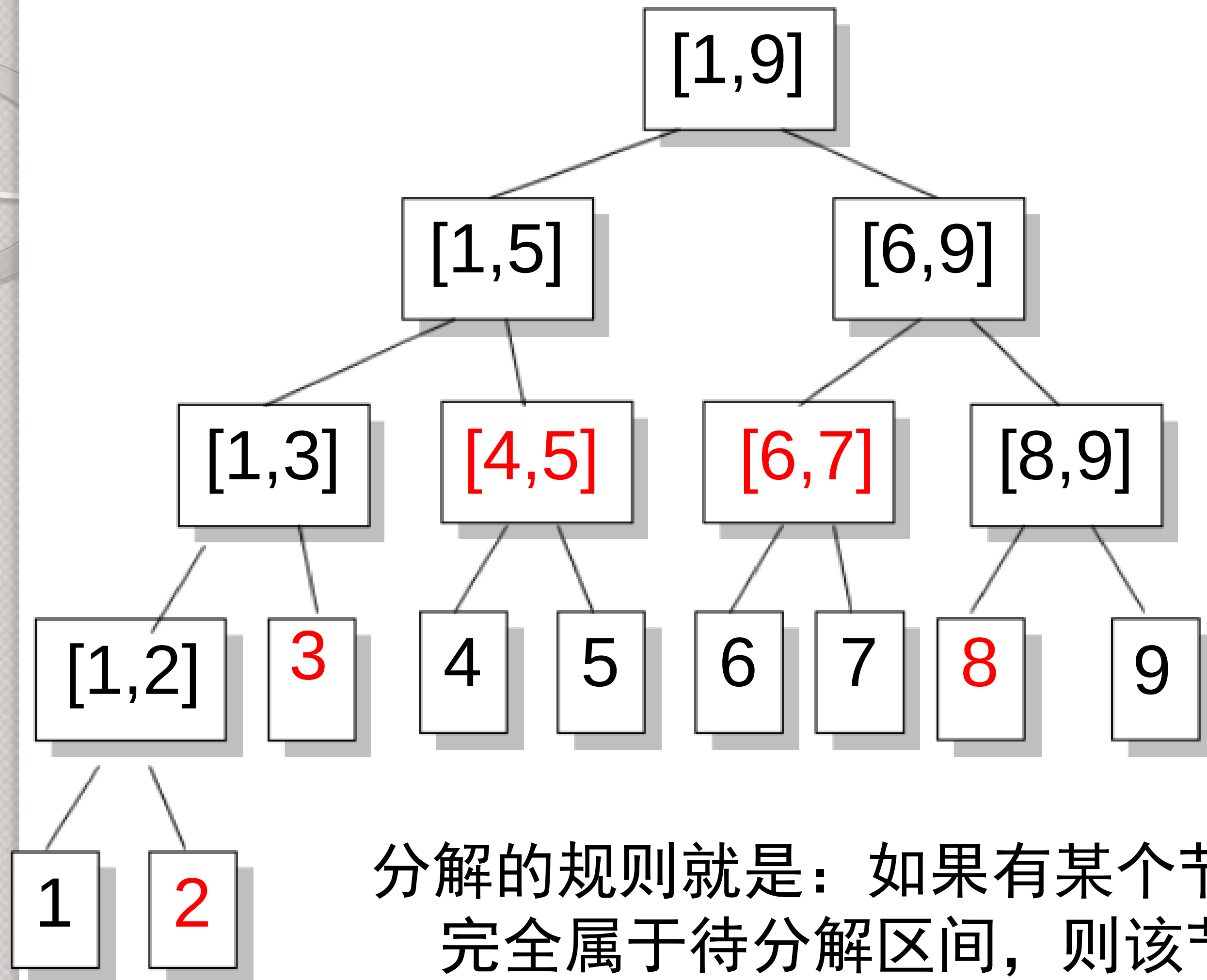
- 线段树是一棵二叉树，树中的每一个结点表示了一个区间[a,b]。a,b通常是整数。每一个叶子节点表示了一个单位区间(长度为1)。对于每一个非叶结点所表示的结点[a,b]，其左儿子表示的区间为[a,(a+b)/2]，右儿子表示的区间为[(a+b)/2+1,b](除法去尾取整）。

- 区间[1, 9]的线段树



- 每个区间的长度是区间内整数的个数
- 叶子节点长度为1，不能再往下分
- 若一个节点对应的区间是[a,b],则其子节点对应的区间分别是[a,(a+b)/2]和[(a+b)/2+1,b] （除法去尾取整）
- 线段树的平分构造，实际上是用了二分的方法。若根节点对应的区间是[a,b],那么它的深度为$\log_2(b-a+1)+1$（向上取整）。
- 叶子节点的数目和根节点表示区间的长度相同.
- 线段树节点要么0度，要么2度, 因此若叶子节点数目为N, 则线段树总结点数目为2N-1

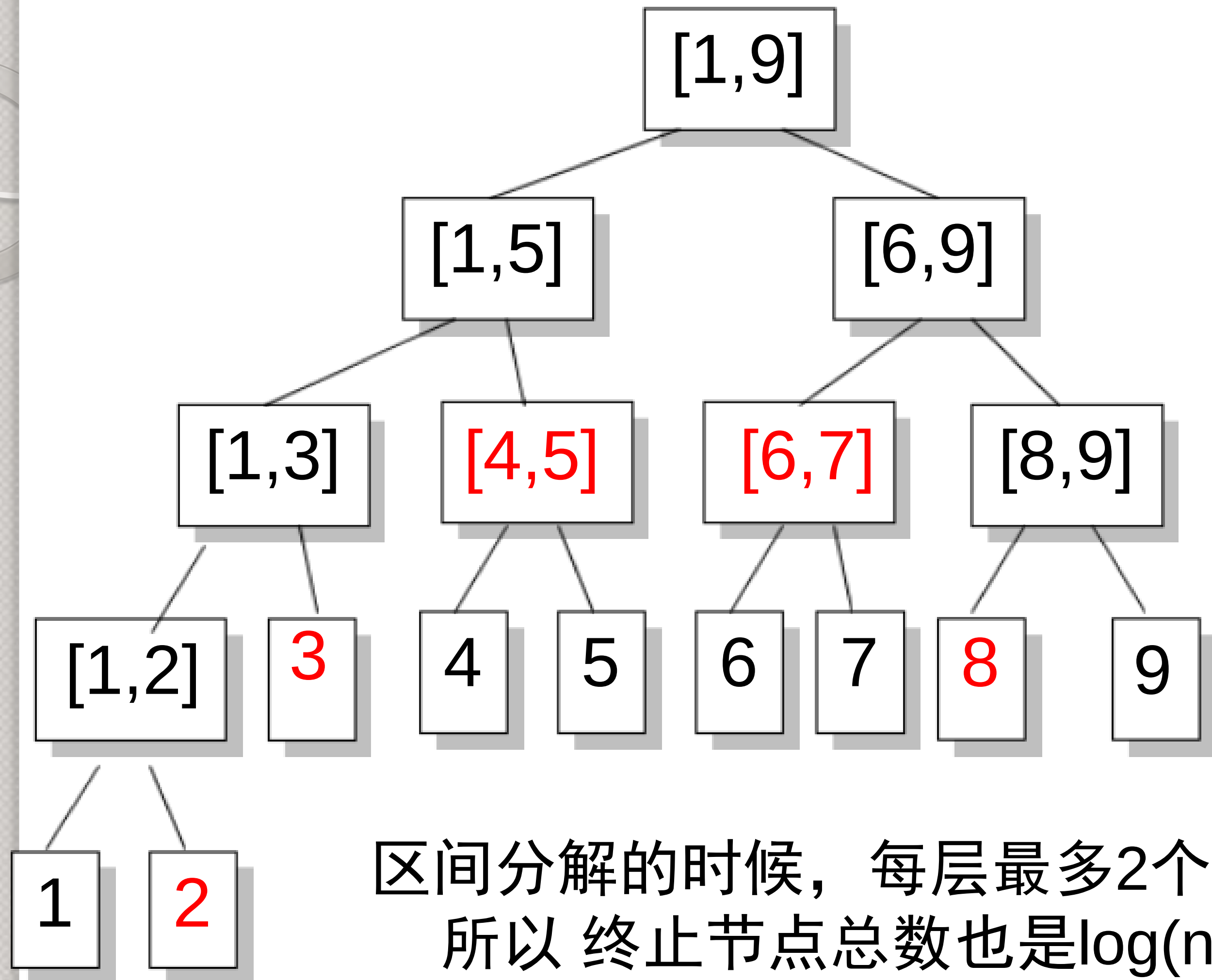
- 区间[1, 9]的线段树上，区间[2,8]的分解



分解的规则就是：如果有某个节点代表的区间，完全属于待分解区间，则该节点为“终止”节点，不再继续往下分解

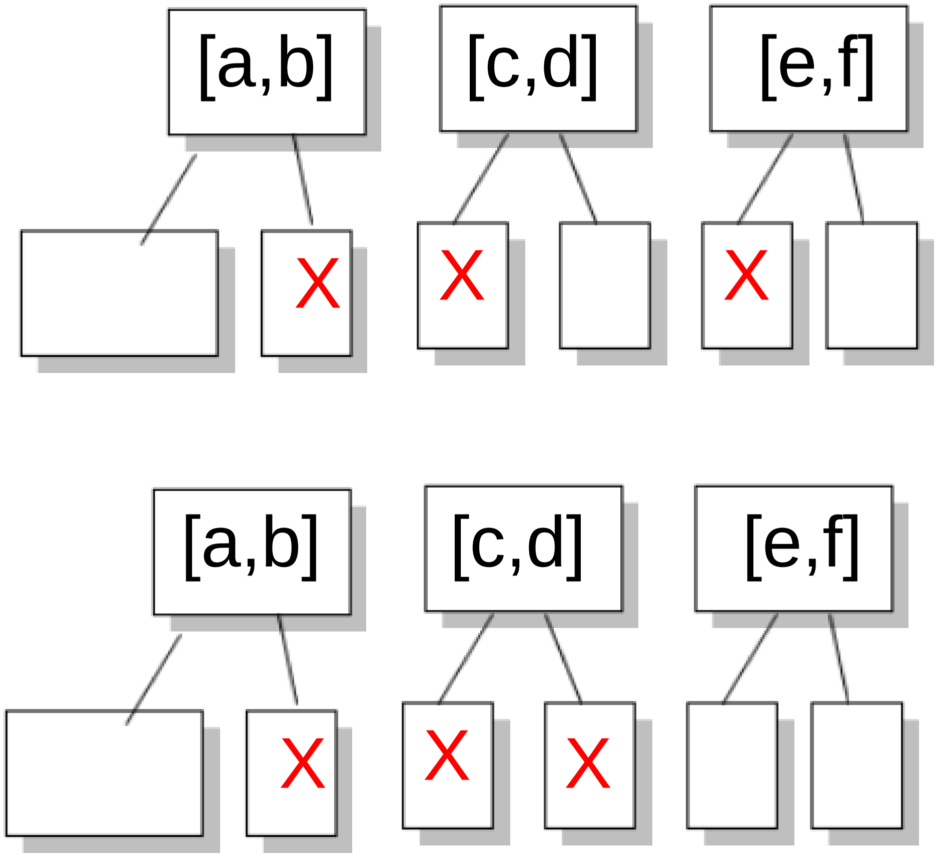
所有“终止”节点所代表的区间都不重叠，且加在一起就恰好等于整个待分解区间

- 区间[1, 9]的线段树上，区间[2,8]的分解



区间分解的时候，每层最多2个“终止节点”，所以 终止节点总数也是log(n)量级的

- 证明每层最多2个“终止节点”：



- X代表终止节点。上述情况不可能发生

线段树的特征

- 1、线段树的深度不超过$\log_2(n)+1$（向上取整，n是根节点对应区间的长度）。
- 2、线段树上，任意一个区间被分解后得到的“终止节点”数目都是log(n)量级。

线段树上更新叶子节点和进行区间分解时间复杂度都是O(log(n))的

- 这些结论为线段树能在O(log(n))的时间内完成插入数据，更新数据、查找、统计等工作，提供了理论依据

线段树的构建

- function 以节点v为根建树、v对应区间为[l,r]
- {
-     对节点v初始化
-     if (l!=r)
-     {
-         以v的左孩子为根建树、区间为[l,(l+r)/2]
-         以v的右孩子为根建树、区间为[(l+r)/2+1,r]
-     }
- }
- 建树的时间复杂度是O(n) n为根节点对应的区间长度

线段树的基本用途

- 线段树适用于和区间统计有关的问题。比如某些数据可以按区间进行划分，按区间动态进行修改，而且还需要按区间多次进行查询，那么使用线段树可以达到较快查询速度。

线段树应用举例

- 给你一个数的序列$A_1A_2\ldots\ldots A_n$。 并且可能多次进行下列两个操作：
- 1、对序列里面的某个数进行加减
- 2、询问这个序列里面任意一个连续的子序列$A_iA_{i+1}\ldots\ldots A_j$的和是多少。
- 希望第2个操作每次能在log(n)时间内完成

线段树应用举例

- 显然，[1,n]就是根节点对应的区间
- 可以在每个节点记录该节点对应的区间里面的数的和Sum。
- 对于操作1：因为序列里面A_i最多只会被线段树的log(n)个节点覆盖。只要求对线段树覆盖A_i的节点的Sum进行加操作，因此复杂度是log(n)
- 对于操作2：同样只需要找到区间所覆盖的"终止"节点，然后把所找"终止"节点的Sum累加起来。因为这些节点的数量是O（log(n))的，所以这一步的复杂度也是log(n)

线段树应用举例

- 如果走到节点[L,R]时，如果要查询的区间就是[L,R]
- (求A_L到A_R的和）那么直接返回该节点的Sum，并累加到总的和上;
- 如果不是，则：
- 对于区间[L,R]，取mid=（L+R）/2；
- 然后看要查询的区间与[L,mid]或[mid+1,R]哪个有交集，就进入哪个区间进行进一步查询。
- 因为这个线段树的深度最深的LogN，所以每次遍历操作都在LogN的内完成。但是常数可能很大。

线段树应用举例

- 如果是对区间所对应的一些数据进行修改，过程和查询类似。
- 用线段树解题，关键是要想清楚每个节点要存哪些信息（当然区间起终点，以及左右子节点指针是必须的），以及这些信息如何高效更新，维护，查询。不要一更新就更新到叶子节点，那样更新效率最坏就可能变成O(n)的了。
- 先建树，然后插入数据，然后更新，查询。

例题： POJ 3264 Balanced Lineup

给定**Q** (1 ≤ *Q* ≤ 200,000)个数A_1,A_2 … A_Q,，多次求任一区间A_i – A_j中最大数和最小数的差。

本题树节点结构是什么?

例题： POJ 3264 Balanced Lineup

给定Q ($1 \le Q \le 200,000$)个数$A_1, A_2 \dots A_Q$,,多次求任一区间$A_i - A_j$中最大数和最小数的差。

本题树节点结构：

```
struct CNode
{
        int L,R; //区间起点和终点
        int minV,maxV; //本区间里的最大最小值
        CNode * pLeft, * pRight;
};
```

也可以不要左右节点指针，用一个数组存放线段树。根节点下标为0。假设线段树上某节点下标为i,则:

左子节点下标为 i *2+1,

右子节点下标为 i*2+2

如果用一维数组存放线段树，且根节点区间[1,n]

- 使用左右节点指针，则数组需要有2n-1个元素
- 不使用左右节点指针，则数组需要有:

  $2*2^{\lceil \log_2 n \rceil}-1$个元素 ($\lceil \log_2 n \rceil$向上取整)

  $2*2^{\lceil \log_2 n \rceil}-1 \le 4n-1$, 实际运用时常可以更小,可尝试 3n

Sample Input

```
6 3 //6个数，3次个查询
1
7
3
4
2
5
1 5
4 6
2 2
```

Sample Output

```
6
3
0
```

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int INF = 0xffffff0;
int minV = INF;
int maxV = -INF;
struct Node //不要左右子节点指针的做法
{
	int L, R;
	int minV,maxV;
	int Mid() {
		return (L+R)/2;
	}
};
Node tree[800010]; //4倍叶子节点的数量就够
```

```
void BuildTree(int root , int L, int R)
{
        tree[root].L = L;
        tree[root].R = R;
        tree[root].minV = INF;
        tree[root].maxV = - INF;
        if( L != R ) {
                BuildTree(2*root+1,L,(L+R)/2);
                BuildTree(2*root+2,(L+R)/2 + 1, R);
        }
}
```

```
void Insert(int root, int i,int v)
//将第i个数，其值为v，插入线段树
{
        if( tree[root].L == tree[root].R ) {
                //成立则亦有 tree[root].R == i
                tree[root].minV = tree[root].maxV = v;
                return;
        }
        tree[root].minV = min(tree[root].minV,v);
        tree[root].maxV = max(tree[root].maxV,v);
        if( i <= tree[root].Mid() )
                Insert(2*root+1,i,v);
        else
                Insert(2*root+2,i,v);
}
```

```
void Query(int root,int s,int e)  {
//查询区间[s,e]中的最小值和最大值，如果更优就记在全局变量里
//minV和maxV里
	if( tree[root].minV >= minV && tree[root].maxV <= maxV )
		return;
	if( tree[root].L == s && tree[root].R == e ) {
		minV = min(minV,tree[root].minV);
		maxV = max(maxV,tree[root].maxV);
		return ;
	}
	if( e <= tree[root].Mid())
		Query(2*root+1,s,e);
	else if( s > tree[root].Mid() )
		Query(2*root+2,s,e);
	else {
		Query(2*root+1,s,tree[root].Mid());
		Query(2*root+2,tree[root].Mid()+1,e);
	}
}
```

```c
int main()
{
	int n,q,h;
	int i,j,k;
	scanf("%d%d",&n,&q);
	BuildTree(0,1,n);
	for( i = 1;i <= n;i ++ ) {
		scanf("%d",&h);
		Insert(0,i,h);
	}
	for( i = 0;i < q;i ++ ) {
		int s,e;
		scanf("%d%d", &s,&e);
		minV = INF;
		maxV = -INF;
		Query(0,s,e);
		printf("%d\n",maxV - minV);
	}
	return 0;
}
```

POJ 3468 A Simple Problem with Integers

给定**Q** (1 ≤ *Q* ≤ 100,000)个数**A_1,A_2 … A_Q**,,
以及可能多次进行的两个操作:

1) 对某个区间**A_i … A_j**的每个数都加**n(n**可变）
2) 求某个区间**A_i … A_j**的数的和

本题树节点要存哪些信息？只存该区间的数的和，行不行？

POJ 3468 A Simple Problem with Integers

只存和，会导致每次加数的时候都要更新到叶子节点，速度太慢(**O(nlogn)**)，这是必须要避免的。

本题树节点结构：

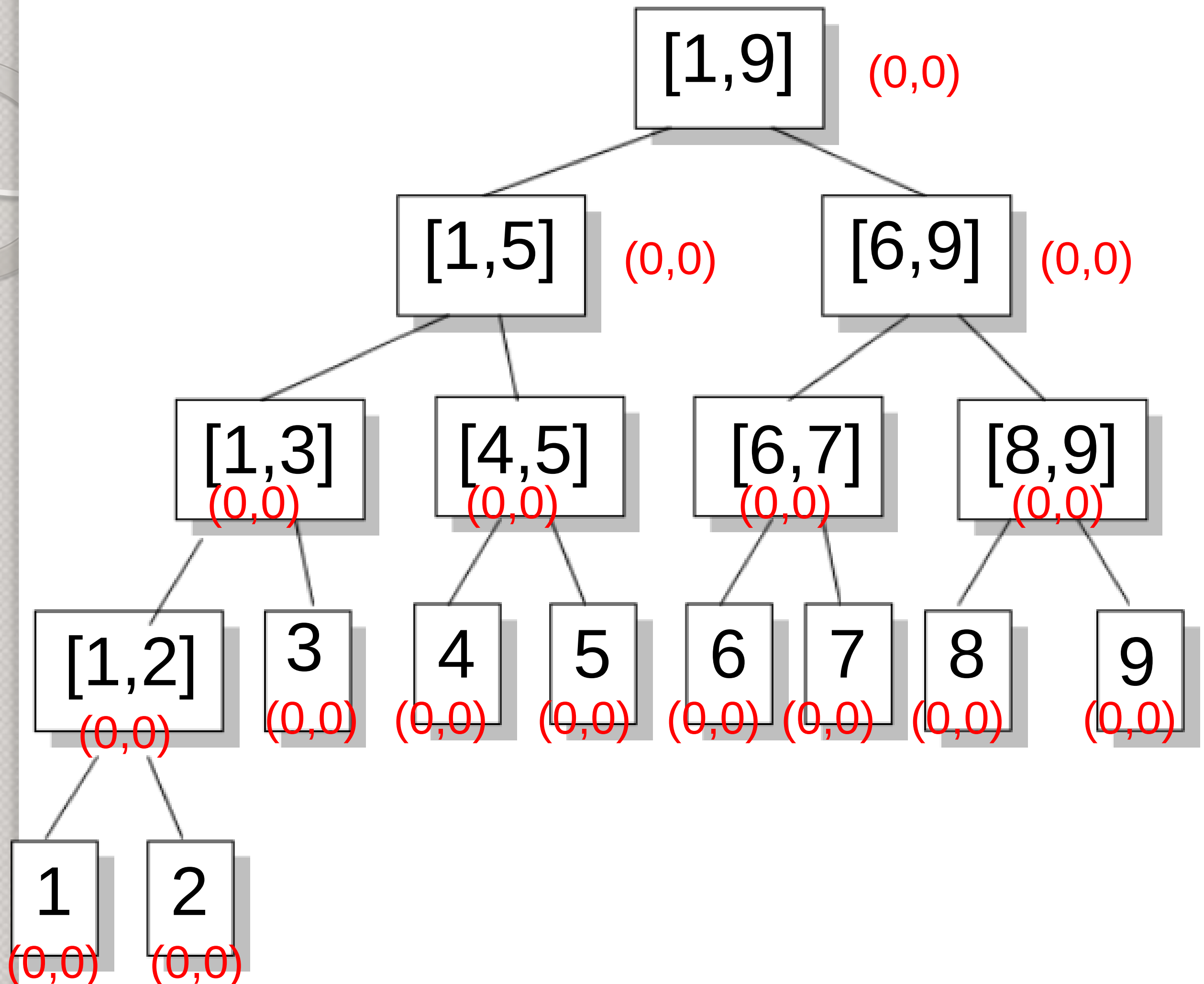
```
struct CNode
{
        int L ,R;
        CNode * pLeft, * pRight;
        long long nSum; //原来的和
        long long Inc; //增量c的累加
}; //本节点区间的和实际上是nSum+Inc*(R-L+1)
```

POJ 3468 A Simple Problem with Integers

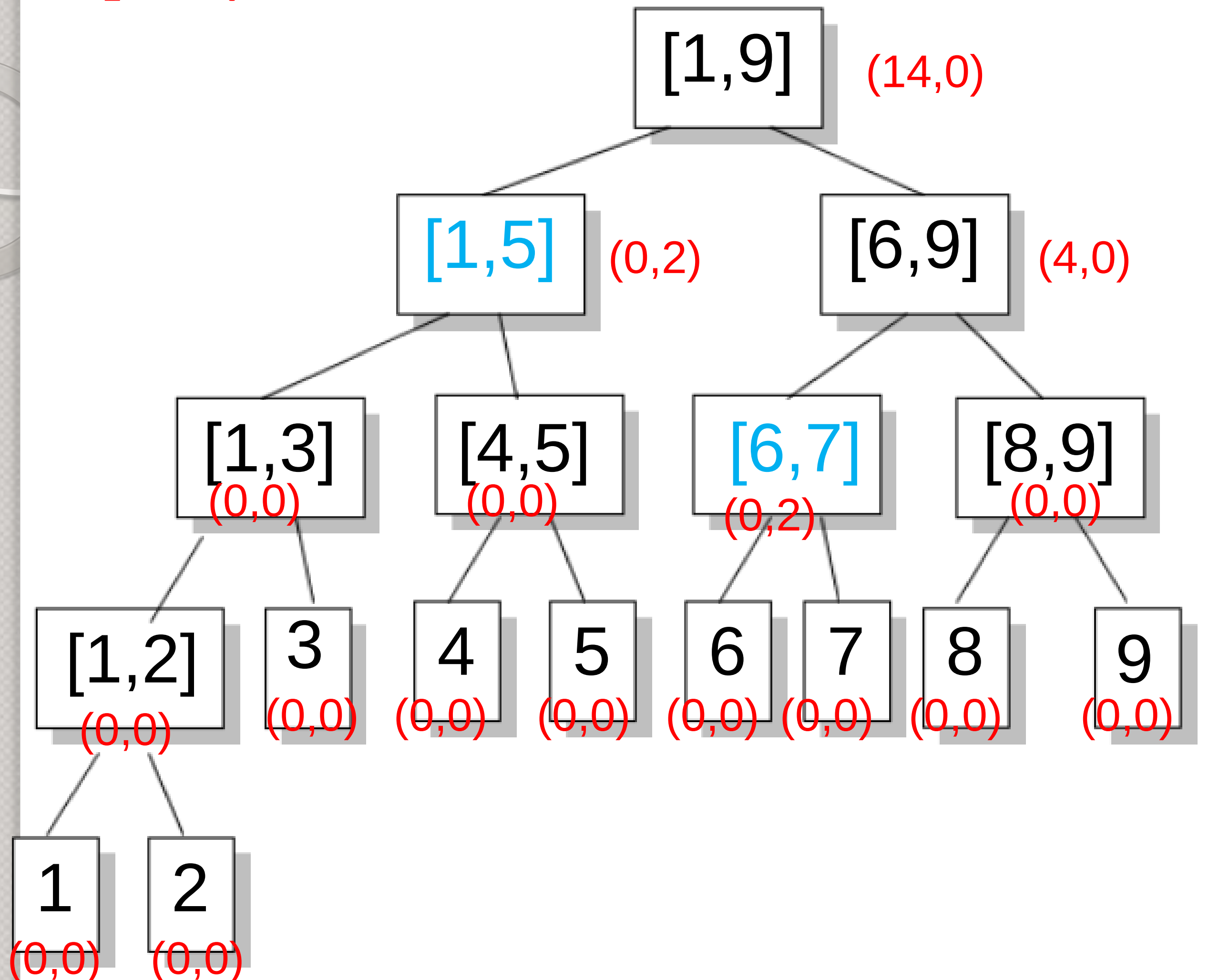
在增加时，如果要加的区间正好覆盖一个节点，则增加其节点的Inc值，不再往下走，否则要更新nSum(加上本次增量),再将增量往下传。这样更新的复杂度就是O(log(n))

在查询时，如果待查区间不是正好覆盖一个节点，就将节点的Inc往下带，然后将Inc代表的所有增量累加到nSum上后将Inc清0，接下来再往下查询。一边查询，一边Inc往下带的过程也是区间分解的过程，复杂度也是O(log(n))

假设开始A_1 ... A_9都是0

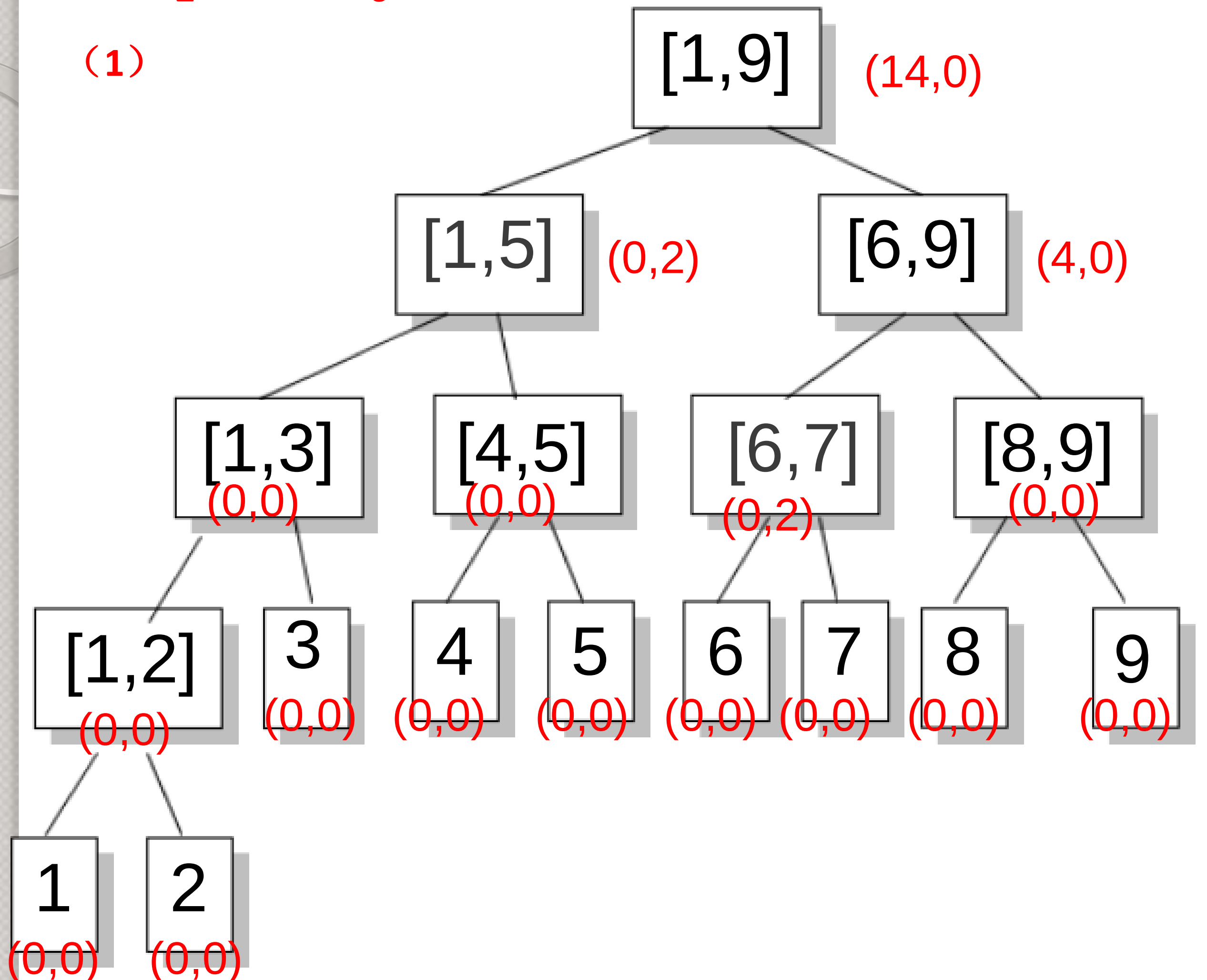


A_1 … A_7 +2


[1,9]
(14,0)
[1,5]
(0,2)
[6,9]
(4,0)
[1,3]
(0,0)
[4,5]
(0,0)
[6,7]
(0,2)
[8,9]
(0,0)
[1,2]
(0,0)
3
(0,0)
4
(0,0)
5
(0,0)
6
(0,0)
7
(0,0)
8
(0,0)
9
(0,0)
1
(0,0)
2
(0,0)

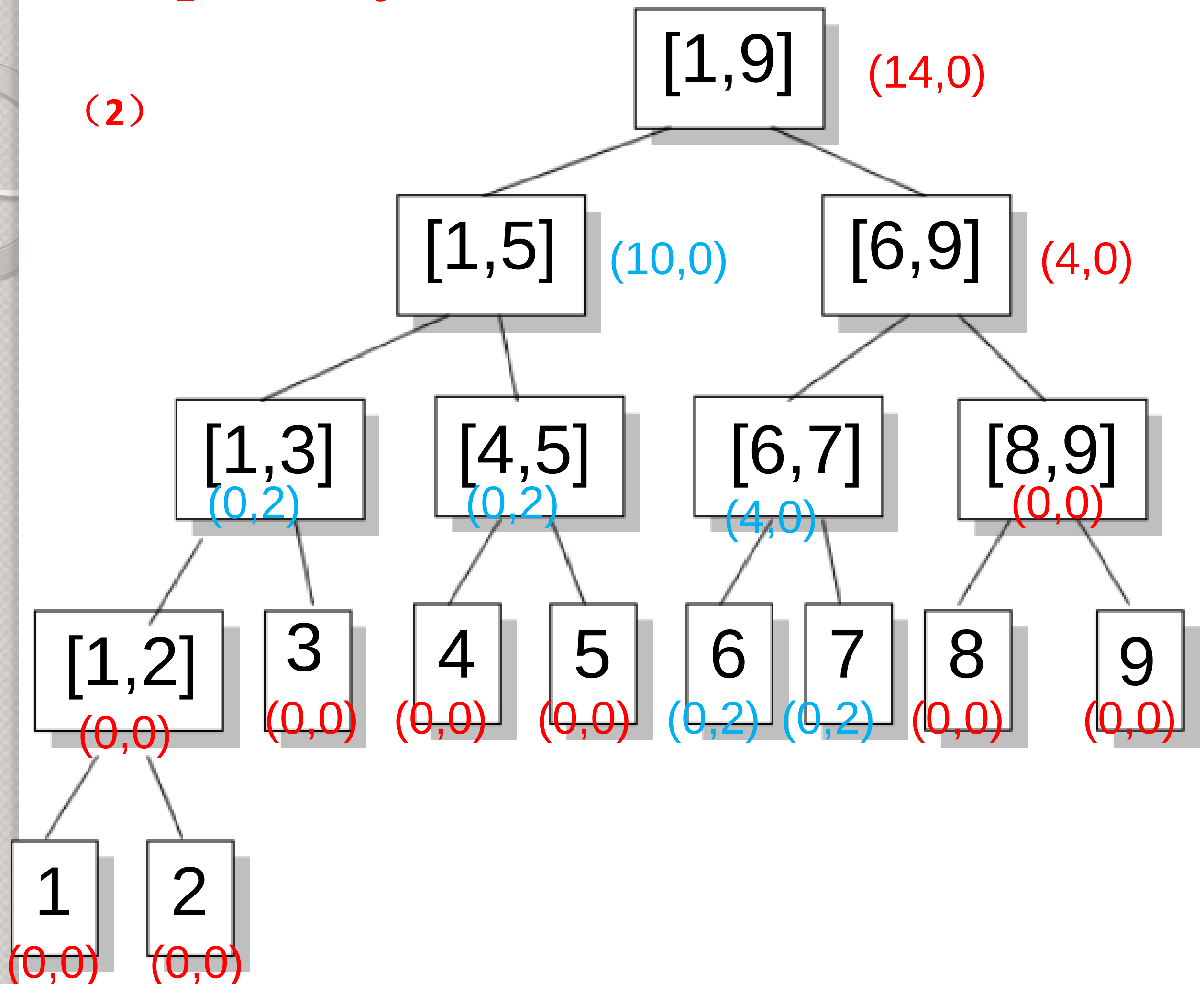
查 $A_2 + \ldots + A_6$

（1）



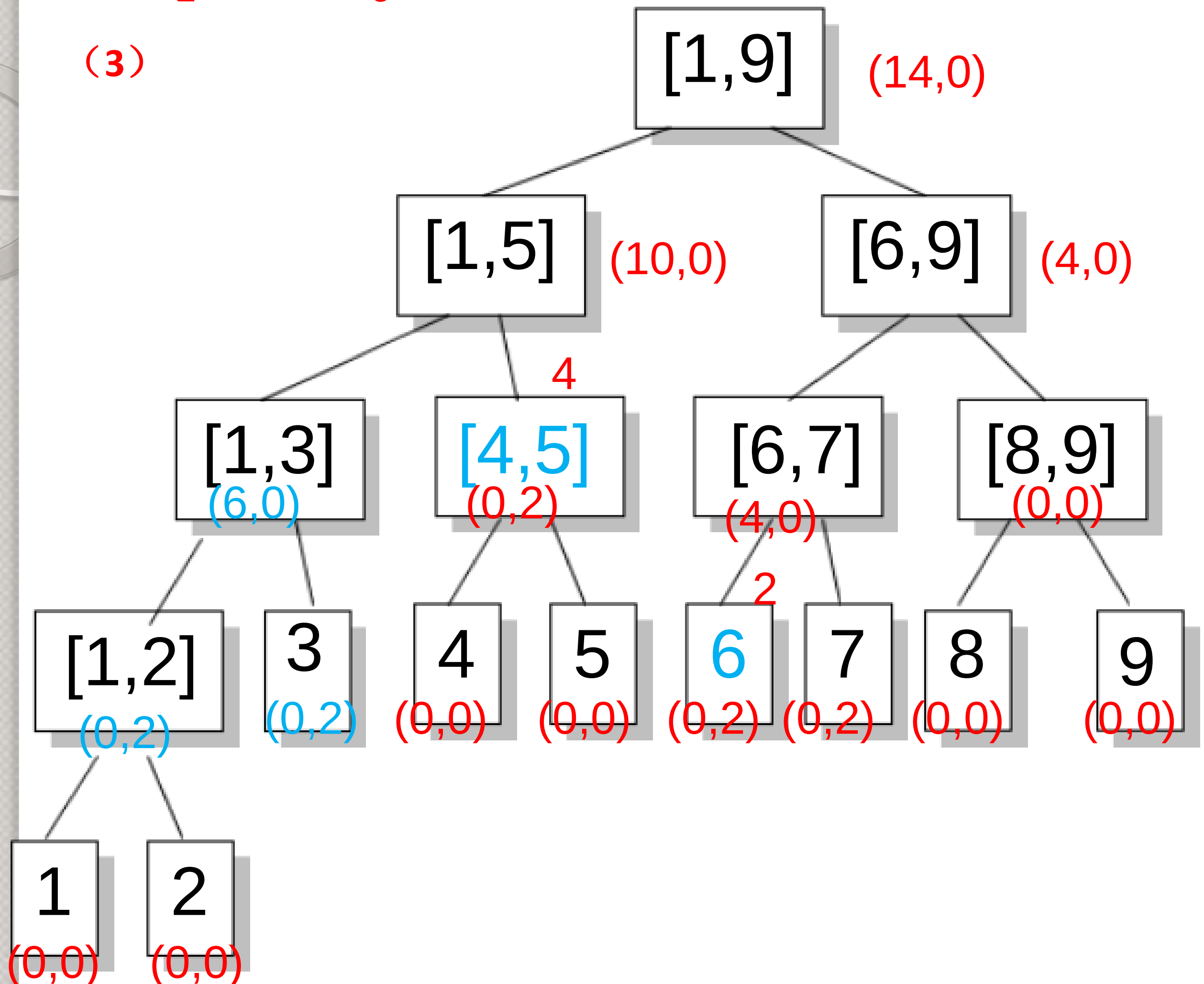
查 $A_2+\ldots+A_6$

（2）



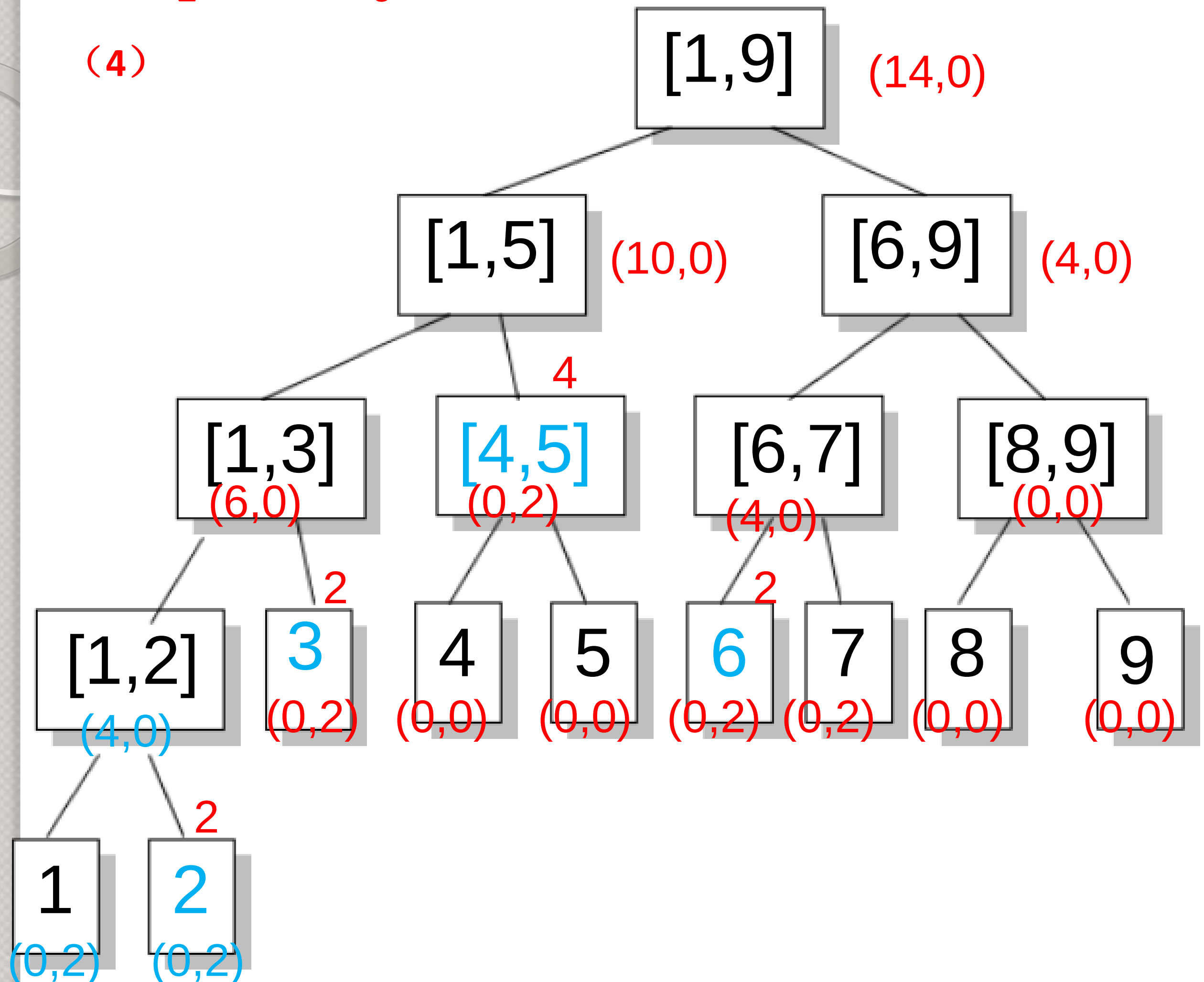
查 $A_2 + \ldots + A_6$

（3）



查 $A_2 + \ldots + A_6$

（4）



```
#include <iostream>
using namespace std;
struct CNode
{
        int L ,R;
        CNode * pLeft, * pRight;
        long long nSum; //原来的和
        long long Inc; //增量c的累加
};

CNode Tree[200010]; // 2倍叶子节点数目就够
int nCount = 0;
int Mid( CNode * pRoot)
{
        return (pRoot->L + pRoot->R)/2;
}
```

```
void BuildTree(CNode * pRoot,int L, int R)
{
        pRoot->L = L;
        pRoot->R = R;
        pRoot->nSum = 0;
        pRoot->Inc = 0;
        if( L == R)
                return;
        nCount ++;
        pRoot->pLeft = Tree + nCount;
        nCount ++;
        pRoot->pRight = Tree + nCount;
        BuildTree(pRoot->pLeft,L,(L+R)/2);
        BuildTree(pRoot->pRight,(L+R)/2+1,R);
}
```

```
void Insert( CNode * pRoot,int i, int v)
{
        if( pRoot->L == i && pRoot->R == i) {
                pRoot->nSum = v;
                return ;
        }
        pRoot->nSum += v;
        if( i <= Mid(pRoot))
                Insert(pRoot->pLeft,i,v);
        else
                Insert(pRoot->pRight,i,v);
}
```

```
void Add( CNode * pRoot, int a, int b, long long c)
{
        if( pRoot->L == a && pRoot->R == b) {
                pRoot->Inc += c;
                return ;
        }
        pRoot->nSum += c * ( b - a + 1) ;
        if( b <= (pRoot->L + pRoot->R)/2)
                Add(pRoot->pLeft,a,b,c);
        else if( a >= (pRoot->L + pRoot->R)/2 +1)
                Add(pRoot->pRight,a,b,c);
        else {

                Add(pRoot->pLeft,a,
                        (pRoot->L + pRoot->R)/2 ,c);
                Add(pRoot->pRight,
                        (pRoot->L + pRoot->R)/2 + 1,b,c);
        }
}
```

```
long long QuerynSum( CNode * pRoot, int a, int b)
{
        if( pRoot->L == a && pRoot->R == b)
                return pRoot->nSum +
                (pRoot->R - pRoot->L + 1) * pRoot->Inc ;

        pRoot->nSum += (pRoot->R - pRoot->L + 1) * pRoot->Inc ;
        Add( pRoot->pLeft,pRoot->L,Mid(pRoot),pRoot->Inc);
        Add( pRoot->pRight,Mid(pRoot) + 1,pRoot->R,pRoot->Inc);
        pRoot->Inc = 0;

        if( b <= Mid(pRoot))
                return QuerynSum(pRoot->pLeft,a,b);
        else if( a >= Mid(pRoot) + 1)
                return QuerynSum(pRoot->pRight,a,b);
        else {
                return QuerynSum(pRoot->pLeft,a,Mid(pRoot)) +
                  QuerynSum(pRoot->pRight,Mid(pRoot) + 1,b);
        }
}
```

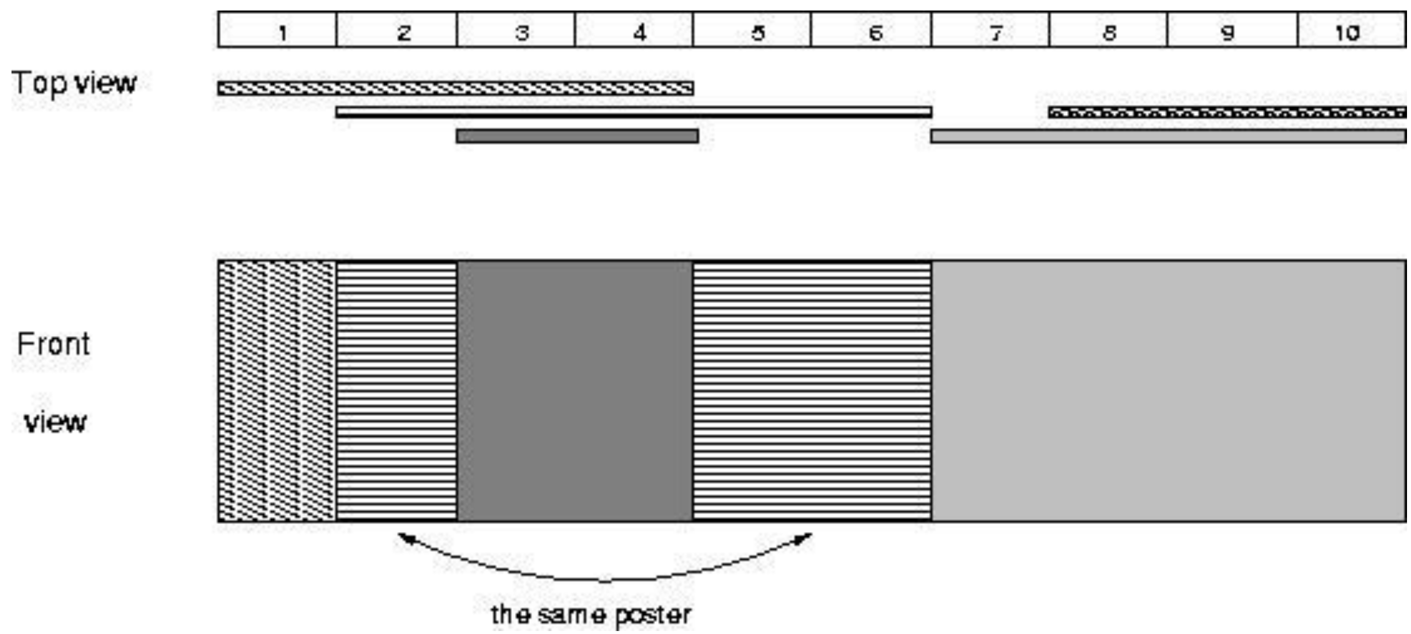
```
int main()
{
	int n,q,a,b,c;
	char cmd[10];
	scanf("%d%d",&n,&q);
	int i,j,k;
	nCount = 0;
	BuildTree(Tree,1,n);
	for( i = 1;i <= n;i ++ ) {
		scanf("%d",&a);
		Insert(Tree,i,a);
	}
	for( i = 0;i < q;i ++ ) {
		scanf("%s",cmd);
		if ( cmd[0] == 'C' ) {
			scanf("%d%d%d",&a,&b,&c);
			Add( Tree,a,b,c);
		}
		else {
			scanf("%d%d",&a,&b);
			printf("%I64d\n",QuerynSum(Tree,a,b));
		}
	}
	return 0;
}
```

离散化

有时，区间的端点不是整数，或者区间太大导致建树内存开销过大MLE ,那么就需要进行“离散化”后再建树。

POJ 2528 Mayor's posters

给定一些海报，可能互相重叠，告诉你每个海报宽度（高度都一样）和先后叠放次序，问没有被完全盖住的海报有多少张。



海报最多10,000张，但是墙有10,000,000块瓷砖长。海报端点不会落在瓷砖中间。

思路：依次贴上一张张海报，每贴一张海报，就询问这张海报有没有被全部遮住（假设贴海报的过程和现实可以不同，也可以先贴上面的，再贴下面的）

贴的顺序如何选择？

思路：依次贴上一张张海报，每贴一张海报，就询问这张海报有没有被全部遮住（假设贴海报的过程和现实可以不同，也可以先贴上面的，再贴下面的）

贴的顺序如何选择？

关键： 插入数据的顺序 ------ 从上往下依次插入每张海报，这样后插入的海报不可能覆盖先插入的海报，因此插入一张海报时，如果发现海报对应的瓷砖有一块露出来，就说明该海报部分可见。

给瓷砖编号，一个海报就相当于一个整数区间。贴海报就是区间操作，查询海报是否可见也是区间操作。

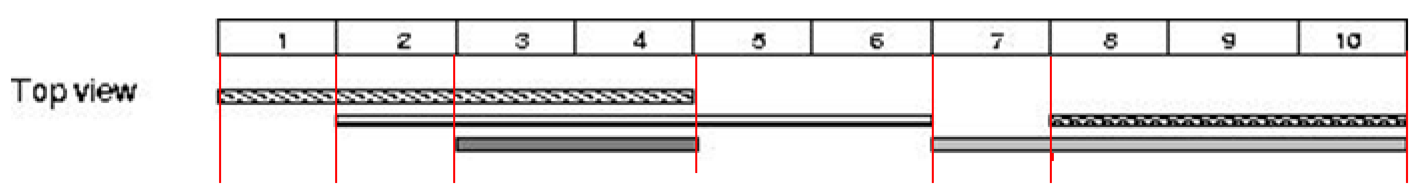
因此可以用线段树来解决

POJ 2528 Mayor's posters

如果每个叶子节点都代表一块瓷砖，那么线段树会导致MLE，即单位区间的数目太多。而且建树复杂度O(m),查询复杂度为 nlogm (n是海报数目m是瓷砖数目)

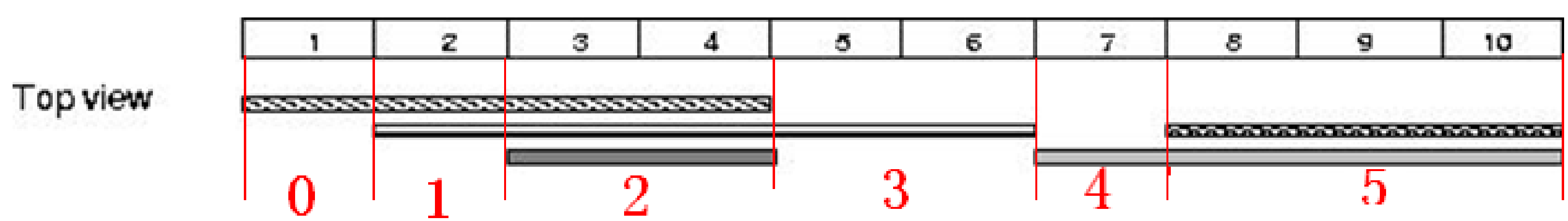
实际上，由于最多10,000个海报，共计20,000个端点，这些端点把墙最多分成19,999个单位区间（题意为整个墙都会被盖到）。每个单位区间的瓷砖数目可以不同。

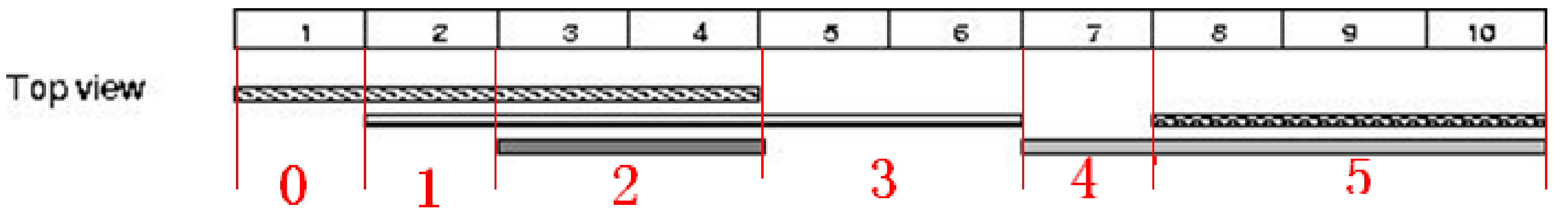
我们只要对这19,999个区间编号，然后建树即可。这就是离散化。



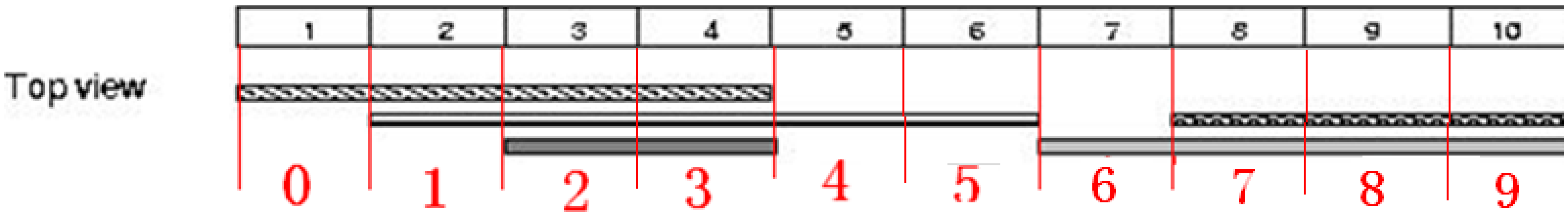
POJ 2528 Mayor's posters

.这些单位区间在线段树上是叶子节点
. 每个单位区间要么全被覆盖，要么全部露出
. 没有海报的端点会落在一个单位区间内部
. 每张海报一定完整覆盖若干个连续的单位区间
. 要算出一共有多少个单位区间，并且算出每张海报覆盖的单位区间[a,b] (海报覆盖了从a号单位区间到b号单位区间）





按上图的离散化方法，求每张海报覆盖了哪些单位区间，写起来稍麻烦



更好的离散化方法，是将所有海报的端点瓷砖排序，把每个海报的端点瓷砖都看做一个单位区间，两个相邻的端点瓷砖之间的部分是一个单位区间

这样最多会有 20000 + 19999个单位区间

POJ 2528 Mayor's posters

如果海报端点坐标是浮点数，其实也一样处理。

树节点要保存哪些信息，而且这些信息该如何动态更新呢？

POJ 2528 Mayor's posters

```
struct CNode
{
        int L,R;
        bool bCovered;
         CNode * pLeft, * pRight;
};
```

bCovered表示本区间是否已经完全被海报盖住

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <math.h>
using namespace std;
int n;
struct CPost
{
        int L,R;
};
CPost posters[10100];
int x[20200]; //存放所有海报的端点瓷砖编号
int hash[10000010]; //hash[i]表示瓷砖i所处的离散化后的区间编号
struct CNode
{
        int L,R;
        bool bCovered; //区间[L,R]是否已经被完全覆盖
        CNode * pLeft, * pRight;
};
CNode Tree[1000000];
int nNodeCount = 0;
```

```
int Mid( CNode * pRoot)
{
        return (pRoot->L + pRoot->R)/2;
}
void BuildTree( CNode * pRoot, int L, int R)
{
        pRoot->L = L;
        pRoot->R = R;
        pRoot->bCovered = false;
        if( L == R )
                return;
        nNodeCount ++;
        pRoot->pLeft = Tree + nNodeCount;
        nNodeCount ++;
        pRoot->pRight = Tree + nNodeCount;
        BuildTree( pRoot->pLeft,L,(L+R)/2);
        BuildTree( pRoot->pRight,(L+R)/2 + 1,R);
}
```

```
bool Post( CNode  *pRoot, int L, int R)
{ //插入一张正好覆盖区间[L,R]的海报,返回true则说明区间[L,R]是部分或全部可见的
        if( pRoot->bCovered )      return false;
        if( pRoot->L == L && pRoot->R == R) {
                pRoot->bCovered = true;
                return true;
        }
        bool bResult ;
        if( R <= Mid(pRoot) )
                bResult = Post( pRoot->pLeft,L,R);
        else if( L >= Mid(pRoot) + 1)
                bResult = Post( pRoot->pRight,L,R);
        else {
                bool b1 = Post(pRoot->pLeft ,L,Mid(pRoot));
                bool b2 = Post( pRoot->pRight,Mid(pRoot) + 1,R);
                bResult = b1 || b2;
        }
        //要更新根节点的覆盖情况
        if( pRoot->pLeft->bCovered && pRoot->pRight->bCovered )
                pRoot->bCovered = true;
        return bResult;
}
```

```
int main()
{
        int t;
        int i,j,k;
        scanf("%d",&t);
        int nCaseNo = 0;
        while(t--) {
                nCaseNo ++;
                scanf("%d",&n);
                int nCount = 0;
                for( i = 0;i < n;i ++ )  {
                        scanf("%d%d", & posters[i].L,
                                & posters[i].R );

                        x[nCount++] = posters[i].L;
                        x[nCount++] = posters[i].R;
                }
                sort(x,x+nCount);
                nCount = unique(x,x+nCount) - x; //去掉重复元素
```

```
            //下面离散化
            int nIntervalNo = 0;
            for( i = 0;i < nCount;i ++ ) {
                hash[x[i]] = nIntervalNo;
                if( i < nCount - 1) {
                    if( x[i+1] - x[i] == 1)
                        nIntervalNo ++;
                    else
                        nIntervalNo += 2;
                }
            }

            BuildTree( Tree,0,nIntervalNo );
            int nSum = 0;
            for( i = n - 1;i >= 0;i -- ) { // 从后往前看每个海报是否可
见
                if( Post(Tree,hash[posters[i].L],
                        hash[posters[i].R]))
                    nSum ++;
            }
            printf("%d\n",nSum);
        }
        return 0;
}
```

POJ 1151 Atlantis

给定n个矩形 (n<= 100)，其顶点坐标是浮点数，可能互相重叠，问这些矩形覆盖到的面积是多大。

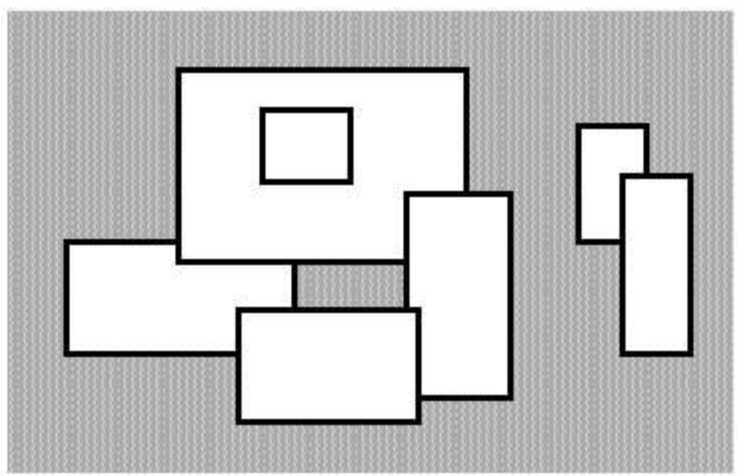
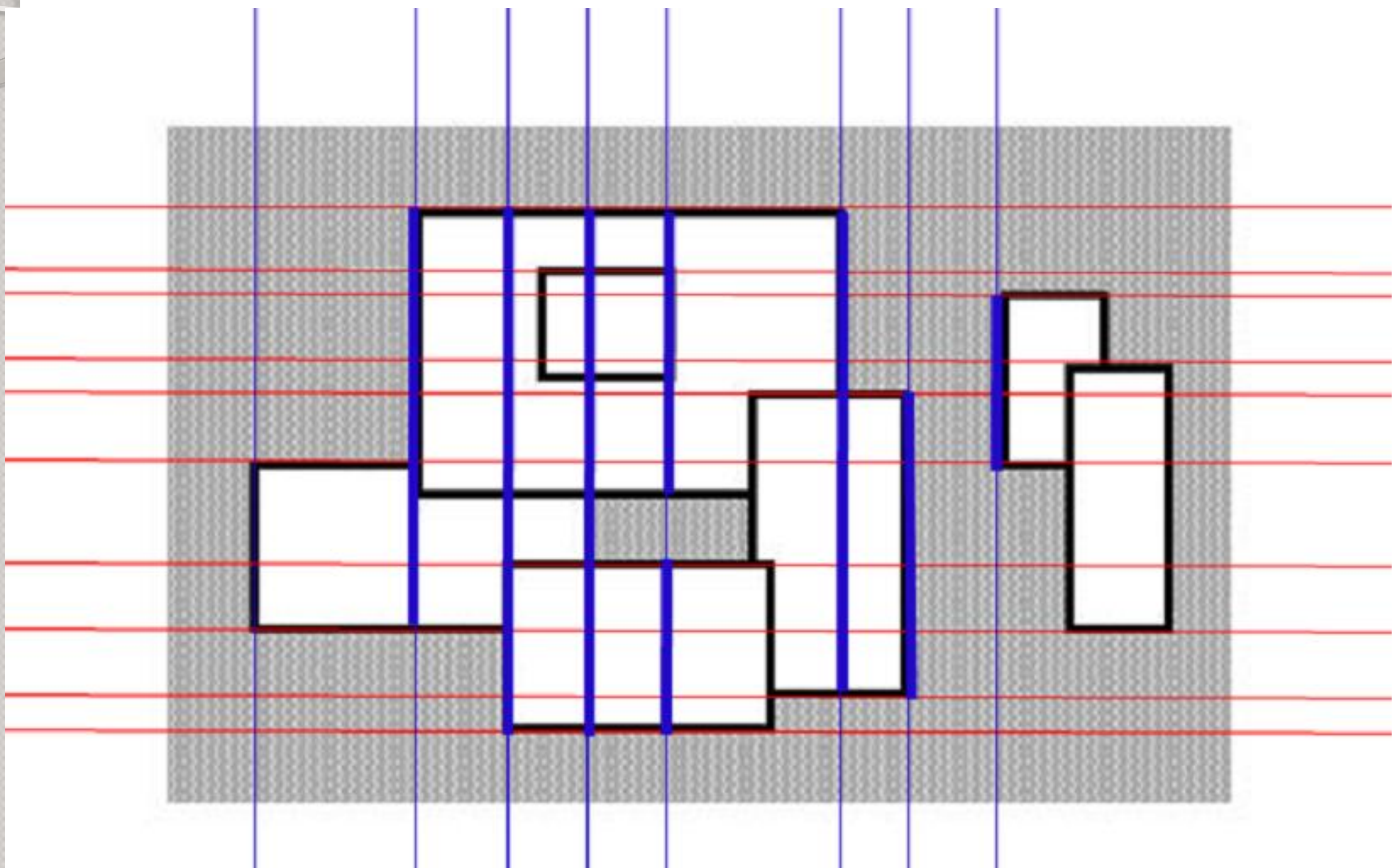
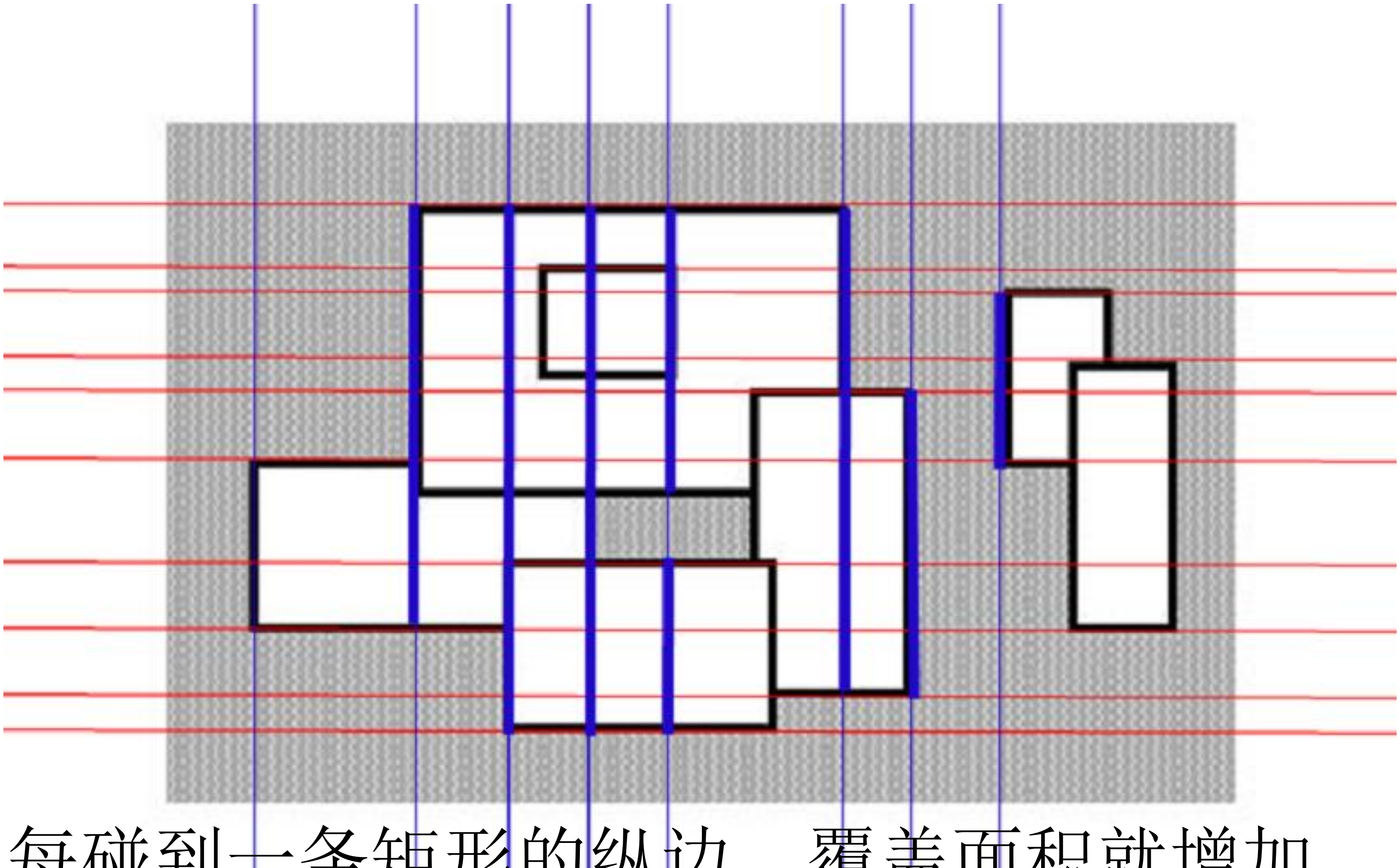


Figure 1. A set of 7 rectangles

用一条直线从左到右扫描，碰到一条矩形竖边的时候，就计算该直线有多长被矩形覆盖，以及被覆盖部分是覆盖了几重。碰到矩形左边，要增加被覆盖的长度，碰到右边，要减少被覆盖的长度



随着扫描线的右移动，覆盖面积不断增加。



每碰到一条矩形的纵边，覆盖面积就增加Len * 该纵边到下一条纵边的距离。Len是此时扫描线被矩形覆盖的长度

POJ 1151 Atlantis

在Y轴进行离散化。n个矩形的2n个横边纵坐标共构成最多2n-1个区间的边界，对这些区间编号，建立起线段树。

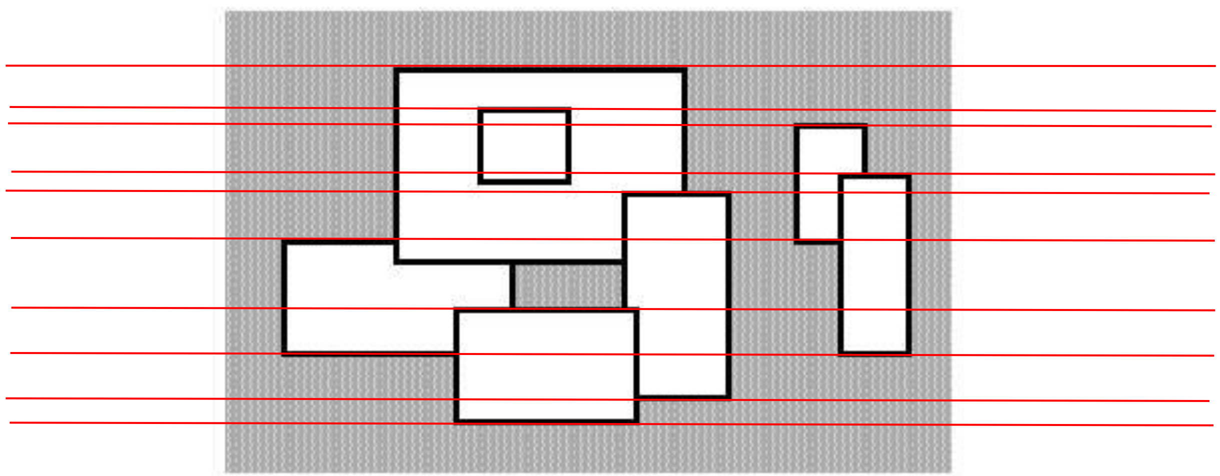


Figure 1. A set of 7 rectangles

POJ 1151 Atlantis

线段树的节点要保存哪些信息？如何将一个个矩形插入线段树？插入过程中这些信息如何更新？怎样查询？

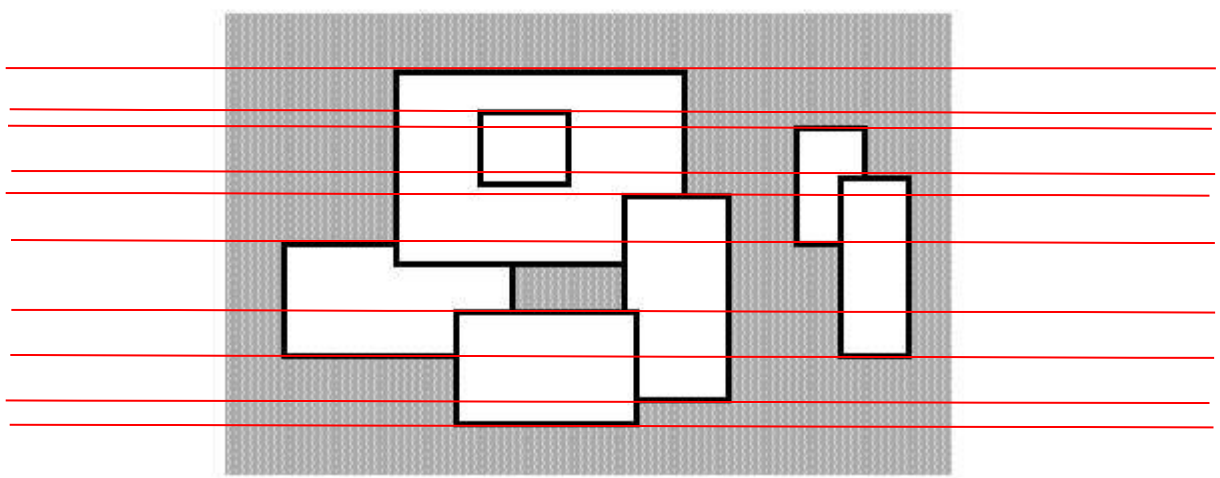


Figure 1. A set of 7 rectangles

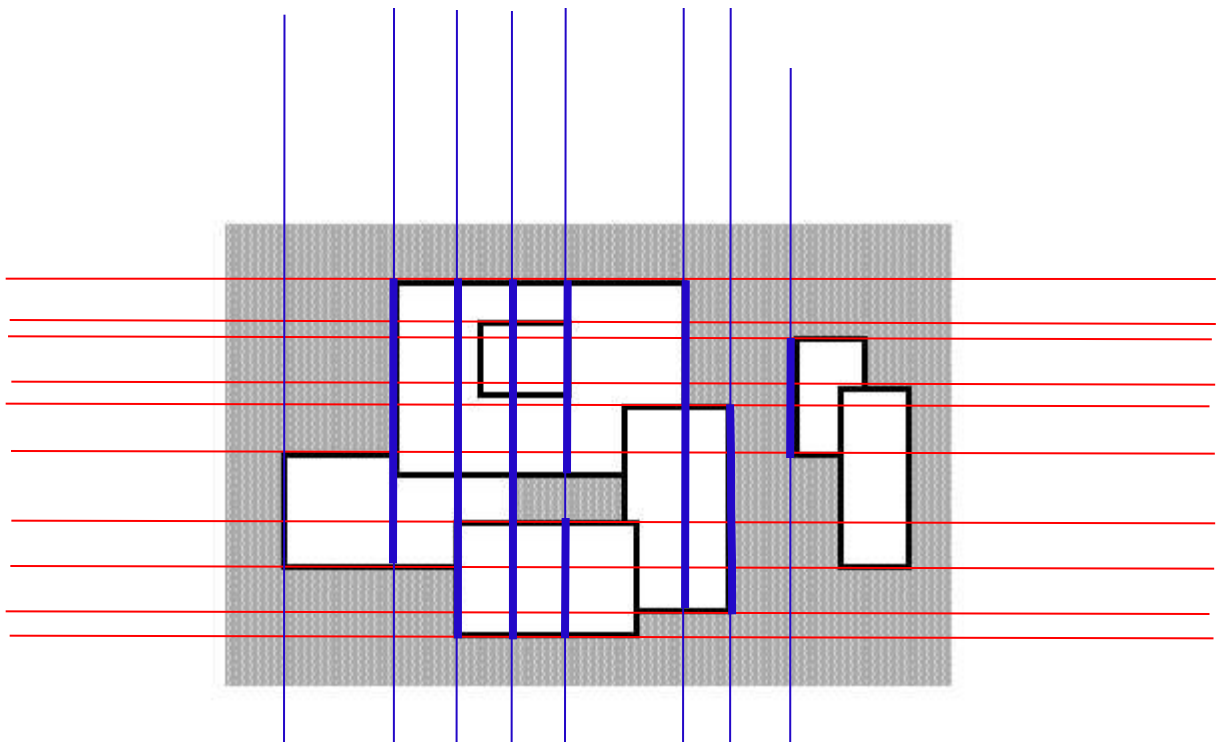


Figure 1. A set of 7 rectangles

POJ 1151 Atlantis

```
struct CNode
{
        int L,R;
        CNode * pLeft, * pRight;
        double Len; //当前,本区间上有多长的部分是落在那些矩形中的
        int Covers;//本区间当前被多少个矩形完全包含
};
```

一开始，所有区间 Len = 0 Covers = 0

POJ 1151 Atlantis

插入数据的顺序：

将矩形的纵边从左到右排序，然后依次将这些纵边插入线段树。要记住哪些纵边是一个矩形的左边(开始边)，哪些纵边是一个矩形的右边（结束边），以便插入时，对Len和Covers做不同的修改。

插入一条边后,就根据根节点的Len 值增加总覆盖面积的值。
增量是Len * 本边到下一条边的距离

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <math.h>
#include <set>
using namespace std;
double y[210];
struct CNode
{
	int L,R;
	CNode * pLeft, * pRight;
	double Len; //当前,本区间上有多长的部分是落在那些矩形中的
	int Covers;//本区间当前被多少个矩形完全包含

};
CNode Tree[1000];
```

```
struct CLine
{
        double x,y1,y2;
        bool bLeft; //是否是矩形的左边
} lines[210];

int nNodeCount = 0;

bool operator< ( const CLine & l1,const CLine & l2)
{
        return l1.x < l2.x;
}
```

```
template <class F,class T>
F bin_search(F s, F e, T val)
{   //在区间[s,e)中查找 val,找不到就返回 e
                    F L = s;
                    F R = e-1;
      while(L <= R )   {
          F mid = L + (R-L)/2;
          if( !( * mid < val  || val < * mid ))
                                        return mid;
          else if(val < * mid)
                                        R = mid - 1;
          else
                                        L = mid + 1;
      }
      return e;
}
int Mid(CNode * pRoot)
{
         return (pRoot->L + pRoot->R ) >>1;
}
```

```
void Insert(CNode * pRoot,int L, int R)
//在区间pRoot 插入矩形左边的一部分或全部，该左边的一部分或全部覆盖了区间[L,R]
{
        if( pRoot->L == L &&  pRoot->R == R){
                pRoot->Len = y[R+1] - y[L];
                pRoot->Covers ++;
                return;
        }
        if( R <= Mid(pRoot))
                Insert(pRoot->pLeft,L,R);
        else if( L >= Mid(pRoot)+1)
                Insert(pRoot->pRight,L,R);
        else {
                Insert(pRoot->pLeft,L,Mid(pRoot));
                Insert(pRoot->pRight,Mid(pRoot)+1,R);
        }
        if( pRoot->Covers == 0) //如果不为0，则说明本区间当前仍然被某个矩形完全包含，则不能更新 Len
                pRoot->Len = pRoot->pLeft ->Len +
                                pRoot->pRight ->Len;
}
```

```
void Delete(CNode * pRoot,int L, int R) {
/在区间pRoot 删除矩形右边的一部分或全部，该矩形右边的一部分或全部覆盖了区间[L,R]
	if( pRoot->L == L && pRoot->R == R) {
		pRoot->Covers --;
		if( pRoot->Covers == 0 )
			if( pRoot->L == pRoot->R )
				pRoot->Len = 0;
			else
				pRoot->Len = pRoot->pLeft ->Len +
					pRoot->pRight ->Len;
		return ;
	}
	if( R <= Mid(pRoot))
		Delete(pRoot->pLeft,L,R);
	else if( L >= Mid(pRoot)+1)
		Delete(pRoot->pRight,L,R);
	else {
		Delete(pRoot->pLeft,L,Mid(pRoot));
		Delete(pRoot->pRight,Mid(pRoot)+1,R);
	}
	if( pRoot->Covers == 0) //如果不为0，则说明本区间当前仍然被某个矩形完全包含，则不能更新 Len
		pRoot->Len = pRoot->pLeft ->Len + pRoot->pRight ->Len;
}
```

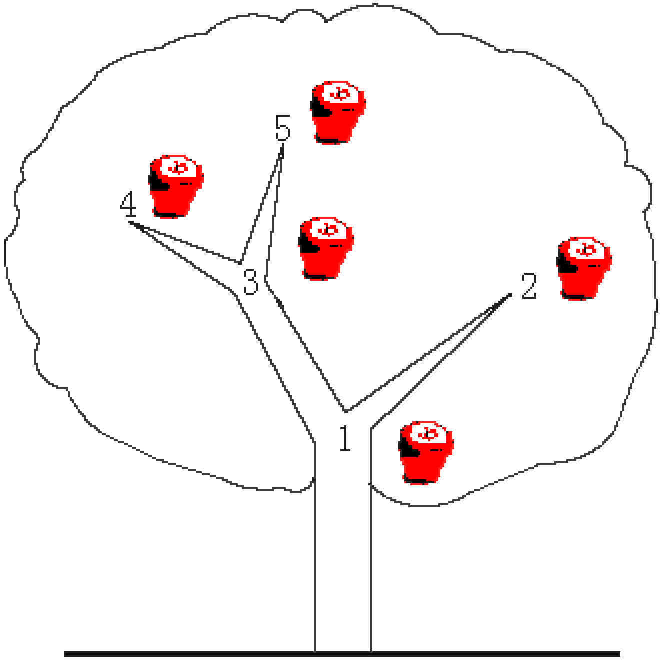
```
void BuildTree( CNode * pRoot, int L,int R)
{
        pRoot->L = L;
        pRoot->R = R;
        pRoot->Covers = 0;
        pRoot->Len = 0;
        if( L == R)
                return;
        nNodeCount ++;
        pRoot->pLeft = Tree + nNodeCount;
        nNodeCount ++;
        pRoot->pRight = Tree + nNodeCount;
        BuildTree( pRoot->pLeft,L,(L+R)/2);
        BuildTree( pRoot->pRight,(L+R)/2+1,R);
}
```

```
int main()
{
        int n;    int i,j,k;   double x1,y1,x2,y2;  int yc,lc;
        int nCount = 0;
        int t = 0;
        while(true) {
                scanf("%d",&n);
                if( n == 0)  break;
                t ++;      yc = lc = 0;
                for( i = 0;i < n;i ++ ) {
                        scanf("%lf%lf%lf%lf", &x1, &y1,&x2,&y2);
                        y[yc++] = y1;      y[yc++] = y2;
                        lines[lc].x = x1;  lines[lc].y1 = y1;
                        lines[lc].y2 = y2;
                        lines[lc].bLeft = true;
                        lc ++;
                        lines[lc].x = x2;  lines[lc].y1 = y1;
                        lines[lc].y2 = y2;
                        lines[lc].bLeft = false;
                        lc ++;
                }
```

```
        sort(y,y + yc);
        yc = unique(y,y+yc) - y;
        nNodeCount = 0;
        //yc 是横线的条数，yc- 1是纵向区间的个数，这些区间从0
        //开始编号，那么最后一个区间
        //编号就是yc - 1 -1
        BuildTree(Tree, 0, yc - 1 - 1);
        sort(lines,lines + lc);
        double Area = 0;
        for( i = 0;i < lc - 1 ; i ++ ) {
                int L = bin_search( y,y+yc,lines[i].y1) - y;
                int R = bin_search( y,y+yc,lines[i].y2) - y;
                if( lines[i].bLeft )
                        Insert(Tree,L,R-1);
                else
                        Delete(Tree,L,R-1);
                Area += Tree[0].Len * (lines[i+1].x - lines[i].x);
        }
        printf("Test case #%d\n",t);
        printf("Total explored area: %.2lf\n",Area);
        printf("\n",Area);
    }
    return 0;
}
```

有时，不一定能够一眼看出什么是“区间”，这就要靠仔细观察，造出“区间”来。例如：

POJ 3321 Apple Tree



每个分叉点及末梢可能有苹果（最多1个），每次可以摘掉一个苹果，或有一个苹果新长出来，随时查询某个分叉点往上的子树里，一共有多少个苹果(分叉点数量： 100,000)。

POJ 3321 Apple Tree

深度优先遍历整个苹果树，为每个节点标记一个开始时间和结束时间（所有时间都不相同），显然子树里面所有节点的开始和结束时间，都位于子树树根的开始和结束时间之间。

问题变成：

有n个节点，就有2n个开始结束时间，它们构成序列

$$A_1A_2....A_{2n}$$

序列里每个数是0或者1，可变化，随时查询某个区间里数的和。当然由于苹果树上每个放苹果的位置对应于数列里的两个数，所以结果要除以2

树状数组

- 对于序列a，我们设一个数组C
  - $C[i] = a[i - 2^k + 1] + \ldots + a[i]$
  - k为i在二进制下末尾0的个数
  - 2^k就是i 保留最右边的1，其余位全变0
  - i从1开始算！
- C即为a的树状数组
- 对于i,如何求2^k？

- $2^k=i \&(i \wedge (i-1))$ 也就是 $i\&(-i)$

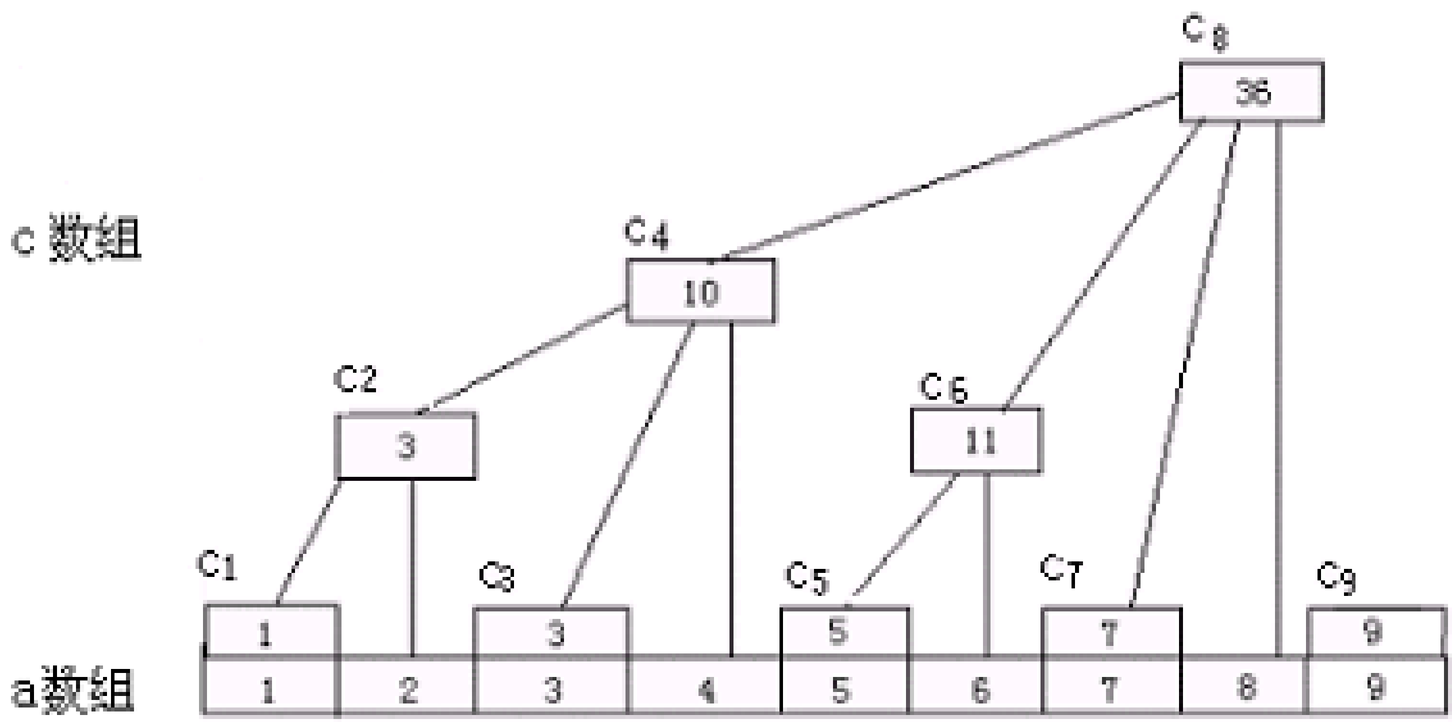
- 以6为例
- $(6)_{10}=(0110)_2$
- xor $6-1=(5)_{10}=(0101)_2$
- $(0011)_2$
- and $(6)_{10}= (0110)_2$
- $(0010)_2 = (4)_{10}$
- 通常我们用lowbit(x)表示x对应的2^k，
- lowbit(x) = x&(-x)
- lowbit(x) 实际上就是x的二进制表示形式留下最右边的1，其他位都变成0

C[i] = a[i-lowbit(i)+1] + …+ a[i]

C包含哪些项看上去没有规律

- C1=A1
- C2=A1+A2
- C3=A3
- C4=A1+A2+A3+A4
- C5=A5
- C6=A5+A6
- C7=A7
- C8=A1+A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8
- …………
- C16=A1+A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8+A9+A10+A11+A12+A13+A14+A15+A16

树状数组图示



树状数组的好处在于能快速求任意区间的和 a[i] + a[i+1] + … + a[j]

设sum(k) = a[1]+a[2]+…+a[k]

则 a[i] + a[i+1] + … + a[j] = sum(j)-sum(i-1)

有了树状数组，sum(k)就能在O(logN)时间内求出，N是a数组元素个数。而且更新一个**a**的元素所花的时间也是**O(logN)**的**(**因为**a**更新了**C**也得更新**)**。

为什么呢？

根据C的构成规律，可以发现sum(k)可以表示为：

$sum(k) = C[n_1]+C[n_2] + \ldots + C[n_m]$

其中 $n_m = k$

$n_{i-1} = n_i - lowbit(n_i)$ 而且 $n_1 - lowbit(n_1)$ 必须等于0，n_1大于0

如：sum(6) = C[4]+C[6]

lowbit(x) 实际上就是x的二进制表示形式留下最右边的1，其他位都变成0

那么，sum(k)最多有几项呢？这个决定了求区间和的时间复杂度

那么，sum(k)最多有几项呢？

$sum(k) = C[n_1]+C[n_2] + \dots + C[n_m]$

其中 $n_m = k$

$n_{i-1} = n_i - lowbit(n_i)$

lowbit(x) 实际上就是x的二进制表示形式留下最右边的1，其他位都变成0

$n_i - lowbit(n_i)$ 就是 n_i 的二进制去掉最右边的1

k 的二进制里最多有 $\log_2 k$（向上取整）个1

sum(k)最多 $\log_2 k$（向上取整）项，所以本次求和的复杂度就是 $\log_2 k$

那么，为什么

$sum(k) = C[n_1]+C[n_2] + \ldots + C[n_m]$

其中 $n_m = k$

$n_{i-1} = n_i - lowbit(n_i)$

证：

$C[i] = a[i-lowbit(i)+1] + \ldots + a[i]$

$i - lowbit(i)+1$ 是什么？就是i把最右边的1去掉，然后再加1

那么，为什么 $sum(k) = a[1]+a[2]+\ldots+a[k]$

$= C[n_1]+C[n_2] + \ldots + C[n_m]$ (其中 $n_m = k$)

证明：

$C[n_m] = a[n_m-lowbit(n_m)+1] + \ldots + a[n_m]$

$C[n_{m-1}] = a[n_{m-1}-lowbit(n_{m-1})+1] + \ldots + a[n_{m-1}]$

$= a[n_{m-1}-lowbit(n_{m-1})+1] + \ldots + a[n_m-lowbit(n_m)]$

$C[n_{m-2}] = a[n_{m-2}-lowbit(n_{m-2})+1] + \ldots + a[n_{m-2}]$

$= a[n_{m-1}-lowbit(n_{m-1})+1] + \ldots + a[n_{m-1}-lowbit(n_{m-1})]$

……..

$C[n_1] = a[n_1-lowbit(n_1)+1] + \ldots + a[n_1]$

$= a[1] + \ldots + a[n_1]$

(因 $n_1-lowbit(n_1)$ 必须等于0，否则就还需要 $C[n_1-lowbit(n_1)]$ 了)

更新一个a元素，C也要跟着更新，复杂度是多少呢？即C里有几项要更新呢？

- C1=A1
- C2=A1+A2
- C3=A3
- C4=A1+A2+A3+A4
- C5=A5
- C6=A5+A6
- C7=A7
- C8=A1+A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8
- ………….
- C16=A1+A2+A3+A4+A5+A6+A7+A8+A9+A10+A11+A12+A13+A14+A15+A16

更新一个a元素，C也要跟着更新，复杂度是多少呢？即C里有几项要更新呢？

如果a[i]更新了，那么以下的几项都需要更新：

$C[n_1], C[n_2], \ldots C[n_m]$

其中，$n_1 = i$，$n_{i+1} = n_i + \mathrm{lowbit}(n_i)$

$n_m + \mathrm{lowbit}(n_m)$ 必须大于 a 的元素个数 N, n_m 小于等于N

同理，总的来说更新一个元素的时间，也是logN的

为什么如果a[i]更新了，那么**有且仅有**以下的几项需要更新：

$C[n_1], C[n_2], \ldots C[n_m]$

其中，$n_1 = i$，$n_{i+1} = n_i + lowbit(n_i)$

a[i]更新-> C[i]必须更新， 因为 C[i] = a[x] + …+ a[i]

而且， C[k+lowbit(k)] 的起始项不晚于C[k]的起始项
所以,若C[k]包含 a[i],则 C[k+lowbit(k)]也包含a[i],即

C[k] 需要更新-> C[k+lowbit(k)]也需要更新

下面证明：

C[k+lowbit(k)] 的起始项不晚于C[k]的起始项

C[k] = a[k-lowbit(k)+1] + ……

C[k+lowbit(k)] = a[k+lowbit(k) – lowbit(k+lowbit(k))+1] + ….

k – lowbit(k) >= k+lowbit(k) – lowbit(k+lowbit(k))

易证,因为 lowbit(k+lowbit(k)) >= 2 * lowbit(k)

因此

C[k+lowbit(k)] 的起始项不晚于C[k]的起始项

下面要证明，若a[i]更新,则对任何k, (i<k <i+lowbit(i)),
C[k]都不需要更新（ 即C[k]不包含a[i])

C[k] = a[k-lowbit(k)+1] + … + a[k]

只要证明 k-lowbit(k)+1比i大即可

因 i<k <i+lowbit(i) ,假设i的最右边的1是从右到左从0开始数的第n位，那么i+lowbit(i)就是将i的低n位全变成1后，再加1。那么k一定是从第n位到最高位都和i相同，但是低n位比i大(即k低n位中有1，因i低n位全是0)

k-lowbit(k) +1就是k去掉最右边的1，然后再加1，那当然还是比i大

初始状态下由a构建树状数组C的时间复杂度是多少？

显然是 O(N)的

因为

$C[k] = sum(k) – sum(k\text{-}lowbit(k))$

证：

$sum(k) = C[n_1]+C[n_2] + \ldots + C[n_{m-1}] + C[n_m]$ ($n_m = k$)

$n_{m-1} = k\text{-}lowbit(k)$

$sum(k\text{-}lowbit(k)) = C[n_1]+C[n_2] + \ldots + C[n_{m-1}]$

所以，树状数组适合单个元素经常修改而且还反复要求部分的区间的和的情况。

上述问题虽然也可以用线段树解决，但是用树状数组来做，编程效率和程序运行效率都更高（时间复杂度相同，但是树状数组常数小）

如果每次要修改的不是单个元素，而是一个区间，那就不能用树状数组了(效率过低）。

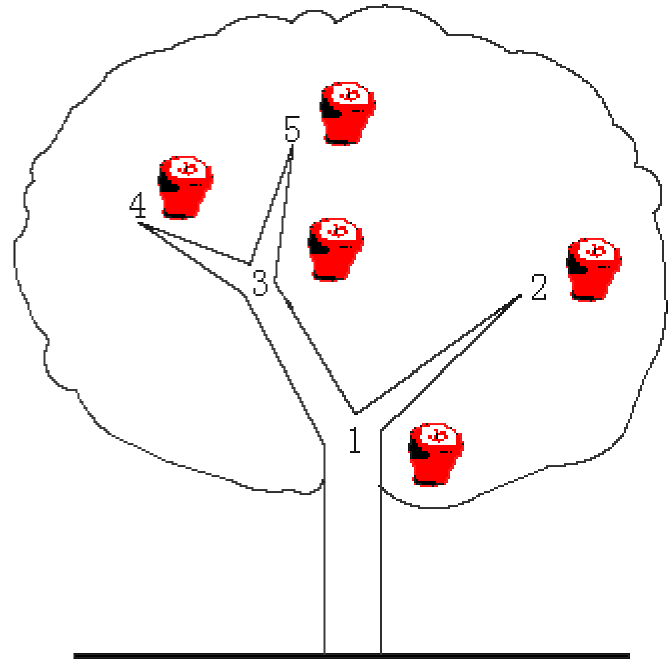
树状数组时间复杂度总结：

建数组： **O(n)**

更新： **O(logn)**

局部求和：**O(logn)**

POJ 3321 Apple Tree



每个分叉点及末梢可能有苹果（最多1个），每次可以摘掉一个苹果，或有一个苹果新长出来，随时查询某个分叉点往上的子树里，一共有多少个苹果。(分叉点数： 100,000)

此题可用树状数组来做

根据题意，一开始时，所有能长苹果的地方都有苹果

Sample Input

3
1 2
1 3
3
Q 1
C 2
Q 1

Sample Output

3
2

```
//树状数组做
/*
一棵树上长了苹果，每一个树枝节点上有长苹果和不长苹果两种状态，两种操作，一种操作能够改变树枝上苹果的状态，另一种操作询问某一树枝节点以下的所有的苹果有多少。具体做法是做一次dfs，记下每个节点的开始时间Start[i]和结束时间End[i]，
那么对于i节点的所有子孙的开始时间和结束时间都应位于Start[i]和End[i]之间

然后用树状数组C统计Start[i]到End[i]之间的附加苹果总数。这里用树状数组统计区间可以用Sum(End[i])-Sum(Start[i]-1)来计算。
*/
#include <iostream>
#include <vector>
using namespace std;
#define MY_MAX 220000
```

```
int C[MY_MAX];
typedef vector<int> VCT_INT;
vector<VCT_INT> G(MY_MAX/2); //邻接表
int Lowbit[MY_MAX];
bool HasApple[MY_MAX/2];
int Start[MY_MAX]; //dfs时的开始时间
int End[MY_MAX]; //dfs时的结束时间
int nCount = 0;
void Dfs(int v)
{
        Start[v] = ++ nCount;
        for( int i = 0;i < G[v].size();i ++ )
                Dfs(G[v][i]);
        End[v] = ++ nCount;
}
```

```
int QuerySum(int p)  //求 sum(p)
{
        int nSum = 0;
        while( p > 0 ) {
                nSum += C[p];
                p -= Lowbit[p];
        }
        return nSum;
}
void Modify( int p,int val)
{
        while( p <= nCount ) {
                C[p] += val;
                p += Lowbit[p];
        }
}
```

```
int main()
{
        int n;
        scanf("%d",&n);
        int x,y;
        int i,j,k;
        //建图
        for( i = 0;i < n -1 ;i ++ ) {
                int a,b;
                scanf("%d%d",&a,&b);
                G[a].push_back(b); //a有边连到b
        }
        nCount = 0;
        Dfs(1);
```

```
        //树状数组要处理的原始数组下标范围 1 --
nCount
        for( i = 1;i <= nCount;i ++) {
                Lowbit[i] = i & ( i ^( i - 1));
        }
        for( i = 1;i <= n;i ++ )
                HasApple[i] = 1;

        int m;
        //求C数组，即树状数组的节点的值
        for( i = 1;i <= nCount;i ++ )
                C[i] = i - (i - Lowbit[i]);
                // C[i] = Sum[i] - Sum[i-lowbit(i)]
```

```
        scanf("%d",&m);
        for( i = 0;i < m;i ++ ) {
                char cmd[10];
                int a;
                scanf("%s%d",cmd,&a);
                if( cmd[0] == 'C' ) {
                        if( HasApple[a] ) {
                           Modify( Start[a],-1);  Modify( End[a],-1);
                                HasApple[a] = 0;
                        }
                        else {
                                Modify( Start[a],1);  Modify( End[a],1);
                                HasApple[a] = 1;
                        }
                }
                else {
                        int t1 = QuerySum(End[a]);
                        int t2 = QuerySum(Start[a]-1);
                        printf("%d\n",(t1-t2)/2 );
                }
        }
}
```

POJ题目推荐：

2182, 2352, 1177, 3667,3067