ACM中的数学问题

北京大学信息学院

林舒/郭炜/李腓晨/钟原/王易檀

Polya定理

- 组合数学理论中最重要的定理之一
- 在组合计数问题中有重要作用
- 涉及的概念和定理比较多,证明较复杂,本讲只是粗略地介绍

一个经典的例子

- 用两种颜色去染排成一个圈的6个棋子，如果能够通过旋转得到只算作一种,问有多少种染色状态
- 下面将通过这个例子来形象地介绍Polya定理的内容和解决这类问题的方法

置换

- 置换:用矩阵形式表示的顶点的变换
- 例子中,将棋子从某个点顺时针标上1到6,则将所有棋子顺时针旋转一个位置的置换可表示为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

置换群

- 以置换为元素的群
- 置换群$G=\{a_1,a_2,\ldots,a_{|G|}\}$
- 例子中G内共有6个置换

$$\begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\612345\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\561234\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}123456\\456123\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\345612\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\234561\end{pmatrix}$$

循环

- 在一个置换下,x_1->x_2,x_2->x_3,…,x_n->x_1,这样x_1,x_2,…,x_n就构成了一个循环
- 定义c_k为在置换a_k下的循环总数
- 例子中:
  $c_1=6$,$c_2=1$,$c_3=2$,$c_4=3$,$c_5=2$,$c_6=1$

置换群

- 以置换为元素的群
- 置换群$G=\{a_1,a_2,\dots,a_{|G|}\}$
- 例子中G内共有6个置换

$$\begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\612345\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\561234\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}123456\\456123\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\345612\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\234561\end{pmatrix}$$

$c_1=6,c_2=1,c_3=2,c_4=3,c_5=2,c_6=1$

c1 (1)(2)(3)(4)(5)(6)　　c2 (1 6 5 4 3 2 1)

c3 (1 5 3 1)(2 6 4)　　c4 (1 4)(2 5)(3 6)

c5 (1 3 5)(2 4 6)　　c6 (1 2 3 4 5 6)

Polya定理

- 设$G=\{a_1,a_2,\ldots,a_{|G|}\}$是$N=\{1,2,\ldots,N\}$上的置换群,现用m种颜色对这N个点染色,则不同的染色方案数为
  $S=(m^{c1}+m^{c2}+\ldots+m^{c|G|})/|G|$
- 证明比较复杂,略

利用Polya定理解决组合计数问题的步骤

- 写出置换群

$$\begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\612345\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\561234\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}123456\\456123\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\345612\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}123456\\234561\end{pmatrix}$$

- 求出每个置换的循环数

$c_1=6, c_2=1, c_3=2, c_4=3, c_5=2, c_6=1$

- 计算染色方案

$S=(2^6+2^1+2^2+2^3+2^2+2^1)/6=14$

常见置换的循环数

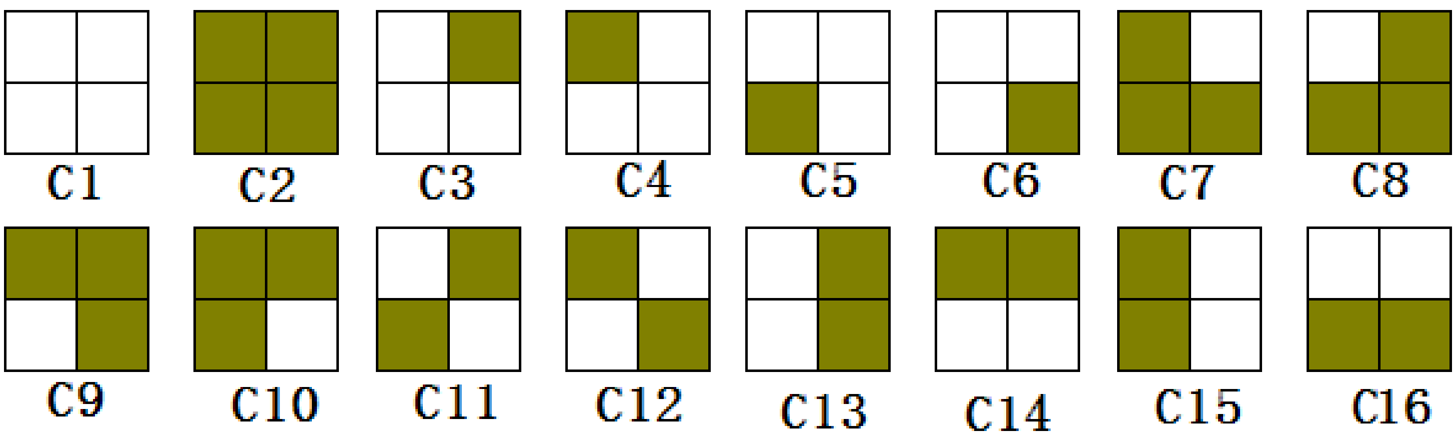
- 计算置换的循环数,是这一算法的瓶颈.如果能够快速计算出各置换的循环数,就可以大大提高程序的运行效率
- 旋转:n个点顺时针(或逆时针)旋转i个位置的置换,循环数为gcd(n,i)
- 翻转:
  - n为偶数时,
    - 对称轴不过顶点:循环数为n/2
    - 对称轴过顶点:循环数为n/2+1
  - n为奇数时,循环数为(n+1)/2

Polya定理小结

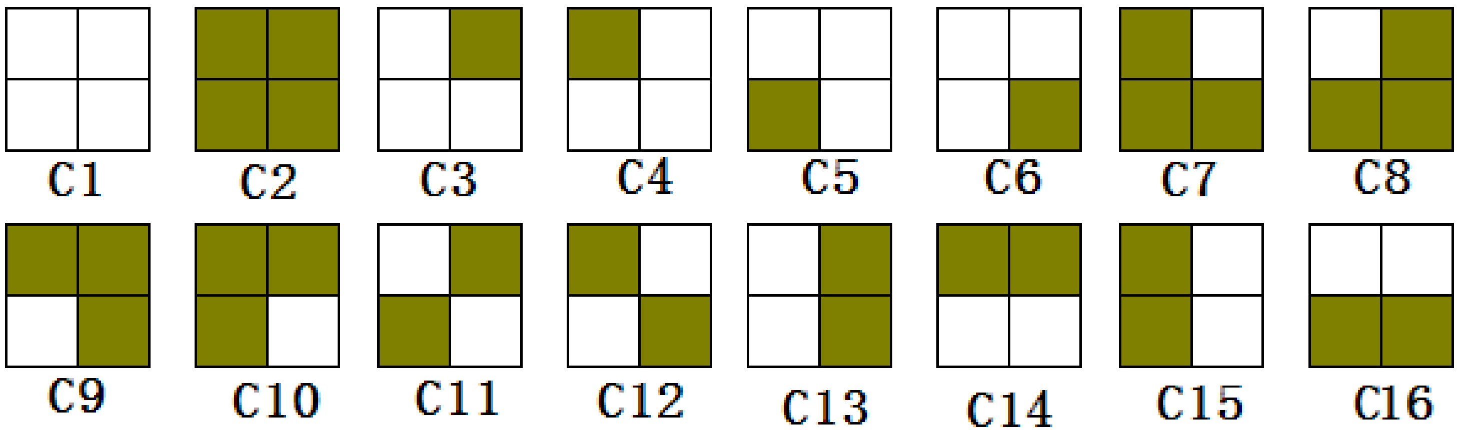
- 前面所讲的内容,仅适用于置换数目较少,着色没有其他限制的情况,是最简单的一类Polya定理的问题
- 复杂的Polya定理的问题还需要用到数论知识来加快速度,用排列组合或动态规划来辅助计数
- 不过,对于ACM竞赛来说,掌握简单的Polya定理就能够解决很多问题了

Polya定理应用

➢对2×2的方阵用黑白两种颜色涂色，问能得到多少种不同的图像？经过顺时针旋转使之吻合的两种方案，算是同一种方案。



Polya定理应用



转0°：$f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ 转90°：$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$

转180°：$f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$ 转270°：$f_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

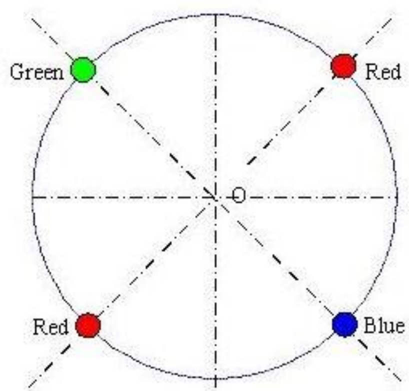
1	2
3	4

格子编号

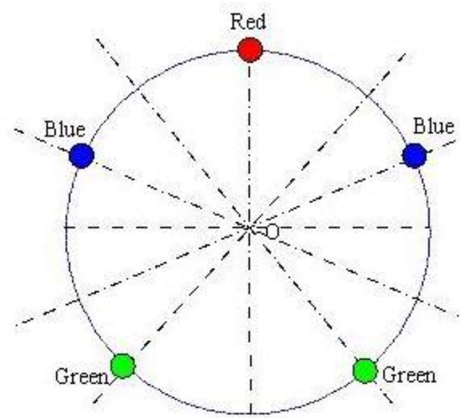
- 方案数$(2^4+2^1+2^2+2^1)/4=6$

Necklace of Beads

- POJ1286
- 题目大意:
  - 将三种不同颜色的珠子串成有n个珠子的项链,旋转/翻转后相同的算同一种,求方案数



The form with n=4



The form with n=5

Necklace of Beads

- n个珠子绕成一个环，对其3染色，旋转对称后相同的算一种
- 如何使用Polya定理解决该问题？
- 旋转：
  - n个点顺时针旋转i个位置的置换，循环数为gcd(n,i)，方案数为$3^{gcd(n,i)}$
- 翻转：
  - n为偶数时，对称轴不过顶点的循环数为n/2，方案数为$3^{n/2}$，对称轴过顶点的循环数为n/2+1，方案数为$3^{n/2+1}$
  - n为奇数时，循环数为(n+1)/2，方案数为$3^{(n+1)/2}$

思考

- for (int i = 1; i<=n; i++){

  tot += pow(3, gcd(n,i))
- }
- n很大（几千万），数据组数很多（几千组），怎么办？

思考

- 对大多数i，gcd(n,i)的值都相同
- 都是n的约数！
- 转而用sqrt(n)的复杂度枚举n的约数

```
for ( d是n 的约数 ){
    tot += pow(3, d)
    NUM{1..n中与n的最大公约数是d的数的个数}
}
```

- 如何计算NUM？

- $\varphi(n/d)$