北京大学暑期课《ACM/ICPC竞赛训练》

北京大学信息学院 郭炜
guo_wei@PKU.EDU.CN
http://weibo.com/guoweiofpku

课程网页：http://acm.pku.edu.cn/summerschool/pku_acm_train.htm

动态规划

北京大学信息学院 郭炜

例题一、数字三角形(POJ1163)

```
        7
      3   8
    8   1   0
  2   7   4   4
4   5   2   6   5
```

在上面的数字三角形中寻找一条从顶部到底边的路径，使得路径上所经过的数字之和最大。路径上的每一步都只能往左下或右下走。只需要求出这个最大和即可，不必给出具体路径。

三角形的行数大于1小于等于100，数字为 0 - 99

输入格式：

5 //三角形行数。下面是三角形

7

3 8

8 1 0

2 7 4 4

4 5 2 6 5

要求输出最大和

解题思路:

用二维数组存放数字三角形。

D(r, j) ：第r行第 j 个数字(r,j从1开始算)

MaxSum(r, j) ： 从D(r,j)到底边的各条路径中，

最佳路径的数字之和。

问题：求 MaxSum(1,1)

典型的递归问题。

D(r, j)出发，下一步只能走D(r+1,j)或者D(r+1, j+1)。故对于N行的三角形：

```
if ( r == N)
        MaxSum(r,j) = D(r,j)
else
        MaxSum( r, j) = Max{ MaxSum(r＋1,j), MaxSum(r+1,j+1) } + D(r,j)
```

数字三角形的递归程序:

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#define MAX 101
using namespace std;
int D[MAX][MAX];
int n;
int MaxSum(int i, int j){
  if(i==n)
     return D[i][j];
  int x = MaxSum(i+1,j);
  int y = MaxSum(i+1,j+1);
  return max(x,y)+D[i][j];
}
```

```
int main(){
  int i,j;
  cin >> n;
  for(i=1;i<=n;i++)
          for(j=1;j<=i;j++)
                  cin >> D[i][j];
  cout << MaxSum(1,1) << endl;
}
```

为什么超时？

7_1

$3_1 \quad 8_1$

$8_1 \quad 1_2 \quad 0_1$

$2_1 \quad 7_3 \quad 4_3 \quad 4_1$

$4_1 \quad 5_4 \quad 2_6 \quad 6_4 \quad 5_1$

- 回答：重复计算

如果采用递规的方法，深度遍历每条路径，存在大量重复计算。则时间复杂度为 2^n, 对于 $n = 100$ 行，肯定超时。

改进

如果每算出一个MaxSum(r,j)就保存起来，下次用到其值的时候直接取用，则可免去重复计算。那么可以用$O(n^2)$时间完成计算。因为三角形的数字总数是 $n(n+1)/2$

数字三角形的记忆递归型动归程序：

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;
#define MAX 101
int D[MAX][MAX];    int n;
int maxSum[MAX][MAX];
int MaxSum(int i, int j){
    if( maxSum[i][j] != -1 )
        return maxSum[i][j];
    if(i==n)   maxSum[i][j] = D[i][j];
    else {
        int x = MaxSum(i+1,j);
        int y = MaxSum(i+1,j+1);
        maxSum[i][j] = max(x,y)+ D[i][j];
    }
    return maxSum[i][j];
}
```

```
int main(){
  int i,j;
  cin >> n;
  for(i=1;i<=n;i++)
        for(j=1;j<=i;j++) {
            cin >> D[i][j];
            maxSum[i][j] = -1;
        }
  cout << MaxSum(1,1) << endl;
}
```

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7				
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12			
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	10		
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20				
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	13			
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	13	10		
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

递归转成递推

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

30				
23	21			
20	13	10		
7	12	10	10	
4	5	2	6	5

“人人为我”递推型动归程序

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;
#define MAX 101
int D[MAX][MAX];   int n;
int maxSum[MAX][MAX];
int main()  {
  int i,j;
  cin >> n;
  for(i=1;i<=n;i++)
            for(j=1;j<=i;j++)
                        cin >> D[i][j];
  for( int i = 1;i <= n; ++ i )
             maxSum[n][i] = D[n][i];
  for( int i = n-1; i>= 1;  --i )
             for( int j = 1; j <= i; ++j )
                 maxSum[i][j] = max(maxSum[i+1][j],maxSum[i+1][j+1]) + D[i][j]
  cout << maxSum[1][1] << endl;
}
```

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

4	5	2	6	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	5	2	6	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	2	6	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	10	6	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

7	12	10	10	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	12	10	10	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

7
3 8
8 1 0
2 7 4 4
4 5 2 6 5

20	13	10	10	5

没必要用二维maxSum数组存储每一个MaxSum(r,j),只要从底层一行行向上递推，那么只要一维数组maxSum[100]即可,即只要存储一行的MaxSum值就可以。

空间优化

进一步考虑，连maxSum数组都可以不要，直接用D的第n行替代maxSum即可。

节省空间，时间复杂度不变

空间优化

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;
#define MAX 101
int D[MAX][MAX];
int n; int * maxSum;
int main(){
  int i,j;
  cin >> n;
  for(i=1;i<=n;i++)
          for(j=1;j<=i;j++)
                  cin >> D[i][j];
  maxSum = D[n]; //maxSum指向第n行
  for( int i = n-1; i>= 1;  --i )
          for( int j = 1; j <= i; ++j )
            maxSum[j] = max(maxSum[j],maxSum[j+1]) + D[i][j];
   cout << maxSum[1] << endl;
}
```

递归到动规的一般转化方法

- 递归函数有n个参数，就定义一个n维的数组，数组的下标是递归函数参数的取值范围，数组元素的值是递归函数的返回值，这样就可以从边界值开始，逐步填充数组，相当于计算递归函数值的逆过程。

动规解题的一般思路

1. 将原问题分解为子问题

- 把原问题分解为若干个子问题，子问题和原问题形式相同或类似，只不过规模变小了。子问题都解决，原问题即解决(数字三角形例）。
- 子问题的解一旦求出就会被保存，所以每个子问题只需求解一次。

动规解题的一般思路

2. 确定状态

- 在用动态规划解题时，我们往往将和子问题相关的各个变量的一组取值，称之为一个“状态”。一个“状态”对应于一个或多个子问题，所谓某个“状态”下的“值”，就是这个“状态”所对应的子问题的解。

动规解题的一般思路

2. 确定状态

所有“状态”的集合，构成问题的“状态空间”。“状态空间”的大小，与用动态规划解决问题的时间复杂度直接相关。在数字三角形的例子里，一共有N×(N+1)/2个数字，所以这个问题的状态空间里一共就有N×(N+1)/2个状态。

整个问题的时间复杂度是状态数目乘以计算每个状态所需时间。

在数字三角形里每个“状态”只需要经过一次，且在每个状态上作计算所花的时间都是和N无关的常数。

动规解题的一般思路

2. 确定状态

用动态规划解题，经常碰到的情况是，K个整型变量能构成一个状态（如数字三角形中的行号和列号这两个变量构成“状态”）。如果这K个整型变量的取值范围分别是N1, N2, ……Nk，那么，我们就可以用一个K维的数组array[N1] [N2]……[Nk]来存储各个状态的“值”。这个“值”未必就是一个整数或浮点数，可能是需要一个结构才能表示的，那么array就可以是一个结构数组。一个“状态”下的“值”通常会是一个或多个子问题的解。

动规解题的一般思路

3. 确定一些初始状态（边界状态）的值

以“数字三角形”为例，初始状态就是底边数字，值就是底边数字值。

动规解题的一般思路

4. 确定状态转移方程

定义出什么是“状态”，以及在该“状态”下的“值”后，就要找出不同的状态之间如何迁移——即如何从一个或多个“值”已知的“状态”，求出另一个“状态”的“值”(“人人为我”递推型)。状态的迁移可以用递推公式表示，此递推公式也可被称作“状态转移方程”。

数字三角形的状态转移方程:

$$MaxSum[r][j] = \begin{cases} D[r][j] & r = N \\ Max\{\, MaxSum[r+1][j],\ MaxSum[r+1][j+1]\} + D[r][j] & \text{其他情况} \end{cases}$$

能用动规解决的问题的特点

1) 问题具有最优子结构性质。如果问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的，我们就称该问题具有最优子结构性质。

2) 无后效性。当前的若干个状态值一旦确定，则此后过程的演变就只和这若干个状态的值有关，和之前是采取哪种手段或经过哪条路径演变到当前的这若干个状态，没有关系。

例题二：最长上升子序列(百练2757)

问题描述

一个数的序列ai，当$a_1 < a_2 < ... < a_S$的时候，我们称这个序列是上升的。对于给定的一个序列(a_1, a_2, ..., a_N)，我们可以得到一些上升的子序列(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{iK})，这里$1 <= i1 < i2 < ... < iK <= N$。比如，对于序列(1, 7, 3, 5, 9, 4, 8)，有它的一些上升子序列，如(1, 7)，(3, 4, 8)等等。这些子序列中最长的长度是4，比如子序列(1, 3, 5, 8).

你的任务，就是对于给定的序列，求出最长上升子序列的长度。

输入数据

输入的第一行是序列的长度N (1 <= N <= 1000)。第二行给出序列中的N个整数，这些整数的取值范围都在0到10000。

输出要求

最长上升子序列的长度。

输入样例

7

1 7 3 5 9 4 8

输出样例

4

解题思路

1. 找子问题

“求序列的前n个元素的最长上升子序列的长度”是个子问题，但这样分解子问题，不具有“无后效性”

假设F(n) = x, 但可能有多个序列满足F(n) = x。有的序列的最后一个元素比 a_{n+1}小，则加上a_{n+1}就能形成更长上升子序列；有的序列最后一个元素不比a_{n+1}小……以后的事情受如何达到状态n的影响，不符合“无后效性”

解题思路

1. 找子问题

“求以a_k（k=1，2，3…N）为终点的最长上升子序列的长度”

一个上升子序列中最右边的那个数，称为该子序列的“终点”。

虽然这个子问题和原问题形式上并不完全一样，但是只要这N个子问题都解决了，那么这N个子问题的解中，最大的那个就是整个问题的解。

2. 确定状态：

子问题只和一个变量-- 数字的位置相关。因此序列中数的位置k 就是“状态”，而状态 k 对应的“值”，就是以a_k做为“终点”的最长上升子序列的长度。

状态一共有N个。

3. 找出状态转移方程：

maxLen（k）表示以a_k做为“终点”的最长上升子序列的长度那么：

初始状态：maxLen（1）= 1

maxLen（k）= max { maxLen（i）：1<=i < k 且 a_i < a_k且 k≠1 } + 1

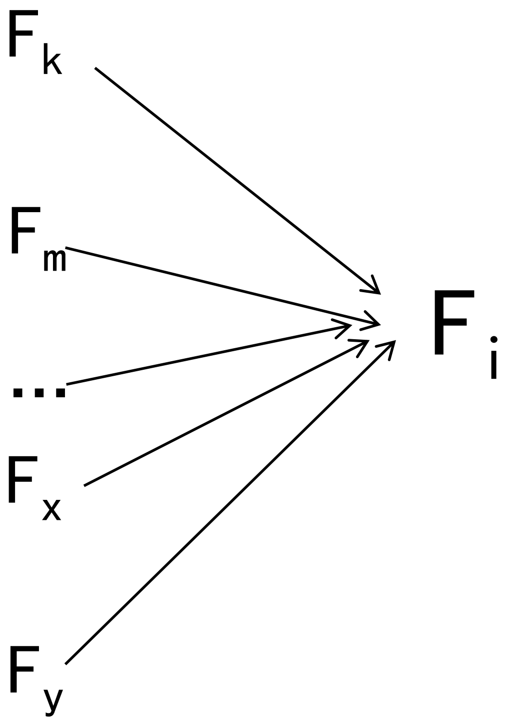
若找不到这样的i，则maxLen(k) = 1

maxLen(k)的值，就是在a_k左边，“终点”数值小于a_k，且长度最大的那个上升子序列的长度再加1。因为a_k左边任何“终点”小于a_k的子序列，加上a_k后就能形成一个更长的上升子序列。

“人人为我”递推型动归程序

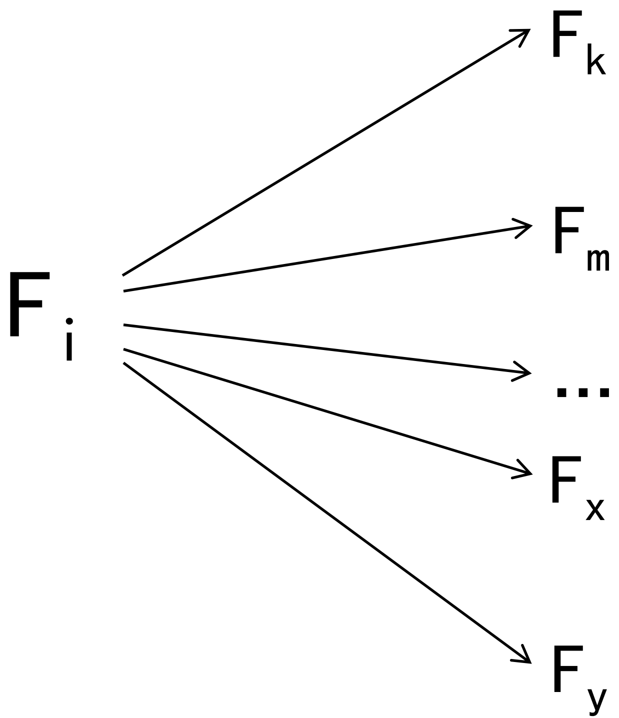
```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int  MAXN =1010;
int a[MAXN];   int maxLen[MAXN];
int main() {
        int N;      cin >> N;
        for( int i = 1;i <= N;++i) {
                cin >> a[i];
                maxLen[i] = 1;
        }
        for( int i = 2; i <= N; ++i) { //每次求以第i个数为终点的最长上升子序列的长度
                for( int j = 1; j < i; ++j)  //察看以第j个数为终点的最长上升子序列
                        if( a[i] > a[j] )
                                maxLen[i] = max(maxLen[i],maxLen[j]+1);
        }
        cout << * max_element(maxLen+1,maxLen + N + 1 );
        return 0;
} //时间复杂度O(N^2)
```

"人人为我"递推型动归



状态i的值F_i由若干个值已知的状态值F_k, F_m, . . F_y推出，如求和，取最大值……

“我为人人”递推型动归



状态i的值F_i在被更新（不一定是最终求出）的时候，依据F_i去更新（不一定是最终求出）和状态i相关的其他一些状态的值

$F_k, F_m, \ldots F_y$

“我为人人”递推型动归程序

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <algorithm>
using namespace std;
const int  MAXN =1010;
int a[MAXN];
int maxLen[MAXN];
int main()    {
        int N;      cin >> N;
        for( int i = 1;i <= N;++i) {
                cin >> a[i];
                maxLen[i] = 1;
        }
        for( int i = 1; i <= N; ++i)
                for( int j = i + 1; j <= N; ++j )  //看看能更新哪些状态的值
                        if( a[j] > a[i] )
                                maxLen[j] = max(maxLen[j],maxLen[i]+1);
        cout << * max_element(maxLen+1,maxLen + N + 1 );
        return 0;
} //时间复杂度O(N^2)
```

人人为我：

```
for( int i = 2; i <= N; ++i)
   for( int j = 1; j < i; ++j)
      if( a[i] > a[j] )
         maxLen[i] =
             max(maxLen[i],maxLen[j]+1);
```

动归的三种形式

1）记忆递归型

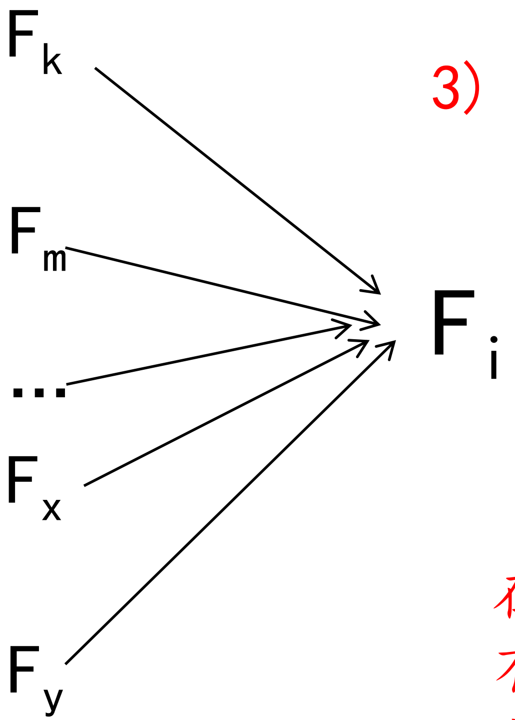
优点：只经过有用的状态，没有浪费。递推型会查看一些没用的状态，有浪费

缺点：可能会因递归层数太深导致爆栈，函数调用带来额外时间开销。无法使用滚动数组节省空间。总体来说，比递推型慢。

2）“我为人人”递推型

没有什么明显的优势，有时比较符合思考的习惯。个别特殊题目中会比“人人为我”型节省空间。

“人人为我”递推型中的优化



3) “人人为我”递推型

状态i的值F_i由若干个值已知的状态值$F_k, F_m, ..F_y$推出，如求和，取最大值

……

在选取最优备选状态的值Fm, Fn, …Fy时，有可能有好的算法或数据结构可以用来显著降低时间复杂度。

例三、最长公共子序列（POJ1458)

给出两个字符串，求出这样的一个最长的公共子序列的长度：子序列中的每个字符都能在两个原串中找到，而且每个字符的先后顺序和原串中的先后顺序一致。

最长公共子序列

Sample Input

abcfbc abfcab
programming   contest
abcd   mnp

Sample Output

4
2
0

最长公共子序列

输入两个串s1,s2,

设MaxLen(i,j)表示:

s1的左边i个字符形成的子串，与s2左边的j个字符形成的子串的最长公共子序列的长度(i,j从0开始算）

MaxLen(i,j) 就是本题的“状态”

假定 len1 = strlen(s1),len2 = strlen(s2）

那么题目就是要求 MaxLen(len1,len2)

最长公共子序列

显然：

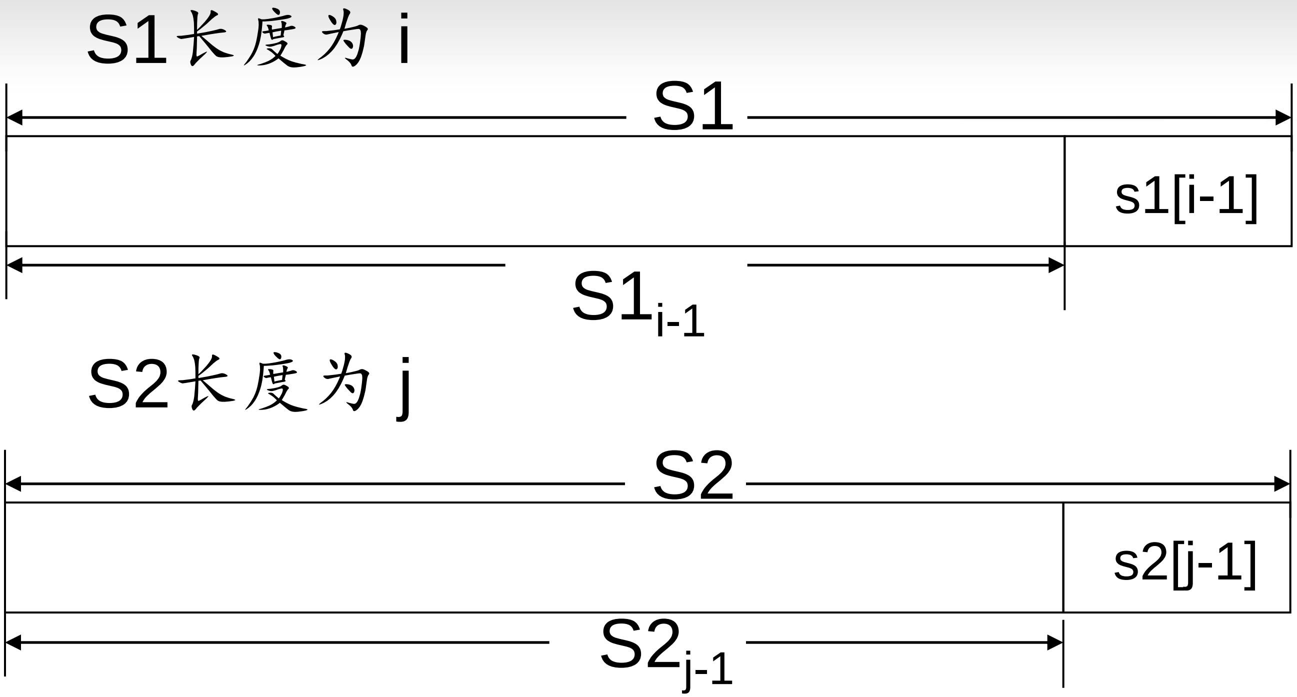
MaxLen(n,0) = 0（n= 0…len1）

MaxLen(0,n) = 0（n=0…len2）

递推公式：

```
if ( s1[i-1] == s2[j-1] ) //s1的最左边字符是s1[0]
    MaxLen(i,j) = MaxLen(i-1,j-1) + 1;
else
    MaxLen(i,j) = Max(MaxLen(i,j-1),MaxLen(i-1,j) );
```

时间复杂度O(mn) m,n是两个字串长度



S1[i-1]!= s2[j-1]时，MaxLen(S1,S2)不会比MaxLen(S1,$S2_{j-1}$)和MaxLen($S1_{i-1}$,S2)两者之中任何一个小，也不会比两者都大。

```
#include <iostream>
#include <cstring>
using namespace std;
char sz1[1000];
char sz2[1000];
int maxLen[1000][1000];
int main() {
		while( cin >> sz1 >> sz2 ) {
				int length1 = strlen( sz1);
				int length2 = strlen( sz2);
				int nTmp;
				int i,j;
				for( i = 0;i <= length1; i ++ )
						maxLen[i][0] = 0;
				for( j = 0;j <= length2; j ++ )
						maxLen[0][j] = 0;
```

```
            for( i = 1;i <= length1;i ++ )  {
                    for( j = 1; j <= length2; j ++ ) {
                            if( sz1[i-1] == sz2[j-1] )
                              maxLen[i][j] =   maxLen[i-1][j-1] + 1;
                            else
                              maxLen[i][j] = max(maxLen[i][j-1],maxLen[i-1][j]);
                    }
            }
            cout <<  maxLen[length1][length2] << endl;
    }
    return 0;
}
```

活学活用

- 掌握递归和动态规划的思想，解决问题时灵活应用

例四、最佳加法表达式

有一个由1..9组成的数字串.问如果将m个加号插入到这个数字串中,在各种可能形成的表达式中，值最小的那个表达式的值是多少

解题思路

假定数字串长度是n，添完加号后,表达式的最后一个加号添加在第 i 个数字后面，那么整个表达式的最小值，就等于在前 i 个数字中插入 m – 1 个加号所能形成的最小值，加上第 i + 1到第 n 个数字所组成的数的值（i从1开始算）。

解题思路

设V(m,n)表示在n个数字中插入m个加号所能形成的表达式最小值，那么：

if m = 0

  V(m,n) = n个数字构成的整数

else if n < m + 1

  V(m,n) = ∞

else

  V(m,n) = Min{ V(m-1,i) + Num(i+1,n) } (i = m … n-1)

Num(i,j)表示从第i个数字到第j个数字所组成的数。数字编号从1开始算。此操作复杂度是O(j-i+1)，可以预处理后存起来。

总时间复杂度：$O(mn^2)$.

例五、神奇的口袋(百练2755)

- 有一个神奇的口袋，总的容积是40，用这个口袋可以变出一些物品，这些物品的总体积必须是40。
- John现在有n（1≤n ≤ 20）个想要得到的物品，每个物品的体积分别是a_1，a_2……a_n。John可以从这些物品中选择一些，如果选出的物体的总体积是40，那么利用这个神奇的口袋，John就可以得到这些物品。现在的问题是，John有多少种不同的选择物品的方式。

- **输入**

输入的第一行是正整数n (1 <= n <= 20)，表示不同的物品的数目。接下来的n行，每行有一个1到40之间的正整数，分别给出a_1，a_2……a_n的值。

- **输出**

输出不同的选择物品的方式的数目。

输入样例

3
20
20
20

输出样例

3

枚举的解法：

枚举每个物品是选还是不选，共2^{20}种情况

递归解法

```
#include <iostream>
using namespace std;
int a[30];  int N;
int Ways(int w ,int k )  { // 从前k种物品中选择一些，凑成体积w的做法数目
        if( w == 0 )   return 1;
        if( k <= 0 )   return 0;
        return Ways(w, k -1 ) + Ways(w - a[k], k -1 );
}
int main()  {
        cin >> N;
        for( int i = 1;i <= N; ++ i )
                cin >> a[i];
        cout << Ways(40,N);
        return 0;
}
```

动规解法

```
#include <iostream>
using namespace std;
int a[30];  int N;
int Ways[40][30];//Ways[i][j]表示从前j种物品里凑出体积i的方法数
int main()   {
        cin >> N;
        memset(Ways,0,sizeof(Ways));
        for( int i = 1;i <= N; ++ i ) {
                cin >> a[i];        Ways[0][i] = 1;
        }
        Ways[0][0] = 1;
        for( int w = 1 ; w <= 40; ++ w ) {
                for( int k = 1; k <= N; ++ k ) {
                        Ways[w][k] = Ways[w][k-1];
                        if( w-a[k] >= 0)      Ways[w][k] += Ways[w-a[k]][k-1];
                }
        }
        cout << Ways[40][N];        return 0;
}
```

“我为人人”型递推解法

此问题仅在询问容积40是否可达，40是个很小的数，可以考虑对值域空间-即对容积的可达性进行动态规划。

定义一维数组 int sum[41];

依次放入物品，计算每次放入物品可达的容积，并在相应空间设置记录，最后判断sum[40] 是否可达，到达了几次。

```
#include <iostream>
using namespace std;
#define MAX 41
int main(){
      int n,i,j,input;          int sum[MAX];
      for(i=0;i<MAX;i++) sum[i]=0;
      cin >> n;
      for(i=0;i<n;i++){
          cin >> input;
          for(j=40;j>=1;j--)
              if(sum[j]>0 && j+input <= 40)
                  sum[j+input] += sum[j];       //如果j有sum[j]
种方式可达，则每种方式加上input就可达 j + input
          sum[input]++;
      }
      cout << sum[40] << endl;
      return 0;
}
```

例六、0-1背包问题(POJ3624)

有N件物品和一个容积为M的背包。第i件物品的体积w[i]，价值是d[i]。求解将哪些物品装入背包可使价值总和最大。每种物品只有一件，可以选择放或者不放
(N<=3500,M <= 13000)。

0-1背包问题(POJ3624)

用 F[i][j] 表示取前i种物品，使它们总体积不超过j的最优取法取得的价值总和。要求F[N][M]

```
边界：if (w[1] <= j)
          F[1][j] = d[1];
      else
          F[1][j] = 0;
```

0-1背包问题(POJ3624)

用 F[i][j] 表示取前i种物品，使它们总体积不超过j的最优取法取得的价值总和

递推： F[i][j] = max(F[i-1][j],F[i-1][j-w[i]]+d[i])

取或不取第 i种物品，两者选优

(j-w[i] >= 0才有第二项)

0-1背包问题(POJ3624)

$$F[i][j] = \max(F[i-1][j], F[i-1][j-w[i]]+d[i])$$

本题如用记忆型递归，需要一个很大的二维数组，会超内存。注意到这个二维数组的下一行的值，只用到了上一行的正上方及左边的值，因此可用滚动数组的思想，只要一行即可。即可以用一维数组，用“人人为我”递推型动归实现。

例七、滑雪(百练1088)

Michael喜欢滑雪百这并不奇怪， 因为滑雪的确很刺激。

可是为了获得速度，滑的区域必须向下倾斜，而且当你滑到坡底，

你不得不再次走上坡或者等待升降机来载你。

Michael想知道载一个区域中最长的滑坡。区域由一个二维数组给出。数组的每个数字代表点的高度。下面是一个例子

```
1  2  3  4  5
16 17 18 19 6
15 24 25 20 7
14 23 22 21 8
13 12 11 10 9
```

一个人可以从某个点滑向上下左右相邻四个点之一，当且仅当高度减小。在上面的例子中，一条可滑行的滑坡为24-17-16-1。当然25-24-23-...-3-2-1更长。事实上，这是最长的一条。输入输入的第一行表示区域的行数R和列数C(1 <= R,C <= 100)。下面是R行，每行有C个整数，代表高度h，0<=h<=10000。输出输出最长区域的长度。

输入

输入的第一行表示区域的行数R和列数C
(1 <= R,C <= 100)。下面是R行，每行有C个整数，
代表高度h，0<=h<=10000。

输出

输出最长区域的长度。

样例输入

```
5 5
1  2  3  4  5
16 17 18 19 6
15 24 25 20 7
14 23 22 21 8
13 12 11 10 9
```

样例输出

```
25
```

解题思路

L(i,j)表示从点(i,j)出发的最长滑行长度。

一个点(i,j), 如果周围没有比它低的点，L(i,j) = 1

否则

递推公式： L(i,j) 等于(i,j)周围四个点中,比(i,j)低，且L值最大的那个点的L值，再加1

复杂度：$O(n^2)$

解题思路

解法1） “人人为我”式递推

L(i,j)表示从点(i,j)出发的最长滑行长度。

一个点(i,j), 如果周围没有比它低的点，L(i,j) = 1

将所有点按高度从小到大排序。每个点的 L 值都初始化为1

从小到大遍历所有的点。经过一个点(i,j)时，用递推公式求L(i,j)

解题思路

解法2） “我为人人”式递推

L(i,j)表示从点(i,j)出发的最长滑行长度。

一个点(i,j), 如果周围没有比它低的点，L(i,j) = 1

将所有点按高度从小到大排序。每个点的 L 值都初始化为1

从小到大遍历所有的点。经过一个点(i,j)时，要更新他周围的，比它高的点的L值。例如：

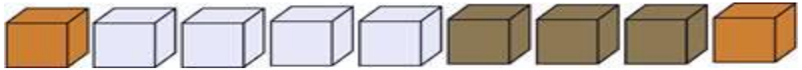
if H(i+1,j) > H(i,j) // H代表高度

L(i+1,j) = max(L(i+1,j),L(i,j)+1)

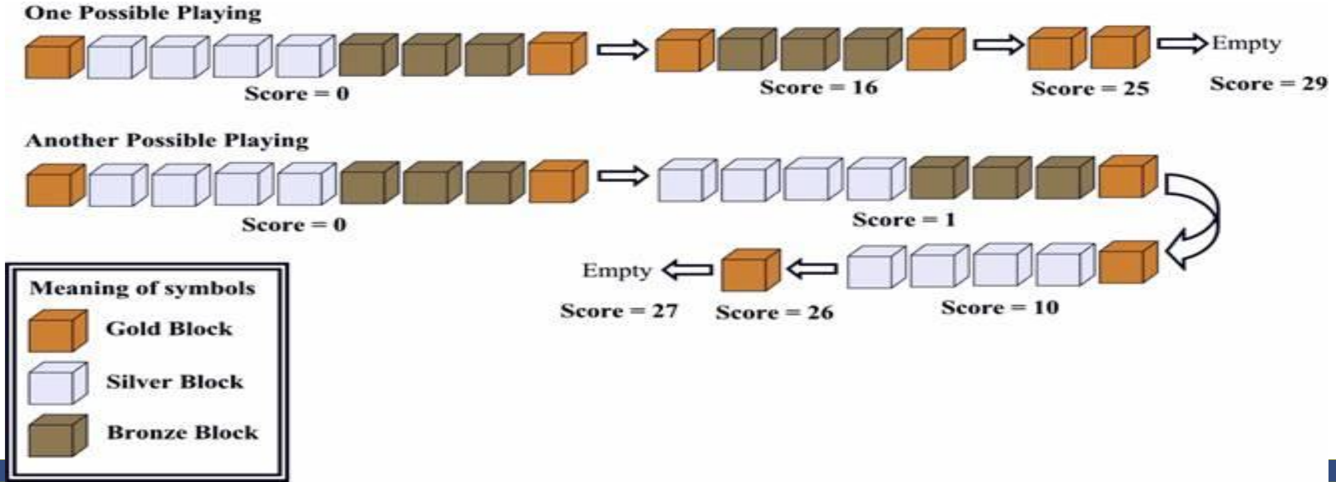
例八、POJ1390 方盒游戏

- 问题描述

N个方盒(box)摆成一排，每个方盒有自己的颜色。连续摆放的同颜色方盒构成一个方盒片段(box segment)。下图中共有四个方盒片段，每个方盒片段分别有1、4、3、1个方盒



玩家每次点击一个方盒，则该方盒所在方盒片段就会消失。若消失的方盒片段中共有k个方盒，则玩家获得k*k个积分。



- 请问：给定游戏开始时的状态，玩家可获得的最高积分是多少?
- 输入：第一行是一个整数t(1<=t<=15)，表示共有多少组测试数据。每组测试数据包括两行
  - 第一行是一个整数n(1<=n<=200),，表示共有多少个方盒
  - 第二行包括n个整数，表示每个方盒的颜色。这些整数的取值范围是[1 n]
- 输出：对每组测试数据，分别输出该组测试数据的序号、以及玩家可以获得的最高积分

- **样例输入**

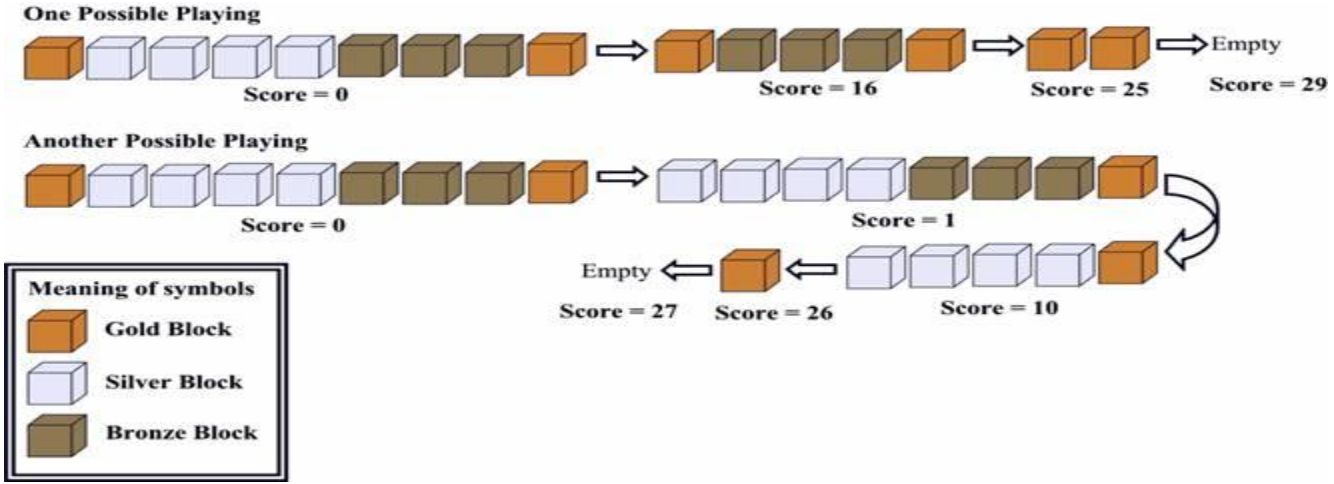
2
9
1 2 2 2 2 3 3 3 1
1
1

- **样例输出**

Case 1: 29
Case 2: 1

问题分析

- 当同色的方盒摆放在不连续的位置时，方盒的点击顺序影响玩家获得的积分



- 同种颜色的方盒被点击的次数越少，玩家获得的积分越高
- 明显的递归问题：每次点击之后，剩下的方盒构成一个新的方盒队列，新队列中方盒的数量减少了。然后计算玩家从新队列中可获得的最高积分

问题分析

- 点击下图中黑色方盒之前，先点击绿色方盒可提高玩家的积分：同颜色方盒A和B被其他颜色的方盒隔开时，先点击其他颜色方盒，使得A和B消失前能够在同一个方盒片段中
- 点击下图中红色和蓝色方盒可获得的积分
  - 所有红色方盒合并到同一个片段：49+1+36=86
  - 所有蓝色方盒合并到同一个片段：49+16+9=74

问题分析

- 思路:

将连续的若干个方块作为一个“大块”(box_segment)
考虑，假设开始一共有 n个“大块”，编号0到n-1
第i个大块的颜色是 color[i],包含的方块数目，即长度,是len[i]

用click_box(i,j)表示从大块i到大块j这一段消除后所能
得到的最高分

则整个问题就是： click_box(0,n-1)

问题分析

要求click_box(i,j)时，考虑最右边的大块j，对它有两种处理方式，要取其优者：

1) 直接消除它，此时能得到最高分就是：

   click_box(i,j-1) + len[j]*len[j]

2) 期待以后它能和左边的某个同色大块合并

问题分析

考虑和左边的某个同色大块合并:

左边的同色大块可能有很多个，到底和哪个合并最好，不知道，只能枚举。假设大块j和左边的大块 $k(i<=k<j-1)$ 合并，此时能得到的最高分是多少呢?

问题分析

考虑和左边的某个同色大块合并:

左边的同色大块可能有很多个，到底和哪个合并最好，不知道，只能枚举。假设大块j和左边的大块k(i<=k<j-1) 合并，此时能得到的最高分是多少呢?

是不是:

click_box(i,k-1) + click_box(k+1,j-1) + (len[k]+len[j])^2

问题分析

$$\text{click\_box}(i,k-1) + \text{click\_box}(k+1,j-1) + (\text{len}[k]+\text{len}[j])^2$$

不对！

因为将大块k和大块j合并后，形成的新大块会在最右边。将该新大块直接将其消去的做法，才符合上述式子，但直接将其消去，未必是最好的，也许它还应该和左边的同色大块合并，才更好

递推关系无法形成，怎么办?

问题分析

需要改变问题的形式。

click_box(i,j) 这个形式不可取，因为无法形成递推关系

考虑新的形式:

click_box(i,j,ex_len)

表示:

大块j的右边已经有一个长度为ex_len的大块(该大块可能是在合并过程中形成的，不妨就称其为ex_len)，且j的颜色和ex_len相同，在此情况下将i 到j以及ex_len都消除所能得到的最高分。

于是整个问题就是求：click_box(0,n-1,0)

问题分析

求click_box(i,j,ex_len)时，有两种处理方法，取最优者

假设j和ex_len合并后的大块称作 Q

1) 将Q直接消除，这种做法能得到的最高分就是:

click_box(i,j-1,0) + $(len[j]+ex\_len)^2$

2) 期待Q以后能和左边的某个同色大块合并。需要枚举可能和Q合并的大块。假设让大块k和Q合并，则此时能得到的最大分数是:

click_box(i,k,len[j]+ex_len) + click_box(k+1,j-1,0)

递归的终止条件是什么?

问题分析

click_box(i,j,ex_len) 递归的终止条件：

i == j

```cpp
#include <iostream>
#include <cstring>
using namespace std;
const int M = 210;
struct Segment {
   int color;
   int len;
};
Segment segments[M];
int score[M][M][M];
```

```
int ClickBox(int i,int j,int len)  {
   if( score[i][j][len] != -1)
        return score[i][j][len];
   int result = (segments[j].len + len) *
                (segments[j].len + len);
   if( i == j )
        return result;
   result += ClickBox(i,j-1,0);
   for(int k = i;k <= j-1; ++k ) {
        if( segments[k].color != segments[j].color )
                continue;
        int r = ClickBox(k+1,j-1,0);
        r += ClickBox(i,k,segments[j].len + len);
        result = max(result,r);
   }
```

```
    score[i][j][len] = result;
    return result;
}
int main()
{
    int T;
    cin >> T;
    for(int t = 1; t <= T; ++ t) {
        int n;
        memset(score,0xff,sizeof(score));
        cin >> n;
        int lastC = 0;
        int segNum = -1;
```

```
        for(int i = 0;i < n; ++ i) {
                int c;
                cin >> c;
                if( c != lastC ) {
                        segNum ++;
                        segments[segNum].len = 1;
                        segments[segNum].color = c;
                        lastC  = c;
                }
                else segments[segNum].len ++;
        }
  cout << "Case " << t << ": " << ClickBox(0,segNum,0) << endl;
    }
    return 0;
}
```

例九、灌溉草场(POJ2373)

在一片草场上:有一条长度为L (1 <= L <= 1,000,000, L为偶数)的线段。 John的N (1 <= N <= 1000) 头奶牛都沿着草场上这条线段吃草，每头牛的活动范围是一个开区间(S,E)，S，E都是整数。不同奶牛的活动范围可以有重叠。

John要在这条线段上安装喷水头灌溉草场。每个喷水头的喷洒半径可以随意调节，调节范围是 [A B](1 <= A <= B <= 1000)，A,B都是整数。要求

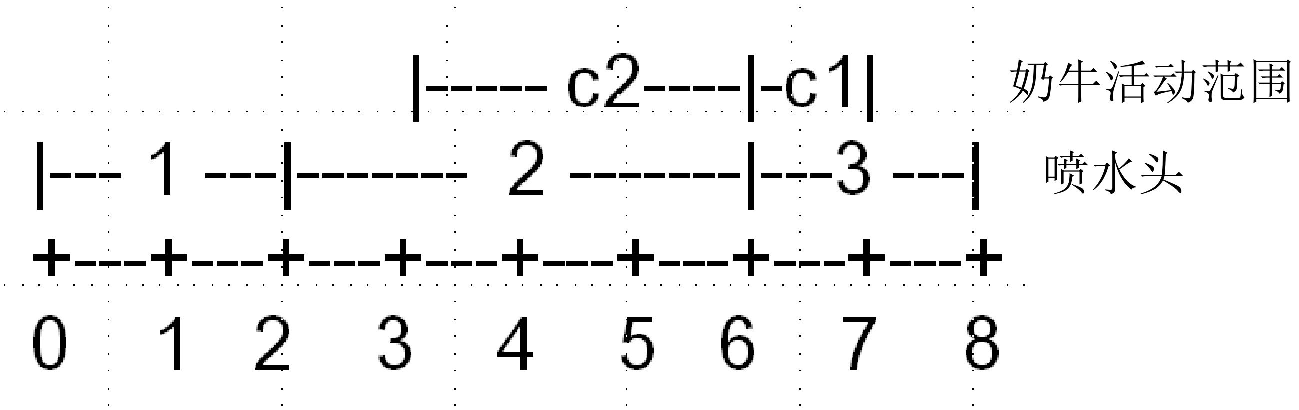
线段上的每个整点恰好位于一个喷水头的喷洒范围内

每头奶牛的活动范围要位于一个喷水头的喷洒范围内

任何喷水头的喷洒范围不可越过线段的两端(左端是0,右端是L)

请问， John 最少需要安装多少个喷水头。

灌溉草场(POJ2373)



在位置2和6，喷水头的喷洒范围不算重叠

- **输入**

  第1行：整数N、L。

  第2行：整数A、B。

  第3到N+2行：每行两个整数S、E（0 <= S < E <= L），表示某头牛活动范围的起点和终点在线段上的坐标(即到线段起点的距离)。

- **输出**：最少需要安装的多少个喷水头；若没有符合要求的喷水头安装方案，则输出-1。

输入样例

2 8
1 2
6 7
3 6

输出样例

3

问题分析

- 从线段的起点向终点安装喷水头，令f(X)表示：所安装喷水头的喷洒范围恰好覆盖直线上的区间[0 X]时，最少需要多少个喷水头
- 显然，X应满足下列条件
  - X为偶数
  - X所在位置不会出现奶牛，即X不属于任何一个(S,E)
  - $X \geq 2A$
  - 当$X>2B$时，存在$Y \in [X-2B \quad X-2A]$且Y满足上述三个条件，使得$f(X)=f(Y)+1$

解题思路

- 递推计算f(X)
  - $f(X) = \infty$ ： X 是奇数
  - $f(X) = \infty$ ： $X < 2A$
  - $f(X) = \infty$ ：X处可能有奶牛出没
  - $f(X)=1$： $2A \le X \le 2B$ 、且X位于任何奶牛的活动范围之外
  - $f(X)=1+\min\{f(Y): Y \in [X-2B \quad X-2A]$、Y位于任何奶牛的活动范围之外$\}$： $X>2B$

解题思路

f(X)=1+min{f(Y): Y∈[X-2B　X-2A]、Y位于任何奶牛的活动范围之外}：　X>2B

- 对每个X求f(X)，都要遍历区间 [X-2B, X -2A]去寻找其中最小的f(Y),则时间复杂度为：L * B = 1000000 * 1000，太慢
- 快速找到[X-2B　X-2A]中使得f(Y)最小的元素是问题求解速度的关键 。

解题思路

- 可以使用优先队列priority_queue！（multiset也可以，比priority_queue慢一点）！
- 求F(X)时，若坐标属于[X-2B，X-2A]的二元组(i,F(i))都保存在一个priority_queue中,并根据F(i)值排序，则队头的元素就能确保是F(i)值最小的。

解题思路

- 在求 X点的F(x)时，必须确保队列中包含所有属于 [X-2B,X-2A]的点。而且，不允许出现坐标大于X-2A的点，因为这样的点对求F(X)无用，如果这样的点出现在队头，因其对求后续点的F值有用，故不能抛弃之，于是算法就无法继续了。

- 队列中可以出现坐标小于 X-2B 的点。这样的点若出现在队头，则直接将其抛弃。

- 求出X点的F值后，将(X-2A+2, F(X-2A+2))放入队列，为求F(X+2)作准备
- 队列里只要存坐标为偶数的点即可

```
#include <iostream>
#include <cstring>
#include <queue>
using namespace std;
const int INFINITE = 1<<30;
const int MAXL = 1000010;
const int MAXN = 1010;
int F[MAXL];  // F[L]就是答案
int cowThere[MAXL]; //cowThere[i]为1表示点i有奶牛
int N,L,A,B;
struct Fx {
       int x;          int f;
       bool operator<(const Fx & a) const
       {      return f > a.f;    }
       Fx(int xx=0,int ff=0):x(xx),f(ff) { }
};// 在优先队列里，f值越小的越优先
priority_queue<Fx> qFx;
```

```
int main()
{
        cin >> N >> L;
        cin >> A >> B;
        A <<= 1; B <<= 1; //A,B的定义变为覆盖的直径
        memset(cowThere,0,sizeof(cowThere));
        for( int i = 0;i < N; ++i ) {
                int s,e;
                cin >> s >> e;
                ++cowThere[s+1]; //从s+1起进入一个奶牛区
                --cowThere[e]; //从e起退出一个奶牛区
        }
        int  inCows = 0; //表示当前点位于多少头奶牛的活动范围之内
        for( int i = 0;i <= L ; i ++) { //算出每个点是否有奶牛
                F[i] = INFINITE;
                inCows += cowThere[i];
                cowThere[i] = inCows > 0;
        }
```

```
for( int i = A;i <= B ; i += 2 ) //初始化队列
        if(! cowThere[i] ) {
                F[i] = 1;
                if( i <= B + 2 - A )
                //在求F[i]的时候，要确保队列里的点x, x <= i - A
                        qFx.push(Fx(i,1));
        }
for( int i = B + 2 ; i <= L; i += 2 ) {
        if( !cowThere[i] ) {    Fx fx;
                while(!qFx.empty()) {
                        fx = qFx.top();
                        if( fx.x < i - B )
                                qFx.pop();
                        else
                                break;
                }
                if ( ! qFx.empty() )
                        F[i] = fx.f + 1;
}
```

```
            if( F[i- A + 2] != INFINITE) {
                  //队列中增加一个+1可达下个点的点
                  qFx.push(Fx(i- A + 2, F[i- A + 2]));
            }
      }
      if( F[L] == INFINITE )
            cout  << -1 <<endl;
      else
            cout << F[L] << endl;
      return 0;
} // 复杂度：O(nlogn)
```

手工实现优先队列的方法

- 如果一个队列满足以下条件：

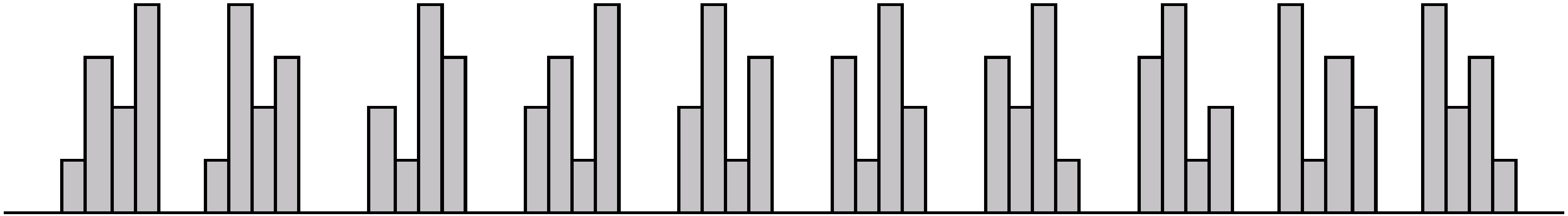
1） 开始为空

2） 每在队尾加入一个元素a之前，都从现有队尾往前删除元素，一直删到碰到小于 a的元素为止，然后再加入a

- 那么队列就是递增的，当然队头的元素，一定是队列中最小的

例十：POJ 1037 一个美妙的栅栏

- N 个木棒, 长度分别为1, 2, …, N.
- 构成美妙的栅栏
  - 除了两端的木棒外，每一跟木棒，要么比它左右的两根都长，要么比它左右的两根都短。
  - 即木棒呈现波浪状分布,这一根比上一根长了，那下一根就比这一根短，或反过来



All cute fences made of $N = 4$ planks, ordered by their catalogue numbers.

例题： POJ 1037 一个美妙的栅栏

- 问题: 符合上述条件的栅栏建法有很多种，对于满足条件的所有栅栏, 按照字典序(从左到右，从低到高) 排序。
- 给定一个栅栏的排序号，请输出该栅栏, 即每一个木棒的长度.

例题： POJ 1037 一个美妙的栅栏

- 输入数据
  - 第一行是测试数据的组数 K (1 <= K <= 100）。接下来的K行，每一行描述一组输入数据.
  - 每一组输入数据包括两个整数 N 和 C. N (1 <= N <= 20) 表示栅栏的木棒数, C表示要找的栅栏的排列号.
- 输出数据
  - 输出第C个栅栏，即每一个木棒的长度
- 设20个木棒可组成的栅栏数是T; 我们假设 T 可以用64-bit长整数表示， 1 < C <= T

- 输入样例

2
2 1
3 3

- 输出样例

1 2
2 3 1

解题思路

- 问题抽象：给定1到N 这N个数字,将这些数字高低交替进行排列，把所有符合情况的进行一个字典序排列,问第C个排列是一个怎样的排列
- 总体思想
  - 动归 + 排列计数
- 动归

动归解题思路

- 1) 设 A[i] 为i根木棒所组成的合法方案数目。看看能否找出A[i]和A[i-1]或A[i-j]之间的递推关系(所有木棒总数是i)。称i根木棒的合法方案集合为S(i)

- 2) 在选定了某根木棒x作为第一根木棒的情况下,剩下i-1根木棒的合法方案数是A[i-1]。但是，这A[i-1]种方案，并不是每种都能和x形成新的合法方案。将第一根比第二根长的方案称为DOWN方案，第一根比第二根短的称为UP方案，则，S(i-1)中，第一根木棒比x长的DOWN方案，以及第一根木棒比x短的UP方案，才能和x构成S(i)中的方案。

动归解题思路

- 3) 置A[i] = 0。先枚举x。然后针对每个x，枚举x后面的那根木棒y。如果 y > x(x<y的情况类推），则:

  A[i] += 以y打头的DOWN方案数

  但以y打头的DOWN方案数，又和y的长短有关。

  于是难以直接从 A[i-1]或 A[i-j]推出 A[i]
- 4) 考虑将A[i]这种粗略的状态描述方式细化，即**加上限制条件后分类**。设

  A[i] = ∑ B[i][k]　　　k = 1….i

  B[i][k] 是S(i)中以第k短的木棒打头的方案数。尝试对 B 进行动归。第k短，指的是i根木棒中第k短。

动归解题思路

- 5) $B[i][k] = \sum B[i-1][M]_{(DOWN)} + \sum B[i-1][N]_{(UP)}$

  M = **k ... i-1** , N = 1… k-1

  还是没法直接推。于是把B再分类细化：

  B[i][k] = C[i][k][DOWN] + C[i][k][UP]

  C[i][k][DOWN] 是S(i)中以第k短的木棒打头的DOWN方案数。然后试图对C进行动归

  C[i][k][UP] = ∑ C[i-1][M][DOWN]

  M = k ... i -1

  C[i][k][DOWN] = ∑ C[i-1][N][UP]

  N = 1… k-1

  初始条件：C[1][1][UP]=C[1][1][DOWN] = 1

动归解题思路

- 经验：当选取的状态，难以进行递推时（分解出的子问题和原问题形式不一样，或不具有无后效性），考虑将状态增加限制条件后分类细化，即增加维度，然后在新的状态上尝试递推

排序计数

- 如1，2，3，4的全排列，共有4！种，求第10个的排列是（从1计起）？
- 先试首位是1，后234有3！=6种<10,说明首位1偏小，问题转换成求2开头的第（10-6=4）个排列，而3！=6 >= 4，说明首位恰是2。
- 第二位先试1（1没用过），后面2！=2个<4,1偏小，换成3（2用过了）为第二位，待求序号也再减去2！，剩下2了。而此时2!>=2，说明第二位恰好是3。
- 第三位先试1，但后面1！<2，因此改用4。末位则是1了。
- 这样得出，第10个排列是2-3-4-1。

排序计数

本题待求方案的序号为C

本题就是先假设第1短的木棒作为第一根，看此时的方案数P(1)是否>=C,如果否，则应该用第二短的作为第一根，C 减去P(1)，再看此时方案数P(2)和C比如何。如果还 < C ，则应以第三短的作为第一根,C再减去P(2) ....

若发现 第 i短的作为第一根时，方案数已经不小于C，则确定应该以第i短的作为第一根， C减去第 i短的作为第一根的所有方案数，然后再去确定第二根....

微调：以第i短的木棒作第k根时，有UP和DOWN两类方案，先用DOWN的方案数和C比较

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <cstring>
using namespace std;
const int UP =0;      const int DOWN =1;
const int MAXN = 25;
long long C[MAXN][MAXN][2];  //C[i][k][DOWN] 是S(i)中以第k短的木棒打头的DOWN方案数,C[i][k][UP] 是S(i)中以第k短的木棒打头的UP方案数,第k短指i根中第k短
void Init(int n) {
    memset(C,0,sizeof(C));
    C[1][1][UP] = C[1][1][DOWN] = 1;
    for( int i = 2 ;i <= n; ++ i )
        for( int k = 1; k <= i; ++ k ) { //枚举第一根木棒的长度
            for( int M = k; M <i ; ++M ) //枚举第二根木棒的长度
                C[i][k][UP] += C[i-1][M][DOWN];
            for( int N = 1; N <= k-1; ++N ) //枚举第二根木棒的长度
                C[i][k][DOWN] += C[i-1][N][UP];
        }
//总方案数是 Sum{ C[n][k][DOWN] + C[n][k][UP] }  k = 1.. n;
}
```

```
void Print(int n,long long cc)
{
    int used[M]; //木棒是否用过
    int seq[M]; //最终要输出的答案
    memset(used,0,sizeof(used));
    for(int i = 1; i<=n; ++i) {//依次确定每一个位置i的木棒序号
        int No = 0; //位置i的木棒k是剩下的木棒里的第No短的,No从1开始算
        long long skipped = 0; //已经跳过的方案数
        int k;
        for( k = 1; k <=n; ++k) {
            if( !used[k]) { //长度为k的木棒没有用过
                ++No; //k是剩下的木棒里的第No短的
                if( i == 1)
                    skipped = C[n][No][UP]+C[n][No][DOWN];
                else {
                    if( k > seq[i-1] && ( i <= 2 ||
                        seq[i-2] > seq[i-1])) //合法放置
                        skipped = C[n-i+1][No][DOWN];
```

```
                else if( k < seq[i-1] && (i <= 2 ||
                       seq[i-2] < seq[i-1]))
                    skipped = C[n-i+1][No][UP];
                } //if( i == 1)
                if( skipped >= cc)
                    break;
                else cc-= skipped;
            } // if( !used[k])
        }//     for( k = 1; k <=n; ++k)
        used[k] = 1;
        seq[i] = k;
    }
    for(int i = 1;i <= n;++i)
        cout << seq[i] << " ";
    cout << endl;
}
```

```
int main()
{
    int T,n;
    long long c;
    Init(20);
    scanf("%d",&T);
    while(T--)     {
        scanf("%d %lld",&n,&c);
        Print(n,c);
    }
    return 0;
}
```

状态压缩动态规划

状态压缩动态规划

- 有时，状态相当复杂，看上去需要很多空间，比如一个数组才能表示一个状态，那么就需要对状态进行某种编码，进行压缩表示。

- 比如：状态和某个集合有关，集合里可以有一些元素，没有另一些元素，那么就可以用一个整数表示该集合，每个元素对应于一个bit，有该元素，则该bit就是1。

例十一 TSP问题

N个城市，编号1到N。起点是1，终点是N(N<=16)。

任意两个城市间都有路，A->B和B->A的路可能不一样长。

已知所有路的长度，问经每个城市恰好一次的最短路径的长度

- 用 dp[s][j] 表示经过集合s中的每个点恰好一次，且最后走的点是j (j ∈s)的最佳路径的长度。

- 最终就是要求：

min([dp[all][j]) (0 <= j < N)

all是所有点的集合

- 状态方程：$dp[s][j] = \min\{ dp[s'][k] + w[k][j] \}$
  （$j \in s$，$s' = s - j$，$k \in s'$，枚举每个k，w[k][j]是k到j的边权值）

- 边界条件：　$dp[\{i\}][i] = 0$

- 问题：如何表示点集s ？

由于只有16个点，可以用一个short变量表示点集。每个点对应一个bit。例如：

$5 = 0000000000000101_2$

5代表的点集是{0, 2}

全部n个点的点集，对应的整数是： (1 << n) - 1

最终要求：min(dp[(1<<n)-1][j]) (0 <= j < n)

- 问题：如何进行集合操作？

位运算。例：从集合i中去掉点j，得到新集合s’：

s’ = s & (~(1 << j))

或

s’ = s - (1 << j)

- 问题：最终时间复杂度：

状态数目：dp[s][j]　　　　s：0 - 2^n-1　　j：0 - (n-1)

状态转移：O(n)

总时间：$O(n^2 2^n)$

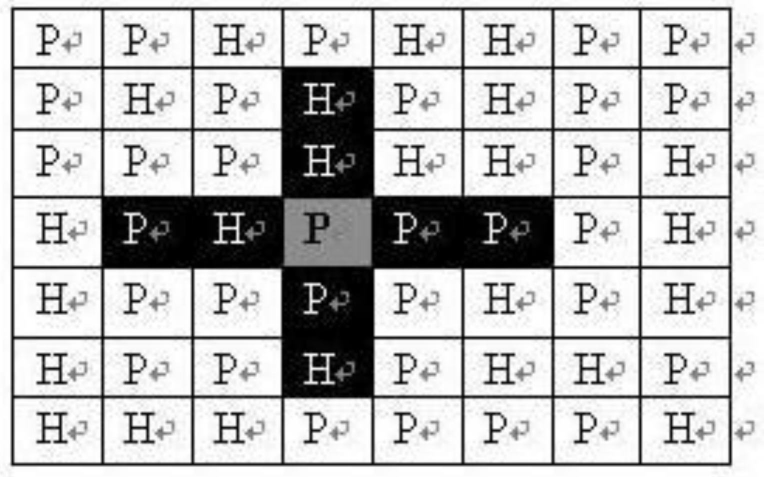
例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 司令部的将军们打算在N*M的网格地图上部署他们的炮兵部队。一个N*M的地图由N行M列组成，地图的每一格可能是山地（用"H" 表示），也可能是平原（用"P"表示），如下图。在每一格平原地形上最多可以布置一支炮兵部队（山地上不能够部署炮兵部队）；

P	P	H	P	H	H	P	P
P	H	P	H	P	H	P	P
P	P	P	H	H	H	P	H
H	P	H	P	P	P	P	H
H	P	P	P	P	H	P	H
H	P	P	H	P	H	H	P
H	H	H	P	P	P	P	H

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 如果在地图中的灰色所标识的平原上部署一支炮兵部队，则图中的黑色的网格表示它能够攻击到的区域：沿横向左右各两格，沿纵向上下各两格。图上其它白色网格均攻击不到。从图上可见炮兵的攻击范围不受地形的影响。
  现在，将军们规划如何部署炮兵部队，在防止误伤的前提下（保证任何两支炮兵部队之间不能互相攻击，即任何一支炮兵部队都不在其他支炮兵部队的攻击范围内），在整个地图区域内最多能够摆放多少炮兵部队。
- 数据范围：1<=n<=100, 1<=m<=10



例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 思路：如果用 dp[i]表示前i行所能放的最多炮兵数目，能否形成递推关系？ 显然不能。因为不满足无后效性

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 思路：如果用 dp[i]表示前i行所能放的最多炮兵数目，能否形成递推关系？ 显然不能。因为不满足无后效性

- 按照加限制条件加维度的思想，加个限制条件：dp[i][j]表示第i行的炮兵布局为j的前提下，前i行所能放的最多炮兵数目

布局为j体现了状态压缩。j是个10位二进制数，表示一行炮兵的一种布局。有炮兵的位置，对应位为1，没有炮兵的位置，对应位为0

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 思路：如果用 dp[i]表示前i行所能放的最多炮兵数目，能否形成递推关系？ 显然不能。因为不满足无后效性

- 按照加限制条件加维度的思想，加个限制条件：dp[i][j]表示第i行的炮兵布局为j的前提下，前i行所能放的最多炮兵数目

布局为j体现了状态压缩。j是个10位二进制数，表示一行炮兵的一种布局。有炮兵的位置，对应位为1，没有炮兵的位置，对应位为0

依然不满足无后效性。因仅从 dp[i-1][k] （k = 0…1023） 无法推出 dp[i][j]。达成 dp[i-1][k]可能有多种方案，有的方案允许第i行布局为j,有的方案不允许第i行布局为j，然而却没有信息可以用来进行分辨。

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 再加限制条件，再加一维：

dp[i][j][k]表示第i行布局为j,第i-1行布局为k时,前i行的最多炮兵数目。

1）j,k这两种布局必须相容。否则 dp[i][j][k] = 0

2）dp[i][j][k] = max{dp[i-1][k][m], m = 0...1023} + Num(j),
Num(j)为布局j中炮兵的数目，j和m必须相容，k和m必须相容。此时满足无后效性

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 再加限制条件，再加一维：

dp[i][j][k]表示第i行布局为j,第i-1行布局为k时,前i行的最多炮兵数目。

1）j,k这两种布局必须相容。否则 dp[i][j][k] = 0

2）dp[i][j][k] = max{dp[i-1][k][m], m = 0...1023} + Num(j),
Num(j)为布局j中炮兵的数目，j和m必须相容，k和m必须相容。此时满足无后效性

3）初始条件：
dp[0][j][0] = Num(j)
dp[1][i][j] = max{dp[0][j][0]} + Num(i)

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 问题：dp数组为：
  int dp[100][1024][1024]，太大，时间复杂度和空间复杂度都太高。

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 问题：dp数组为：
  int dp[100][1024][1024]，太大，时间复杂度和空间复杂度都太高。

  解决：
  每一行里最多能放4个炮兵。就算全是平地，能放炮兵的方案数目也不超过60（用一遍dfs可以全部求出）

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 问题：dp数组为：

  int dp[100][1024][1024]，太大，时间复杂度和空间复杂度都太高。

  解决：

  每一行里最多能放4个炮兵。就算全是平地，能放炮兵的方案数目也不超过60（用一遍dfs可以全部求出）

  算出一行在全平地情况下所有炮兵的排列方案，存入数组 state[70]

  int dp[100][70][70] 足矣

例十二 炮兵阵地(POJ1185)

- 问题：dp数组为：

  int dp[100][1024][1024]，太大，时间复杂度和空间复杂度都太高。

  解决：

  每一行里最多能放4个炮兵。就算全是平地，能放炮兵的方案数目也不超过60（用一遍dfs可以全部求出）

  算出一行在全平地情况下所有炮兵的排列方案，存入数组 state[70]

  int dp[100][70][70] 足矣

  dp[i][j][k]表示第i行布局为state[j],第i-1行布局为state[k]时,前i行的最多炮兵数目。