수치해석
(2019학년도 1학기)

[7주/1차시 학습내용]: Secant Method

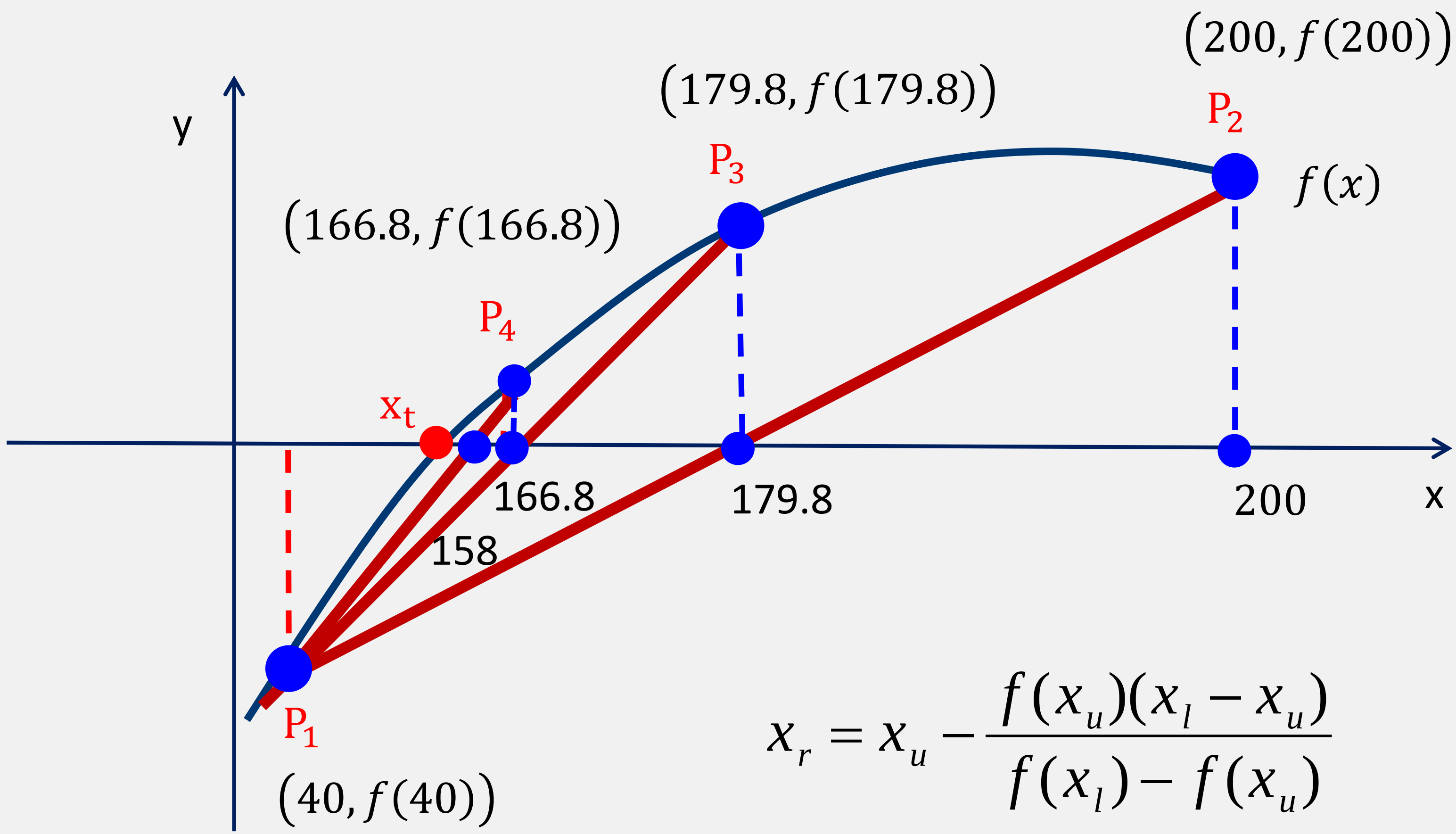
Secant 방법은 미분을 사용하지 않는다. 수치해석은 근사치의 학문이다.

국민대학교 소프트웨어학부

구간법 알고리즘의 특징

- Graphical Method와 증분법의 공통점은 $f(x) = 0$ 을 지나는 **근사근 구간 (estimated root interval)** 을 찾아 준다
- 이분법과 가위치법의 공통점은 $f(x) = 0$ 이 되는 **근사근 (estimated root)**을 찾아 준다
- **Graphical Method, 증분법, 이분법, 가위치법**, 모두의 공통점은 $f(x) = 0$ 을 지나는 근사근을 구하기 위해 구간을 사용한다는 것이다.
- 가위치법은 구간을 상하직선으로 나누는 이분법에 비해 사선으로 구간을 나눈다.
- 다음에 나오는 개방법에서는 사선에서 발전된 미분법이 소개되는 데, 가위치법은 이러한 면에서 구간법에서 미분법을 소개하는 알고리즘에 가깝다고 얘기할 수 있다.

가위치법의 Trial and Error (시행착오)



$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

구간법과 개방법

- 가위치법은 두 점을 지나는 직선으로부터 근사해를 구하는 기법이다
- 가위치법은 **두 점이 있으면 직선을 그을 수 있다**는 해법을 제시했다.
- **두 점을 지나는 직선**은 기울기와 절편을 가지고 있다.
- 두 점에서 한 개의 점이 다른 점에 가까이 붙게 된다고 가정하면, 가까이서 보면 두 개의 점으로 보이지만, 멀리서 보면 하나의 점같이 보이게 된다. 이 점을 접점이라 한다.
- 두 점이 아직 완벽히 붙지 않았음으로, 가까이서 보게 되면 **두 개의 점이 있음으로 직선을 그을 수 있게 되고**, 이 직선은 접점에서의 접선이 되게 된다.
- **접선은 기울기를 가지게 되고, 이 기울기 값이 접점에서의 미분 계수가 된다**

구간법과 개방법

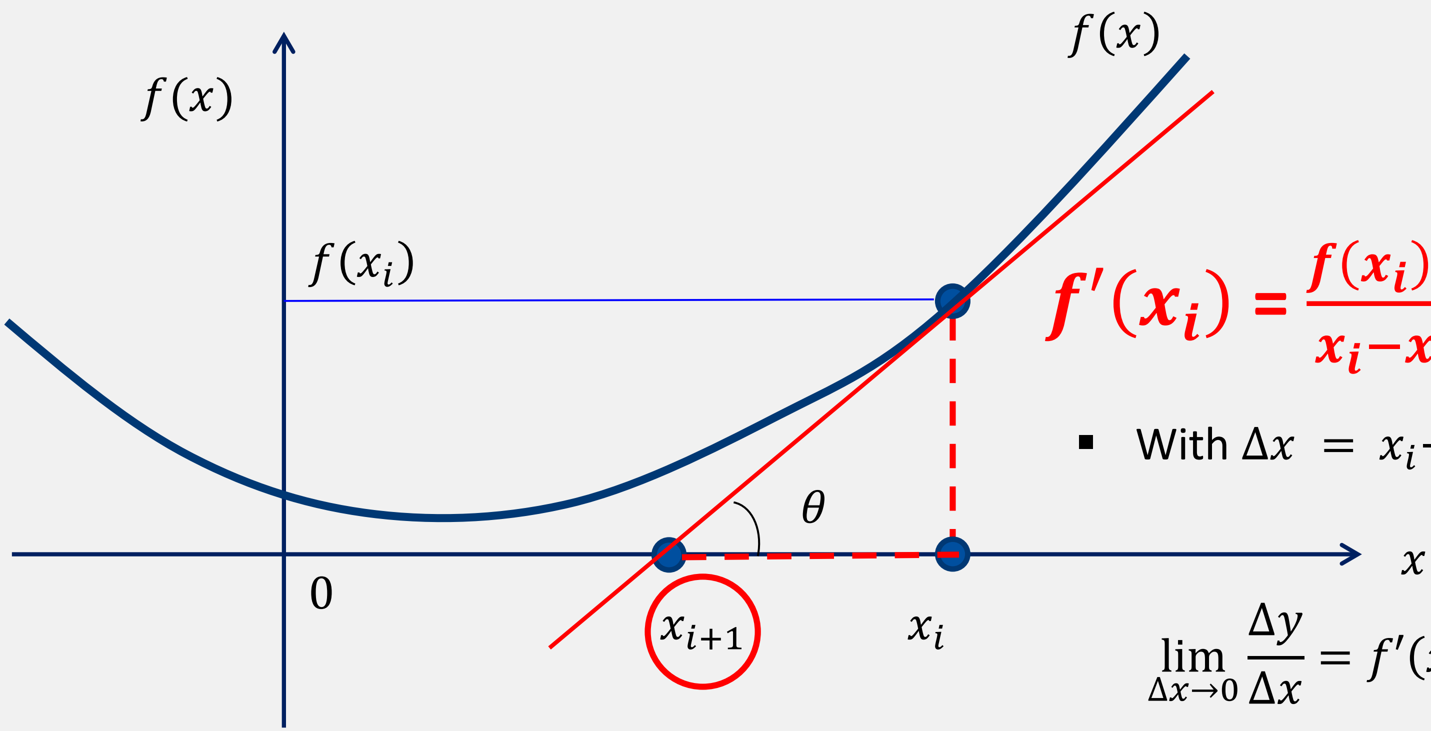
- 가위치법은 두 점을 지나는 직선의 개념을 준 알고리즘으로 역할을 톡톡히 했다.
- Newton-Raphson 방법은 미분법으로 접선의 기울기를 이용함으로 직선을 사용하는 가위치법보다 빠르게 근사해에 접근했다.
- 미분의 위력을 실감하는 방법이 바로 Newton-Raphson 방법이다
- 미분을 사용하면 연산반복횟수를 줄이는 장점이 있다.

root weight= 142.7376189663234
f(root weight, should be zero) = -2.8928707251907326e-07
ea = should be less than 1.0e-4 9.907775669827273e-06
iter = 3

개방법 (Newton-Raphson Algorithm)

- 미분계수 $f'(x_i)$ 는 접점 x_i에서의 접선의 기울기를 충실히 따르는 알고리즘
- 구하고자 하는 것은 x_{i+1}

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

- With $\Delta x = x_i - x_{i+1} \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_i)$$

Problem of Newton-Raphson

- A potential problem in implementing the Newton-Raphson method is **the evaluation of the derivative**.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) - 36$$

$$f'(m) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{mc_d}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) - \frac{gt}{2m} \cdot sech^2\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right)$$

$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) - 36 \qquad f(m) = f_1(m) \cdot f_2(m)$$

$$f'(m) = f_1{}'(m) \cdot f_2(m) + f_1(m) \cdot f_2{}'(m)$$

$$f_1{}'(m) = \sqrt{\frac{g}{c_d}} \cdot \left(m^{\frac{1}{2}}\right)' = \sqrt{\frac{g}{c_d}} \cdot \frac{1}{2} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \qquad f_2{}'(m) = tanh'\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right)'$$

$$f'(m) = \sqrt{\frac{g}{c_d}} \cdot \frac{1}{2} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) + \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \cdot tanh'\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right)'$$

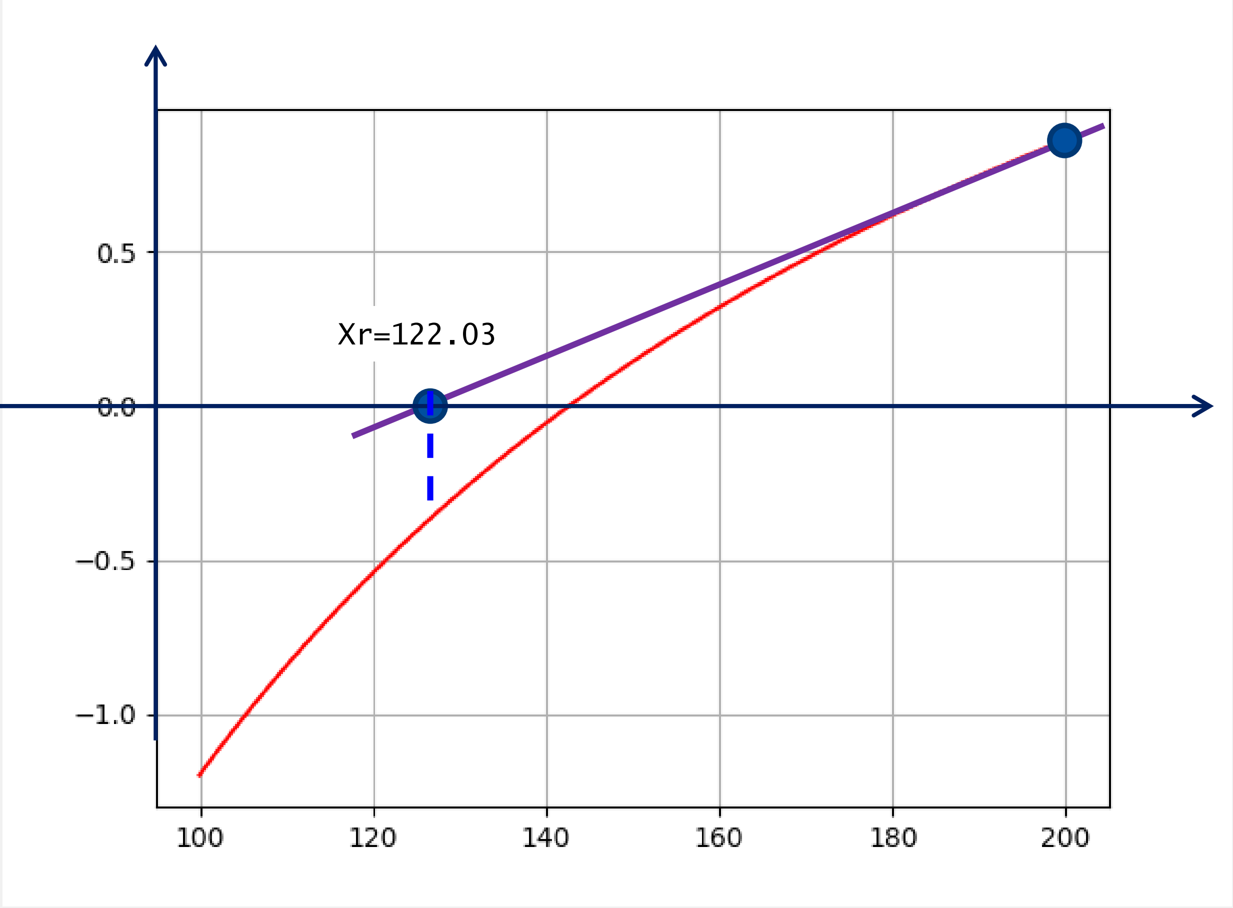
$$y = tanh(x) \Rightarrow y' = sech^2(x)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{c_d}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) + \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \cdot sech^2\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) \cdot \left(\sqrt{gc_d} \cdot t \cdot m^{-\frac{1}{2}}\right)'$$

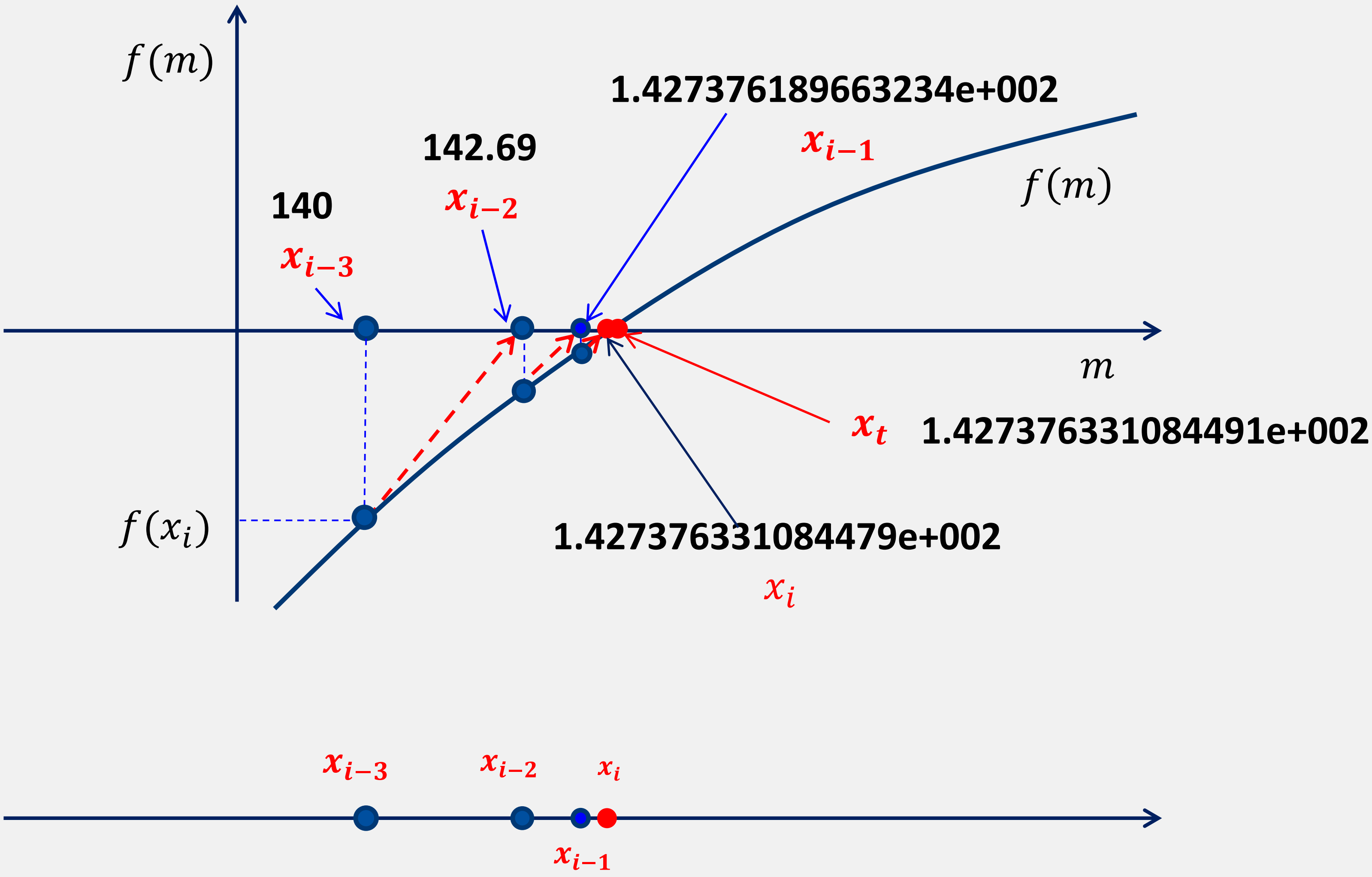
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{c_d}} \cdot m^{-\frac{1}{2}} \cdot tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) + \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \cdot sech^2\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}} \cdot t\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot m^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \sqrt{gc_d} \cdot t\right)$$

200부터 시작할 때 근에 접근하는 순서

- 200의 접점에서 접선을 그으면, 122.03이 새로운 근사 근이 된다.



Analysis of Roots in Newton-Raphson



Secant Method is numerical approach

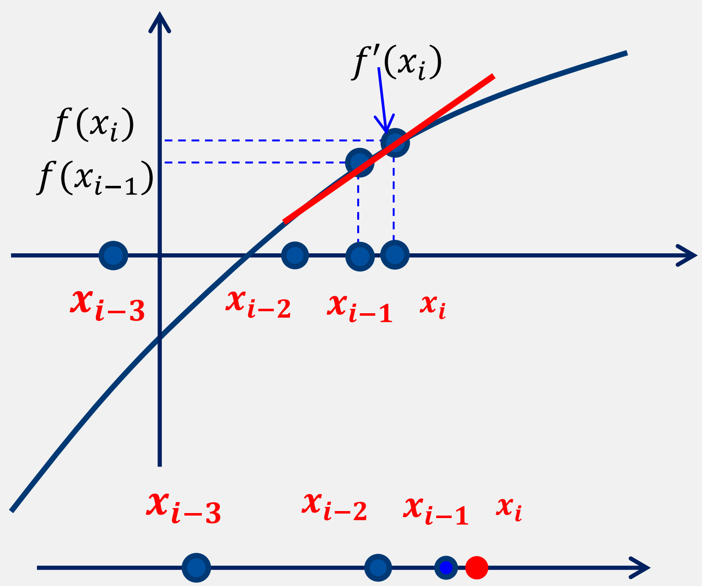
- Newton-Raphson has derivative
- Secant Method does not have derivative

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i-1)-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i-1)-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}}$$



Modified Secant Method

- $no\ value\ of\ f(x_{i-1})$ in modified secant method

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i+\delta x_i)-f(x_i)}{\delta x_i}$$

$$\delta x_i = x_{i-1} - x_i$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i+\delta x_i)-f(x_i)}{\delta x_i}}$$

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i\, f(x_i)}{f(x_i+\delta x_i)-f(x_i)}}$$