수치해석
(2019학년도 1학기)

[13주/14주/15주차 학습내용]: Numerical Integration

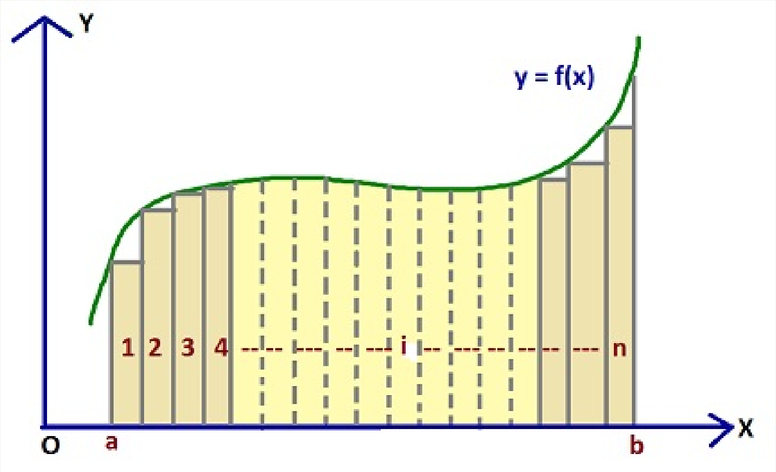
국민대학교 소프트웨어학부

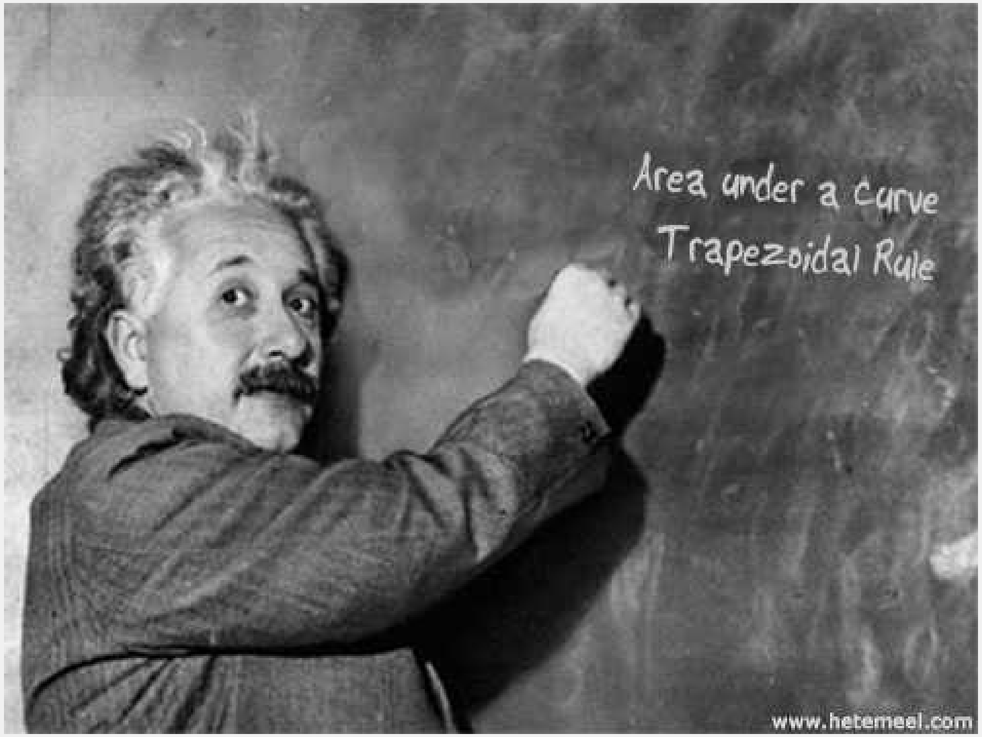
Course 스케줄

- Ch 7: Optimization (최적화)
- Ch 14: Linear Regression (선형 회귀)
- Ch 15: Polynomial Regression (다항 회귀)
- Ch 14: Statistics Review (정규분포와 균등분포)
- Ch 16: Fourier Series (일반 선형 회귀)
- **Ch 17: Polynomial Interpolation (다항식 보간법)**
- **Ch 19, 20, 21: Numerical Integration and Differentiation (수치 적분과 미분)**
  - Ordinary Differential Equation, Newton-Cotes Formulas, The Trapezoidal Rule, Simpson’s Rule, The Composite Trapezoidal Rule

Numerical Integration (수치적분)

- 아인쉬타인과 수치적분





속도, 가속도, 거리의 관계

속도, 가속도, 거리의 미분, 적분 관계

- $F = ma(t) = m\frac{d}{dt} \cdot v(t) = m\frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \cdot x(t) = m\frac{d^2}{dt^2} \cdot x(t)$
- $a(t) = \frac{d}{dt} \cdot v(t), \quad v(t) = \frac{d}{dt} \cdot x(t)$
- 가속도는 속도를 미분한 것, 속도는 거리를 미분한 것이다
- 가속도는 속도의 순간변화율에서 유래했고, 속도는 단위 시간 당 거리의 순간변화율에서 유래함
- 따라서, 아래와 같이 적분 기호로 나타낼 수 있다
- $v(t) = \int a(t)\, dt$
- $x(t) = \int v(t)\ dt$
- 역으로, 속도는 가속도를 시간에 대해 적분하면 구하여 진다
- 역으로, 거리는 속도를 시간에 대해 적분하면 구하여 진다

$x(t) = \int v(t)\ dt$, 거리는 속도를 적분한 값

- 번지 점프 후 1초 경과 후의 속도, $v(t) = 9.6$ m/s 이다. 그러면, 1초 떨어졌을 때의 위치 (거리), $\boldsymbol{x(t)}$ 는 얼마인가?
- $v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t\right)$
- $\boldsymbol{x(t)} = \int_0^t v(t)\,dt = \int_0^t \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t\right) dt$ 공식을 사용하면

$= \sqrt{\frac{\boldsymbol{g \cdot m}}{\boldsymbol{c_d}}} \int_0^t tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot \boldsymbol{t}\right) d\boldsymbol{t}$

$\boldsymbol{\int_0^t tanh(a \cdot x)\, dx = \frac{1}{a} ln\big(cosh(a \cdot x)\big) + c}$ 이용

- $x(t) = \sqrt{\frac{\boldsymbol{g \cdot m}}{\boldsymbol{c_d}}} \cdot \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\frac{\boldsymbol{g \cdot c_d}}{\boldsymbol{m}}}} \left[\boldsymbol{ln}\left(\boldsymbol{cosh}\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot \boldsymbol{t}\right)\right)\right]\Bigg|_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{t}}$ 가 나온다

$x(t) = \int v(t)\ dt$, 거리는 속도를 적분한 값

- $x(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}}} \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) \right] \Big|_0^t$
- $= \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{g \cdot c_d}} \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) \right] \Big|_0^t$
- $= \sqrt{\frac{g \cdot m^2}{g \cdot c_d{}^2}} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) \right] \Big|_0^t$
- $= \frac{m}{c_d} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) \right] \Big|_0^t$
- 으로 유도되고, 계속 계산하면,

$x(t) = \int v(t)\ dt$, 거리는 속도를 적분한 값

- $x(t) = \frac{m}{c_d} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) \right] \Big|_0^t$
- $= \frac{m}{c_d} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) - ln(cosh(0)) \right]$
- $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$
- $= \frac{m}{c_d} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) - ln(1) \right]$
- $ln(1) = 0 \ \ {-}{\rightarrow}\ e^0 = 1,$
- $ln(e^0) = ln(1), 0 = ln(1)$

$x(t) = \int v(t)\ dt$, 거리는 속도를 적분한 값

- 번지 점프 후 1초 경과 후의 속도, $v(t) = 9.6$ m/s 이다. 그러면, 1초 떨어졌을 때의 위치 (거리), $\boldsymbol{x(t)}$ 는 얼마인가?

- $x(t) = \frac{m}{c_d} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) - ln(1) \right]$
- $= \frac{m}{c_d} \cdot \left[ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right) - 0 \right]$
- $= \frac{m}{c_d} \cdot ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right)$

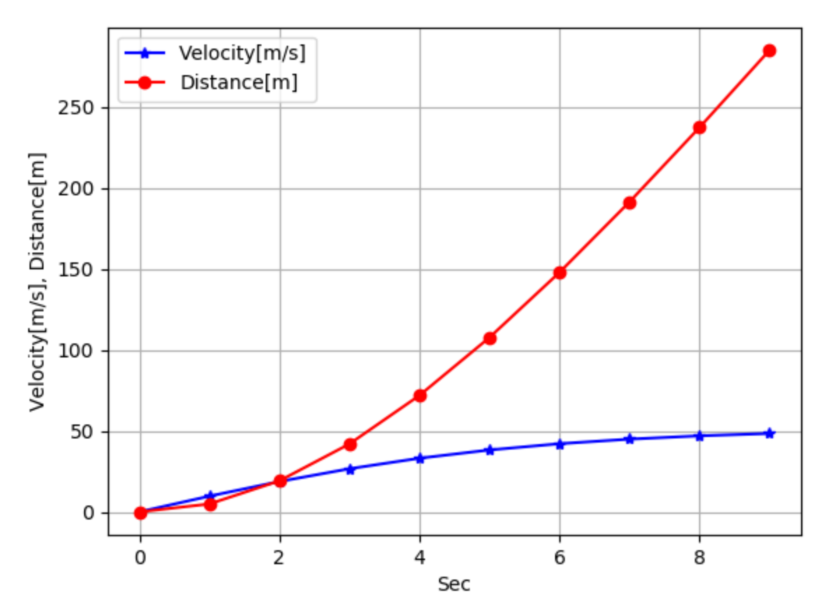
- $v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right)$
- $x(t) = \int_0^t v(t)\, dt = \int_0^t \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) dt$

$$x(t) = \int_0^t v(t)\, dt = \frac{m}{c_d} \cdot ln\left(cosh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t \right) \right)$$

번지 점퍼의 거리와 속도

- 번지 점프 후 매 초 때의 속도, $v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t\right)$ 이다. 그러면,매초 때 마다 떨어진 위치(거리), $\boldsymbol{x(t)}$ 는 얼마인가?

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
t=np.arange(0, 10, 1)
fv= lambda t:
np.sqrt(9.81*68/0.25)*np.tanh(np.sqrt(9.81*0.25/68)*t)
fx= lambda t :
68/0.25*np.log(np.cosh(np.sqrt(9.8*0.25/68)*t))
fv_t=fv(t)
fx_t=fx(t)
plt.figure(104)
vel, =plt.plot(t, fv_t, 'b*-', label='Velocity[m/s]')
dis, =plt.plot(t, fx_t, 'ro-', label='Distance[m]')
plt.legend(handles=[vel, dis])
plt.grid()
plt.xlabel('Sec')
plt.ylabel('Velocity[m/s], Distance[m]')
```



https://github.com/SCKIMOSU/Numerical-Analysis/blob/master/integration_velocity.py

Newton-Cotes Formulas

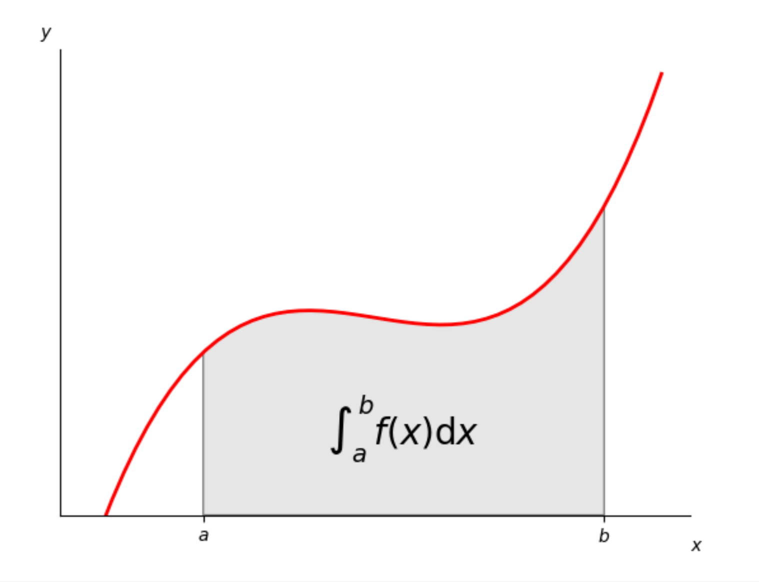
The Trapezoidal Rule

Simpson's Rule

국민대학교 소프트웨어학부

적분 구간 시각화

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Polygon


def func(x):
    return (x - 3) * (x - 5) * (x - 7) + 85


a, b = 2, 9  # integral limits
x = np.linspace(0, 10)
y = func(x)

fig, ax = plt.subplots()
plt.plot(x, y, 'r', linewidth=2)
plt.ylim(ymin=0)
```



https://github.com/SCKIMOSU/Numerical-Analysis/blob/master/integral_demo.py

적분 구간 시각화

- A simple line plot with custom color and line width.
- A shaded region created using a Polygon patch.
- A text label with mathtext rendering.
- figtext calls to label the x- and y-axes.
- Use of axis spines to hide the top and right spines.
- Custom tick placement and labels.

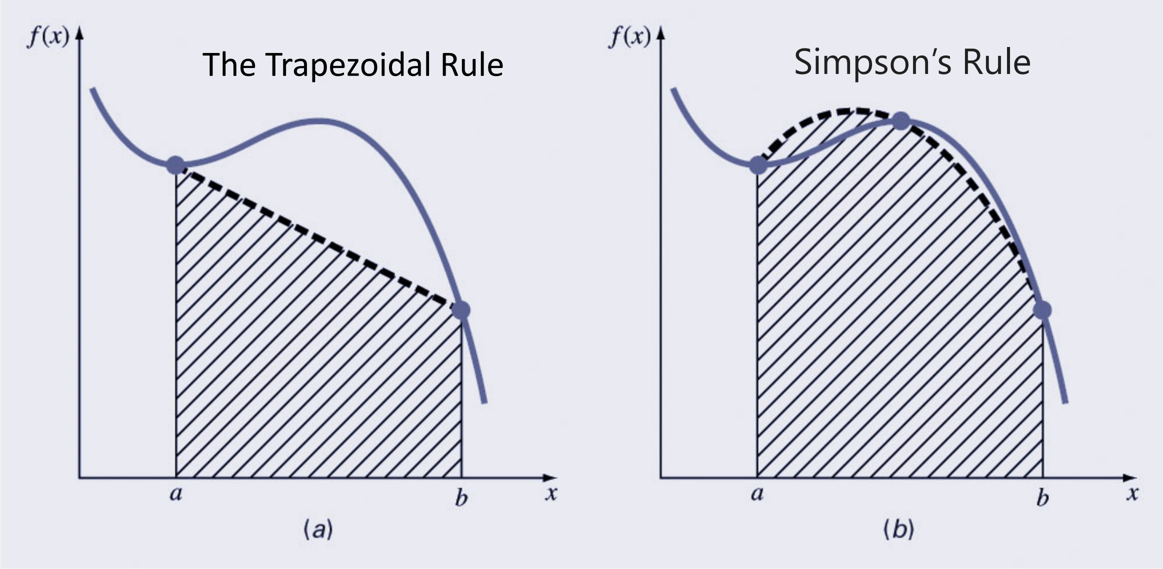
```
# Make the shaded region
ix = np.linspace(a, b)
iy = func(ix)
verts = [(a, 0)] + list(zip(ix, iy)) + [(b, 0)]
poly = Polygon(verts, facecolor='0.9', edgecolor='0.5')
ax.add_patch(poly)

plt.text(0.5 * (a + b), 30, r"$₩int_a^b f(x)₩mathrm{d}x$",
         horizontalalignment='center', fontsize=20)

plt.figtext(0.9, 0.05, '$x$')
plt.figtext(0.1, 0.9, '$y$')

ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')

ax.set_xticks((a, b))
ax.set_xticklabels(('$a$', '$b$'))
ax.set_yticks([])

plt.show()
```

수치 적분의 필요성

- 기존 적분에서 번지 점프 후 매 초 때의 속도, $v(t) = \sqrt{\frac{g \cdot m}{c_d}} tanh\left(\sqrt{\frac{g \cdot c_d}{m}} \cdot t\right)$ 이다.
- 그러면,매초 때 마다 떨어진 위치 (거리), $\boldsymbol{x(t)}$ 는 얼마인가?를 구할 때, $tanh$ 적분, 즉, $\int_0^t tanh(a \cdot x)\, dx = \frac{1}{a} ln\big(cosh(a \cdot$

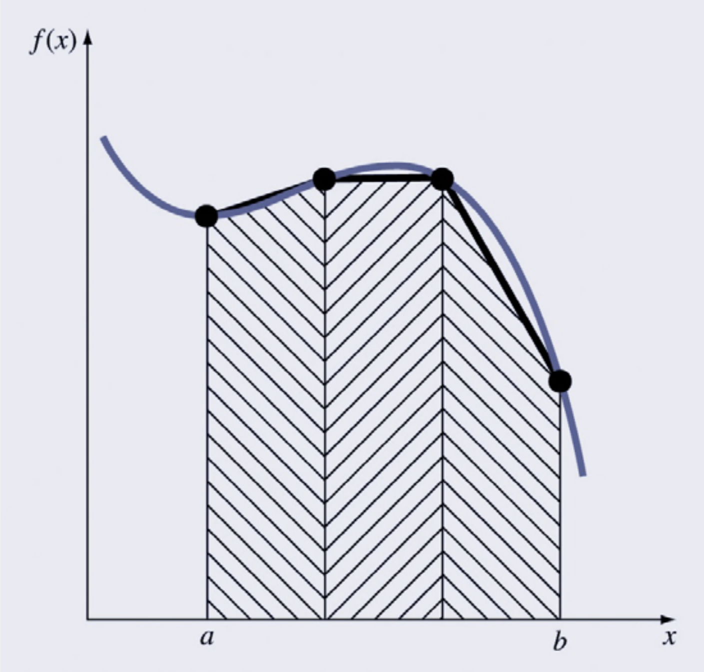
수치 적분: Newton-Cotes Formulas

- $I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$
- $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$
- $f_n(x) = a\ polynomial$
- $f_n(x)$를 직선으로 근사하는 것이 trapezoidal 방법
- $f_n(x)$를 포물선으로 근사하는 것이 Simpson 방법이다



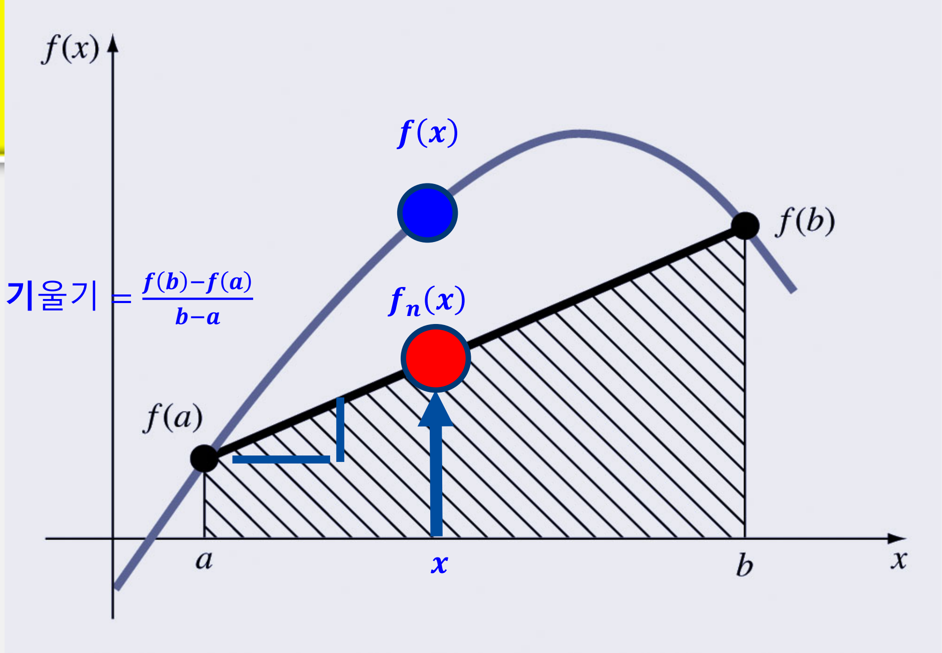
수치 적분: Newton-Cotes Formulas

- 수치 적분은 아래 그림에서 3개의 직선 아래의 면적의 합으로 일반 적분을 대체하는 것이다.
- $\int_0^t$ 의 기호는 summation을 의미한다.



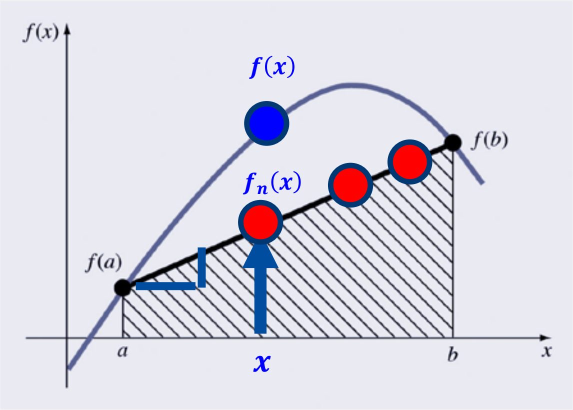
Trapezoidal Rule (사다리꼴 법칙)

- 직선으로 근사화시키는 ***trapezoidal rule*** 방법
- $f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$
- $I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx$
- The result of the integral is
- $I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$



Trapezoidal Rule은 진짜 적분이 아니라, 근사 (가짜) 적분이다.

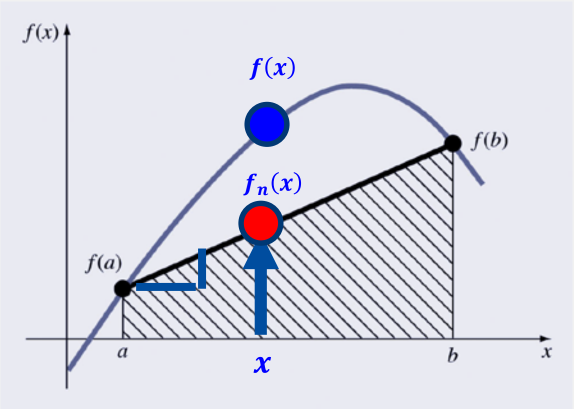
- $f_n(x) = a_0 + a_1 x = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$
- 두 점을 지나는 직선의 방정식 이용
- $I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$
- $I = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right] dx$
- 수치 적분은 $f(x)$에 대해 적분해야 하는 데, $f(x)$ 곡선에 대해 적분하지 않고, $f_n(x)$ 직선에 대해서 적분한다. 그리고, 그 적분 결과를 $f(x)$에 대한 적분 결과라고 하는 근사 (가짜) 적분 개념이다.
- $f(a)$이후 점은 $f(x)$값 대신에 기울기가 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 직선 위의 점들 x 에 대한 $f_n(x)$값을 지속적으로 적분한다



기울기 $= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Trapezoidal Rule (사다리꼴 법칙), 근사 적분

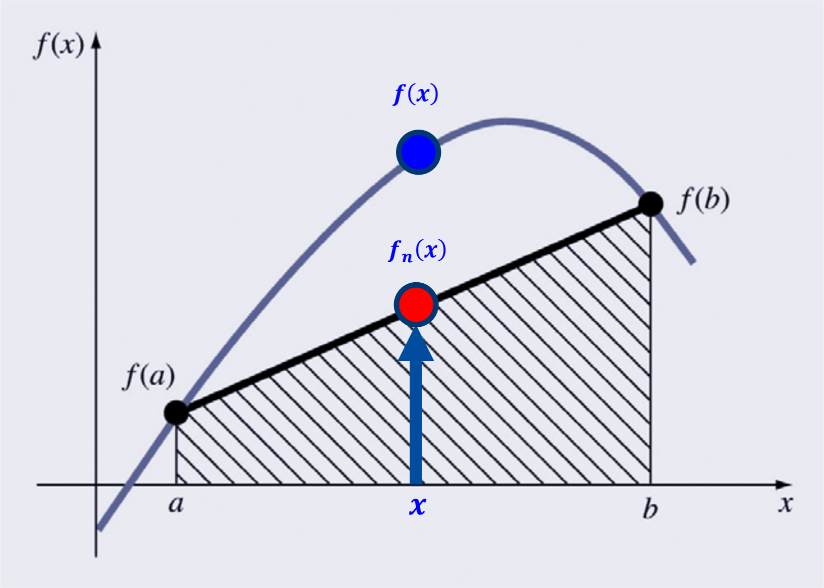
- $I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$
- 그림에서 기울기가 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 인 직선 위의 점들 x 에 대한 $f_n(x)$값의 지속적인 적분, $\int_a^b f_n(x)dx$, 은 밑변이 $(b-a)$이고 높이가 $f(a)$ 또는 $f(b)$가 되는 사다리꼴의 넓이를 구하는 문제와 동일하다.
- 사다리꼴의 밑변은 $(b-a)$로 항상 일정하지만, 높이는 $f(a)$ 에서 $f(b)$로 변화함.
- 높이를 $2 \cdot f(a)$ 또는 $2 \cdot f(b)$ 를 사용하지 않고, 평균적인 높이 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 를 사용한다.
- 그래서, 사다리꼴의 면적은 $(b-a) \cdot \frac{f(a)+f(b)}{2}$ 이 된다.



기울기 $= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Trapezoidal Rule

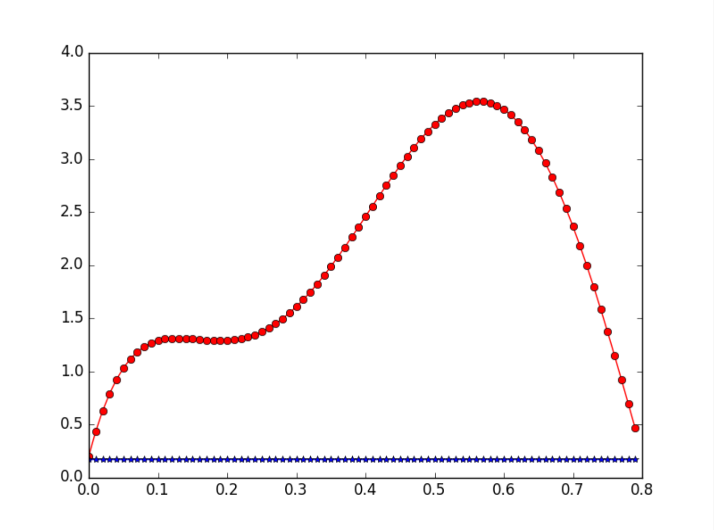
- $I = (b - a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$
- Geometrically, the trapezoidal rule is equivalent to approximating the area of the trapezoidal under the straight line connecting $f(a)$ and $f(b)$
- $I = width \times average\ height$
- The average height is the average of the function values at the end points

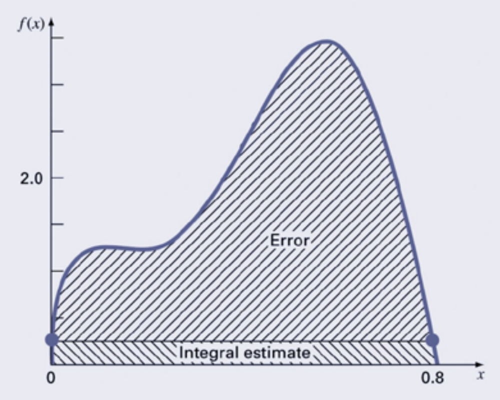


Error (진짜 적분과 가짜 적분의 차이) in the Trapezoidal Rule

- scipy.integrate as ig

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as ig
x=np.arange(0, 0.8, 0.01)
f= lambda x: 0.2+25*x-200*x**2+675*x**3-
900*x**4+400*x**5
sol = ig.quad(f, 0, 0.8)
re=np.real(sol)
real=re[0]
plt.figure(1)
plt.plot(x, f(x), 'ro-')
I=(0.8-0)*(f(0.8)+f(0))/2
trap=np.ones(80)*(f(0.8)+f(0))/2
plt.plot(x, trap, 'b*-')
error=(real-I)/real*100
# 89.46684005201422
```





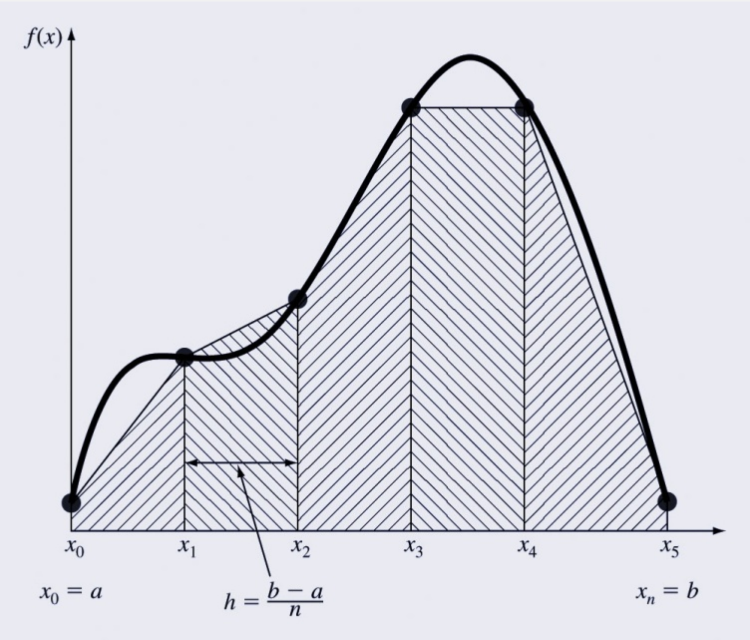
https://github.com/SCKIMOSU/Numerical-Analysis/blob/master/trapezoid.py

The Composite Trapezoidal Rule

The Composite Trapezoidal Rule

- One way to improve the accuracy of the trapezoidal rule is to divide the integration interval from a to b **into a number of segments** and apply the method to each segment
- a 에서 b 사이의 적분 구간을 여러 개의 세그먼트로 나눈다
- The areas of individual segments can be added to yield the integral for the entire interval.
- The resulting equations are called **composite**, or multiple-segment, integration formula.

The Composite Trapezoidal Rule

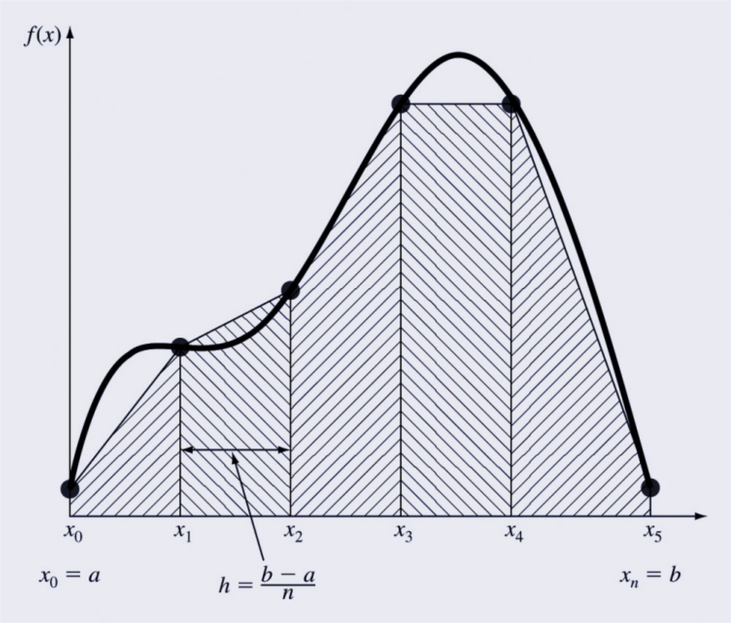


- The general format of **composite integral**
- There are equally spaced points, $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$
- $h = \frac{b-a}{n}$, a에서 b 구간을 n구간으로 나눔
- $I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$
- Substituting the trapezoidal rule for each integral yields
- $I = h \cdot \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h \cdot \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$

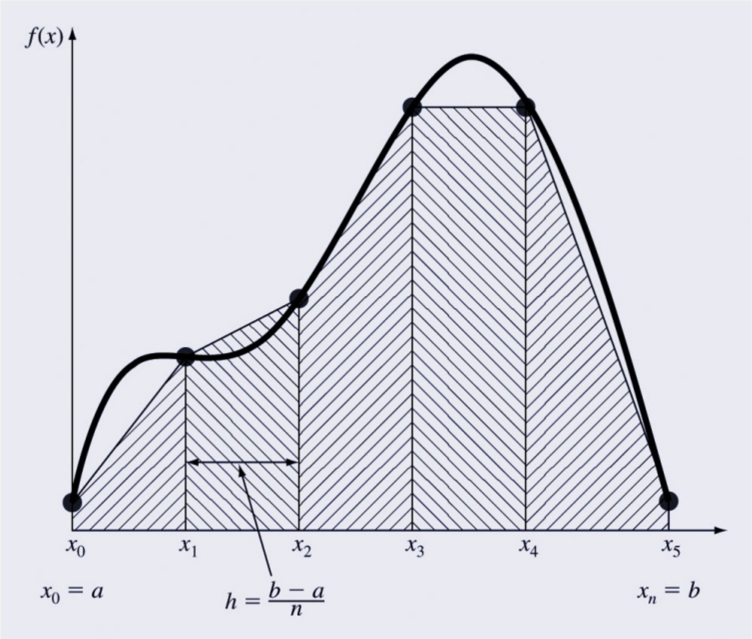
The Composite Trapezoidal Rule

- $I = h \cdot \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h \cdot \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$
- $I = \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_n)]$
- $I = \frac{h}{2} \cdot [f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

- $\therefore I = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$



The Composite Trapezoidal Rule



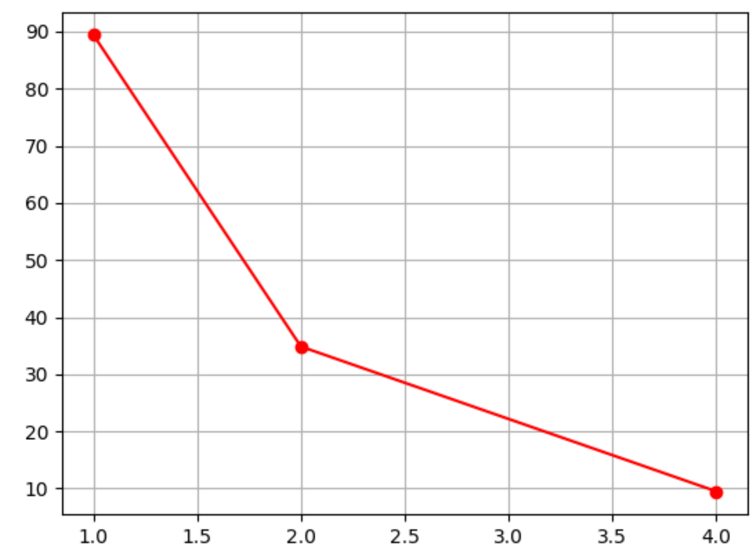
$$I = \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$I = \underbrace{(b-a)}_{\text{Width}} \underbrace{\frac{\left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]}{2 \cdot n}}_{\text{Average Height}}$$

Segments = 2, 4 in The Composite Trapezoidal Rule

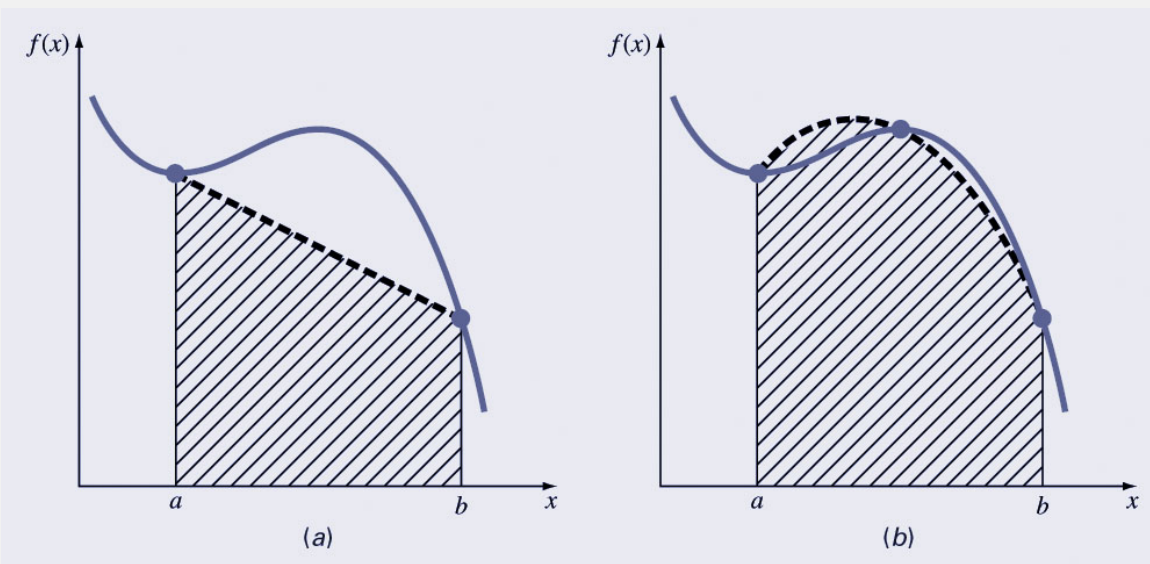
```python
#  n=2 segments
I1=(0.8-0)*(f(0)+2*f(0.4)+f(0.8))/(2*2)
# I1=1.0688000000000115
error1=(real-I1)/real*100
# 34.850455136540162 %
#  n=4 segments
I2=(0.8-0)*(f(0)+2*(f(0.2)+f(0.4)+f(0.6))+f(0.8))/(4*2)
# I2= 1.484800000000001
error2=(real-I2)/real*100
# error2= 9.4928478543561035

n=np.array([1, 2, 4])
e=np.array([error, error1, error2])
plt.figure(105)
plt.plot(n, e, 'ro-')
plt.grid()
```

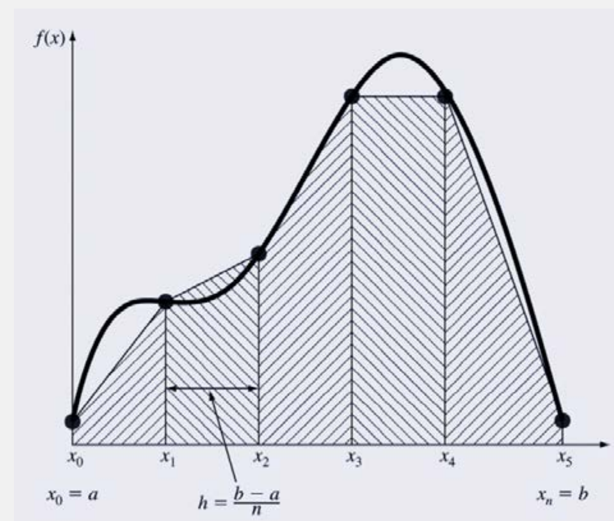


Simpson's Rules

Simpson's Rules

- **The Trapezoidal Rule**
- $I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$
- $I = h \cdot \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h \cdot \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$





The Trapezoidal Rule

Simpson's Rule

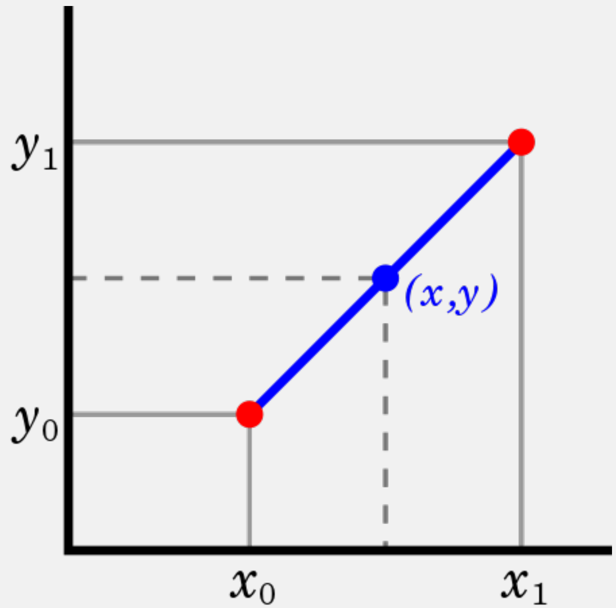
The Trapezoidal Rule

Linear Interpolation (선형 보간법)

Simpson's Rule은 Second-order Lagrange Interpolating Polynomials을 사용한다

선형 보간법(내삽법)

- 선형 보간법(線型補間法, linear interpolation)은 끝점의 값이 주어졌을 때 **그 사이에 위치한 값을 추정하기 위하여** 직선 거리에 따라 선형적으로 계산하는 방법이다
- 두 빨강색 점 사이에 있는 파랑색 점의 위치를 추정하기 위하여 선형 보간법을 사용할 수 있다



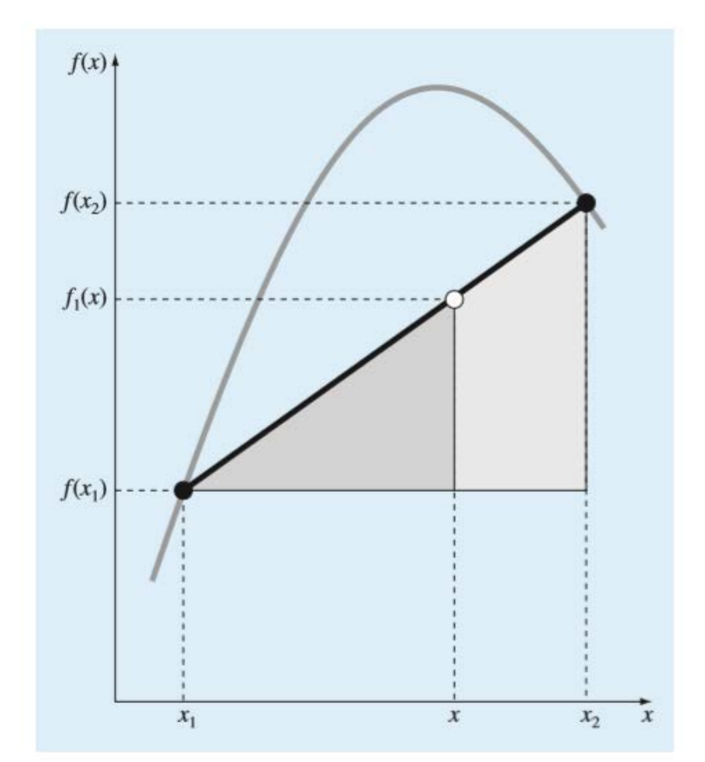
Newton linear-interpolation formula

- 두 끝점 $(x_1, f(x_1))$와 $(x_2, f(x_2))$가 주어졌을 때, **그 사이에 위치한 $(x, f_1(x))$의 값을 추정**하기 위해 두 점 사이에 직선을 긋고 다음과 같은 비례식을 구성할 수 있다.

- $\frac{f_1(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f_1(x)}{x_2 - x_1}$

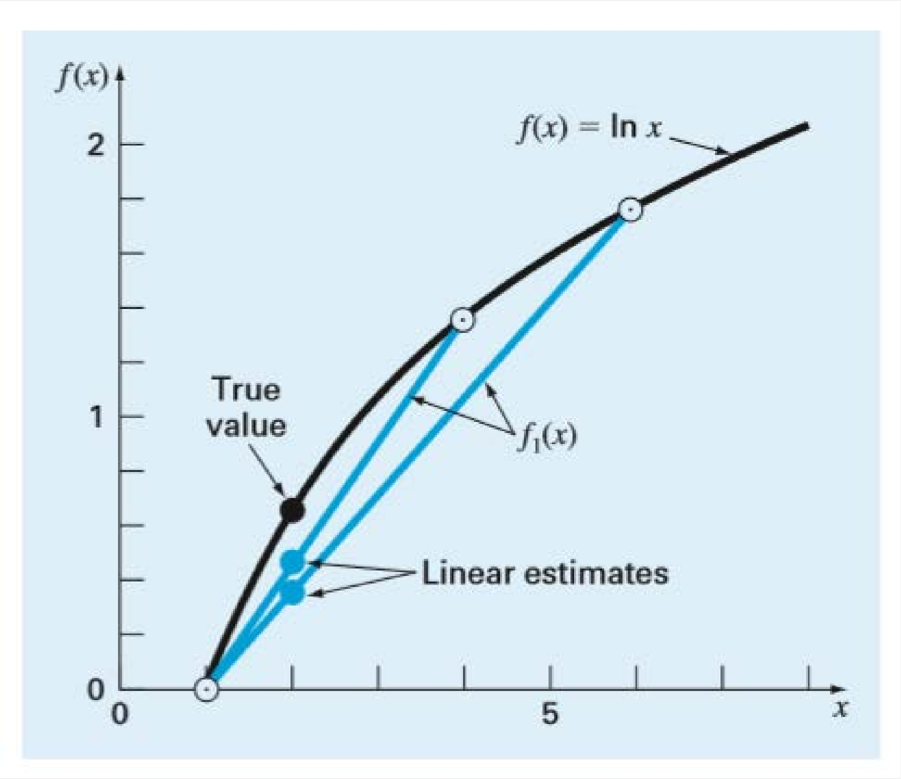
- 위 식은 아래와 같이 전개된다.

- $f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f_1(x)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$



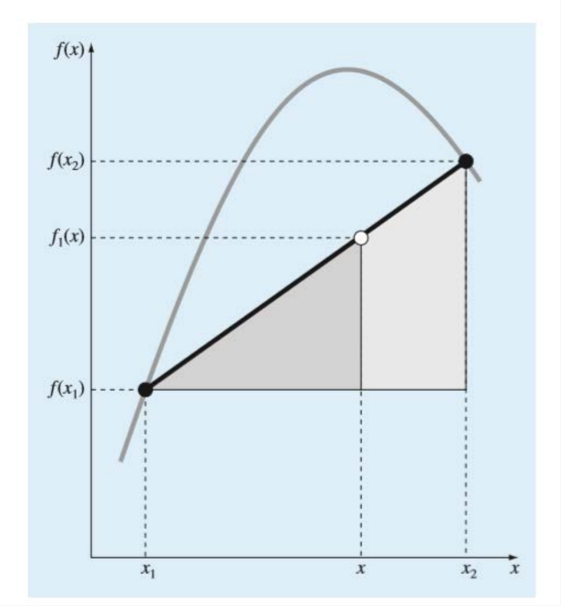
Newton linear-interpolation formula

- 데이터 포인트 사이의 간격이 작을수록 근사가 좋다.
- 간격이 감소함에 따라 연속 함수가 직선에 의해 더 잘 근사화 된다



Lagrange Interpolation

- 선형 보간 다항식을 직선으로 연결하는 두 값의 가중 평균으로 만든다.
- $f_1(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f_1(x)}{x_2-x_1}(x - x_1)$

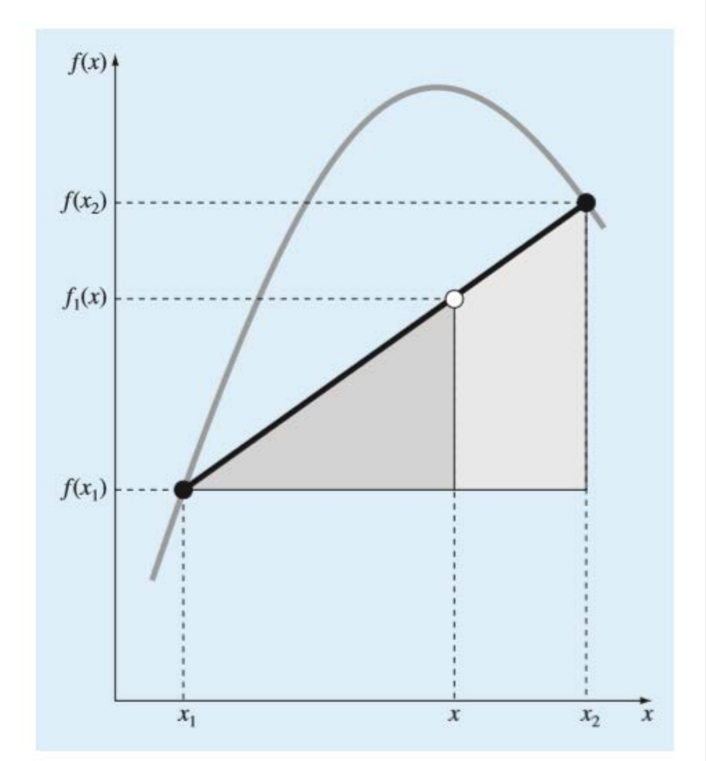


- $f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$
- $L_1 = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}$, $L_2 = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

- L은 가중 계수, weighting coefficient
- L_1 은 $x = x_1$에서 $L_1 = 1$을 만들고, $x = x_2$에서 $L_1 = 0$을 만든다
- L_2 은 $x = x_2$에서 $L_2 = 1$을 만들고, $x = x_1$에서 $L_2 = 0$을 만든다

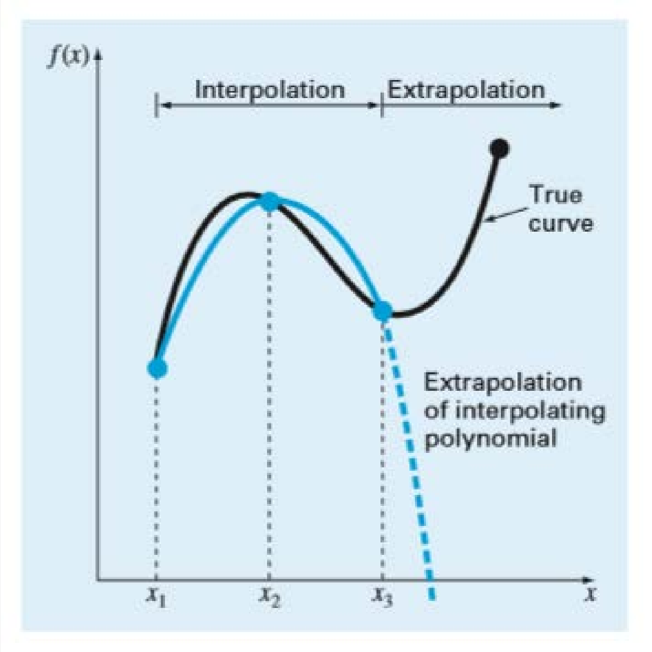
Linear Lagrange Interpolating Polynomials

- $f(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$
- $L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2},\ L_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
- $f(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$
- $f(x)$ 가 직선이 된다는 검증
- $x = x_1$에서 $L_1 = 1$이 되고, $L_2 = 0$ 이 되어, $f(x) = f(x_1)$ 이 된다.
- $x = x_2$에서 $L_2 = 1$이 되고, $L_1 = 0$ 이 되어, $f(x) = f(x_2)$ 이 된다.



Second-order Lagrange Interpolating Polynomials

- Second-order Lagrange Interpolating Polynomials는 3개의 점을 지나는 포물선을 만들 수 있다. $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$
- 보간법에서 3개의 점 안에서 예측하는 것: 내삽법 (interpolation)
- 보간법에서 3개의 점 밖에서 예측하는 것: 외삽법(extrapolation)



Second-order Lagrange Interpolating Polynomials

- 동일한 전략을 사용하여 3 개점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ 을 지나는 포물선을 다음과 같이 만들 수 있다.
- $f_2(x) = \boldsymbol{L_1} f(x_1) + \boldsymbol{L_2} f(x_2) + \boldsymbol{L_3} f(x_3)$
- $f_2(x) = \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}}}_{\boldsymbol{L_1}} f(x_1) + \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}}}_{\boldsymbol{L_2}} f(x_2) + \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}}}_{\boldsymbol{L_3}} f(x_3)$
- L_1 은 $x = x_1$에서 $L_1 = 1$을 만든다. 즉, $x = x_1$이면, $f_2(x) = f(x_1)$ 이다. 포물선은 $x = x_1$에서 $(x_1, f(x_1))$ 점을 지난다. $x = x_2$ 또는 $x = x_3$에서 $L_1 = 0$ 이다.
- L_2 은 $x = x_2$에서 $L_2 = 1$을 만든다. 즉, $x = x_2$이면, $f_2(x) = f(x_2)$ 이다. 포물선은 $x = x_2$에서 $(x_2, f(x_2))$ 점을 지난다. $x = x_1$ 또는 $x = x_3$에서 $L_2 = 0$ 이다.
- L_3 은 $x = x_3$에서 $L_3 = 1$을 만든다. 즉, $x = x_3$이면, $f_3(x) = f(x_3)$ 이다. 포물선은 $x = x_3$에서 $(x_3, f(x_3))$ 점을 지난다. $x = x_1$ 또는 $x = x_2$에서 $L_3 = 0$이다.

Derivation of Simpson's 1/3 Rule

Use higher-order polynomial

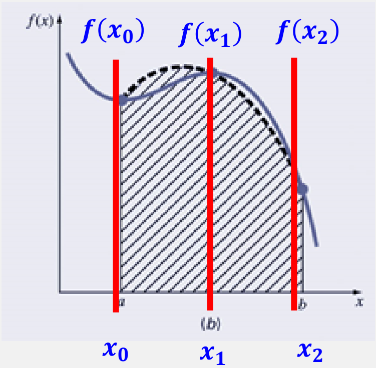
Simpson's Rules use Polynomial (다항)

$$f_2(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

- Use higher-order polynomial to connect the points
- **Second-order Lagrange Interpolating Polynomials**

$$\boxed{I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$



$$\boxed{f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2}$$ • Polynomial

$$I = h \cdot \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h \cdot \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h \cdot \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

Trapezoidal

(x_1, x_2) Polynomial 조합 | (x_0, x_2) Polynomial 조합 | (x_0, x_1) Polynomial 조합

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\underbrace{\boxed{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}}}_{L_1} f(x_0) + \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}}}_{L_2} f(x_1) + \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}}_{L_3} f(x_2) \right] dx$$

➨ Second Order Polynomial : Numerator

$$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$$
$$(x-x_0)(x-x_2) = x^2 - (x_0+x_2)x + x_0x_2$$
$$(x-x_0)(x-x_1) = x^2 - (x_0+x_1)x + x_0x_1$$

➨ Constant including $f(x_0), f(x_1), f(x_2)$

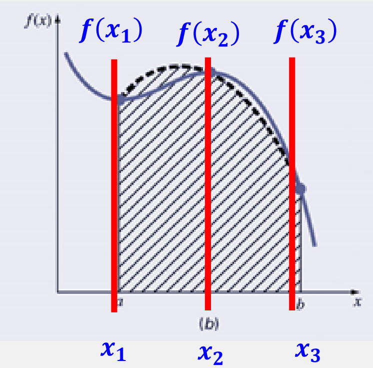
$$(x_0-x_1)(x_0-x_2) = x_0^2 - (x_1+x_2)x_0 + x_1x_2$$
$$(x_1-x_1)(x_1-x_2) = x_1^2 - (x_1+x_2)x_1 + x_1x_2$$
$$(x_2-x_1)(x_2-x_2) = x_2^2 - (x_1+x_2)x_2 + x_1x_2$$

Simpson's Rules 알고리즘

- Simpson's Rules은 2차항 라그랑지 보간법을 사용한다.
- 그림에는 적분 구간과 포물선 구간이 있다.
- 적분 구간의 적분을 포물선 구간의 적분으로 대체하고자 하는 것이다.
- 이 때, 포물선이 있다고 가정하면, 이 포물선은 2차항 라그랑지 공식으로 모델링이 되고, 특이하게, 이 포물선 위의 세 개의 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ 는 동시에 적분 곡선 위의 점이기도 하다.
- 포물선 위의 세 개의 점은 적분 곡선 위의 점이다.

$$f_2(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2) + L_3 f(x_3)$$

$$f_2(x) = \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}}}_{L_1} f(x_1) + \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}}}_{L_2} f(x_2) + \underbrace{\boxed{\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}}}_{L_3} f(x_3)$$



Simpson's 1/3 Rule 수치적분 과정

- 세 개의 점을 선택한다

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b a_0 + a_1x + a_2x^2 dx$$

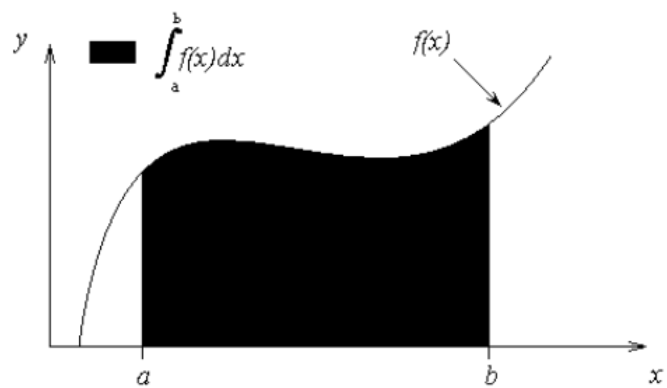
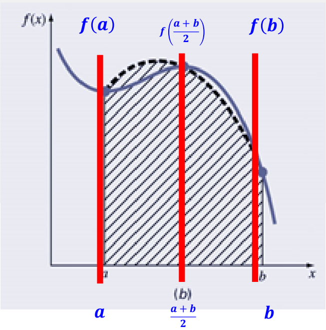


Figure 1 Integration of a function

2차 방정식 (2차항 라그랑지 보간법)의 그래프 모양은 a_2 값, a_1 값, a_0 값에 의해 결정된다.



Method 1:
Hence

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

where $f_2(x)$ is a second order polynomial given by

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Choose

$$(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \text{ and } (b, f(b))$$

Simpson's 1/3 Rule 수치적분 과정

- 세 개의 다항식을 만들어 2차 방정식 (2차항 라그랑지 보간법)의 미지수인 a_2 값, a_1 값, a_0 값을 유도해 낸다.

as the three points of the function to evaluate a_0, a_1 and a_2.

$$f(a)=f_2(a)=a_0+a_1a+a_2a^2$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f_2\left(\frac{a+b}{2}\right)=a_0+a_1\left(\frac{a+b}{2}\right)+a_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$f(b)=f_2(b)=a_0+a_1b+a_2b^2$$

Solving the above three equations for unknowns, a_0, a_1 and a_2 give

$$a_0=\frac{a^2f(b)+abf(b)-4abf\left(\frac{a+b}{2}\right)+abf(a)+b^2f(a)}{a^2-2ab+b^2}$$

$$a_1=-\frac{af(a)-4af\left(\frac{a+b}{2}\right)+3af(b)+3bf(a)-4bf\left(\frac{a+b}{2}\right)+bf(b)}{a^2-2ab+b^2}$$

$$a_2=\frac{2\left(f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}{a^2-2ab+b^2}$$

- 2차 방정식의 그래프 모양은 a_2 값, a_1 값, a_0 값에 의해 그래프 모양이 결정된다.
- 그래서, 2차 방정식을 결정하기 위해 a_2, a_1, a_0의 값을 구해야 한다.

Simpson's 1/3 Rule 수치적분 과정

- a_2 값, a_1 값, a_0 값을 유도해 낸 후, 실제 2차 방정식 (2차항 라그랑지 보간법)을 이용해서 적분까지 한다.

Simpson's 1/3 Rule에서 a_2, a_1, a_0의 값을 구하는 과정이 쉽지 않다.

구한 a_2, a_1, a_0의 값을 $\int_a^b a_0 + a_1x + a_2x^2 dx$ 에 넣고 적분하고 정리하면, $\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$가 된다.

Then

$$I \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

$$= \int_a^b \left(a_0 + a_1x + a_2x^2\right)dx$$

$$= \left[a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

$$= a_0(b-a) + a_1\frac{b^2-a^2}{2} + a_2\frac{b^3-a^3}{3}$$

$$a_0 = \frac{a^2f(b) + abf(b) - 4abf\left(\frac{a+b}{2}\right) + abf(a) + b^2f(a)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_1 = -\frac{af(a) - 4af\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3af(b) + 3bf(a) - 4bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + bf(b)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

$$a_2 = \frac{2\left(f(a) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}{a^2 - 2ab + b^2}$$

Substituting values of a_0, a_1 and a_2 give

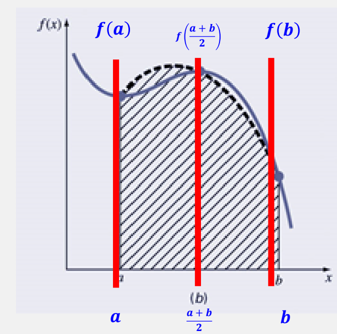
$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Simpson's 1/3 Rule 수치적분 과정

- 구한 a_2, a_1, a_0의 값을 $\int_a^b a_0 + a_1 x + a_2 x^2 dx$ 에 넣고 적분하고 정리하면, $\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$가 된다

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b a_0 + a_1 x + a_2 x^2 dx$$

$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$



Since for Simpson 1/3 rule, the interval $[a,b]$ is broken into 2 segments, the segment width

$$h = \frac{b-a}{2}$$

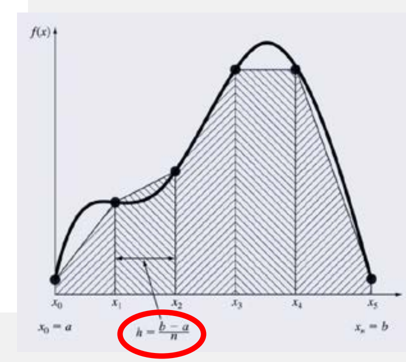
$$\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
$$= \frac{b-a}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
$$= h\cdot\frac{1}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$
$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$I = \frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

Hence the Simpson's 1/3 rule is given by

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Since the above form has 1/3 in its formula, it is called Simpson's 1/3 rule.

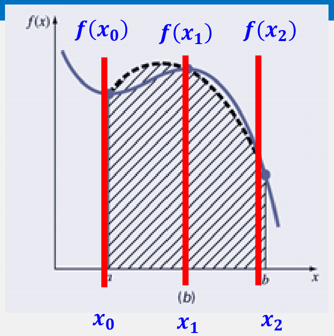


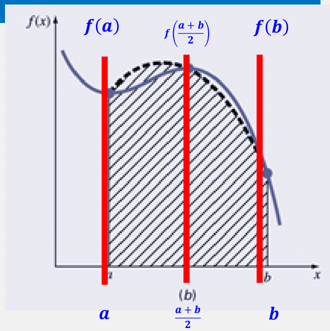
Simpson's 1/3 Rule 수치적분 과정

- 분모에 3이 있어 1/3 규칙이라 한다

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx$$

Summary of using higher-order polynomial to connect the points





$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

$$I = (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} \qquad a = x_0, \quad b = x_2, \quad \frac{a+b}{2} = x_1$$

$$I = \frac{(b-a)}{2} \cdot \frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{3} \qquad h = \frac{b-a}{2}$$

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right], h = \frac{b-a}{2}$$

$$I = h \cdot \frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{3}$$

$$I = \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

- 분모에 3이 있어서 1/3 규칙이라고 부른다.

Simpson's 1/3 Rule 유도 (Derivation)

Use Area and the form of $\boldsymbol{y_0 + 4y_1 + y_2}$

Trapezoidal 의 기저 생각

- Trapezoidal 방법을 다시 생각해 보면, 곡선 부분을 직선으로 근사화 한 후, 직선의 기울기와 절편을 구해서 **사다리꼴** 면적을 구하는 것이 아니라, 밑변 곱하기 평균 높이로 **직사각형** 면적을 쉽게 구했다.
- 즉, 기울기 $\boldsymbol{a}$ 와 절편 $\boldsymbol{b}$ 을 구해서 $\boldsymbol{f_n(x) = b + ax}$ 의 직선 형태로 적분을 시도하는 것이 아니라, 밑변 $\boldsymbol{(y - x)}$ 곱하기 평균 높이 $\boldsymbol{((f(x) + f(y))/2)}$로 직사각형의 면적을 구하였다.
- 어차피, 직선으로 근사화할 때, 원래 곡선 적분에 대한 에러는 발생하기 때문에, $\boldsymbol{f_n(x) = b + ax}$ 의 형태에서 적분을 시도하지 않고, 밑변 곱하기 평균 높이로 직사각형의 면적을 구하였다.
- Composite Trapezoidal 에서는 여러 개의 직선이 발생되고, 각 $\boldsymbol{f_n(x) = b + ax}$ 형태에서 즉, 각 직선에서 서로 다른 기울기 $\boldsymbol{a}$ 와 절편 $\boldsymbol{b}$ 를 구해야 하는 번거로움이 있으니, 이왕 직선으로 쉽게 한 것, 밑변 곱하기 평균 높이로 직사각형의 면적을 구한다.

Trapezoidal 의 기저 생각

- 어려운 값, 기울기 $\boldsymbol{a}$ 와 절편 $\boldsymbol{b}$ 을 계산하지 않고, 원래, 알고 있는 값 , $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{f(y)}$ 값을 이용하자는 것이다.
- 알고 있다는 것은 원래 곡선이 $\boldsymbol{f(t) = tanh(t) \cdot cosh(t)}$ 이라면, 이 곡선 $\boldsymbol{f(t)}$에 $\boldsymbol{x}$ 값과 $\boldsymbol{y}$ 값을 넣으면 당장에 쓸 수 있는 값이 나온다는 것이다.
- 여기서 $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{f(y)}$ 값은 원래 곡선 $\boldsymbol{f(t) = tanh(t) \cdot cosh(t)}$ 위의 점이면서, 또한 직선 $\boldsymbol{f_n(x) = b + ax}$ 위의 점이기도 한 것이 중요하다.

Simpson’s 1/3 Rule 의 기저 생각

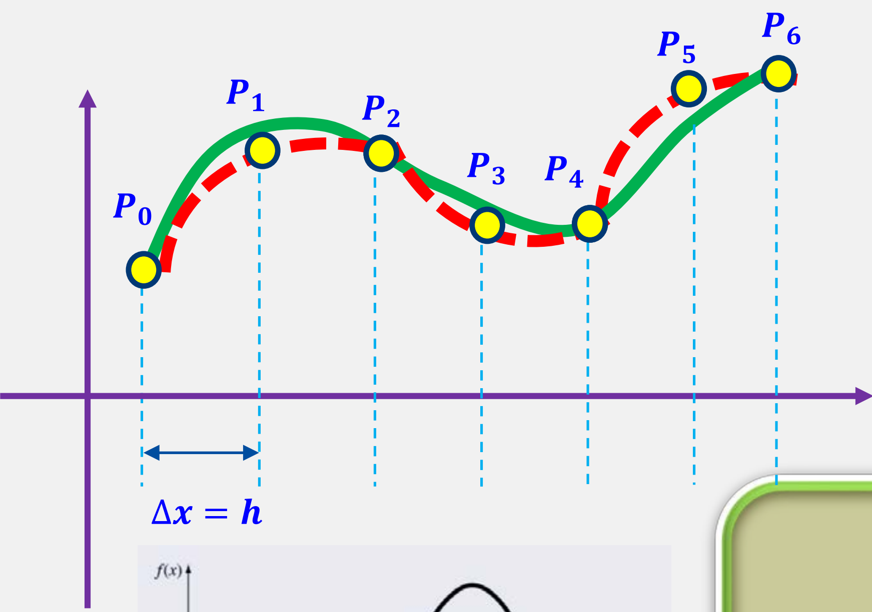
- Simpson’s 1/3 Rule 방법에서는 포물선으로(직선이 아님)으로 근사화한 후, 포물선, $f_n(x) = ax^2 + bx + c$ 의 **계수** , a, b, c 를 구해야 하는 데 이 과정이 어렵다. (직선의 기울기와 절편이 아님)
- Simpson’s 1/3 Rule 은 어려운 값, $ax^2 + bx + c$ 의 **계수** , a, b, c 을 계산하지 않고, 원래, 알고 있는 값 , $f(x)$, $f(y)$, $f((x +$

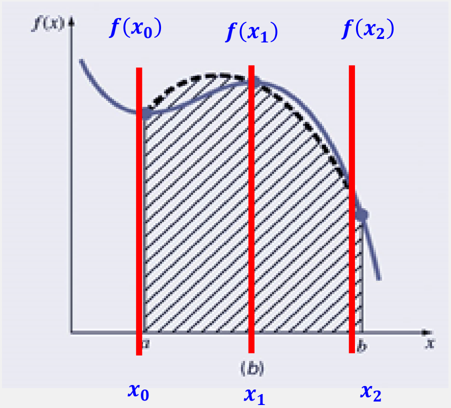
Simpson's 1/3 Rule 의 기저 생각

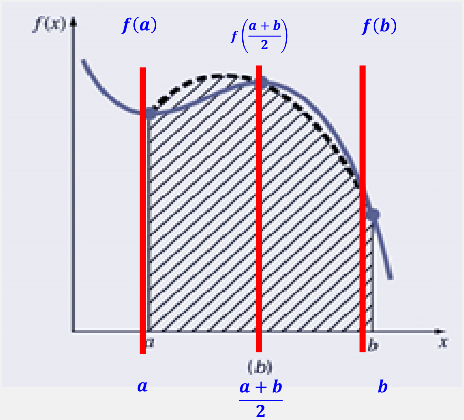
- 즉, Trapezoidal 방법에서 기울기 $\boldsymbol{a}$ 와 절편 $\boldsymbol{b}$ 을 구해서 $\boldsymbol{f_n(x) = ax + b}$ 형태에서 적분을 시도하는 것이 아니라, 밑변 $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ 곱하기 평균 높이($(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}))/2$)로 직사각형의 면적을 구하였다
- Simpson's 1/3 Rule 방법에서도, 다양한 $\boldsymbol{f_n(x) = ax^2 + bx + c}$ 의 다른 값 **계수** , $\boldsymbol{a, b, c}$ 을 계산하지 않고 $\boldsymbol{y_0 + 4y_1 + y_2}$ 의 형태로 알고 있는 값 , $\boldsymbol{f(x) = y_0, f(y) = y_2, f((x+y)/2) = y_1}$ 값을 이용하자는 것이다.
- 여기서 $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{f(y)}$, $\boldsymbol{f((x+y)/2)}$ 값은 원래 곡선 $\boldsymbol{f(t) = tanh(t) \cdot cosh(t)}$ 위의 점 $\boldsymbol{y_0}$, $\boldsymbol{y_2}$, $\boldsymbol{y_1}$이면서, 또한 포물선 $\boldsymbol{f_n(x) = ax^2 + bx + c}$ 위의 점이기도 한 것이 중요하다.

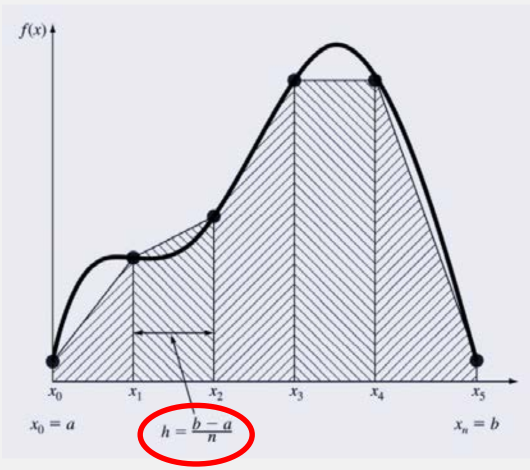
Derivation of Simpson's 1/3 rule using Three Parabolas

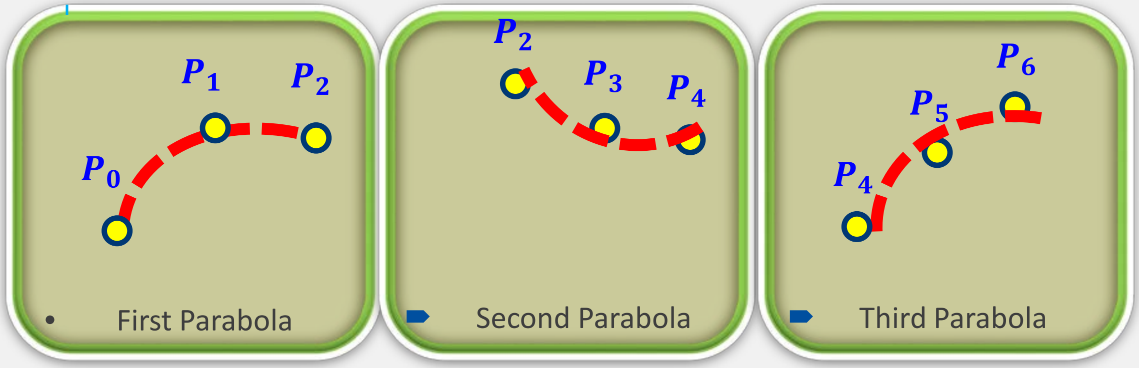
- 세 개의 포물선을 이용한 Simpson's 1/3 규칙 유도







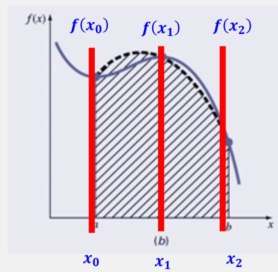


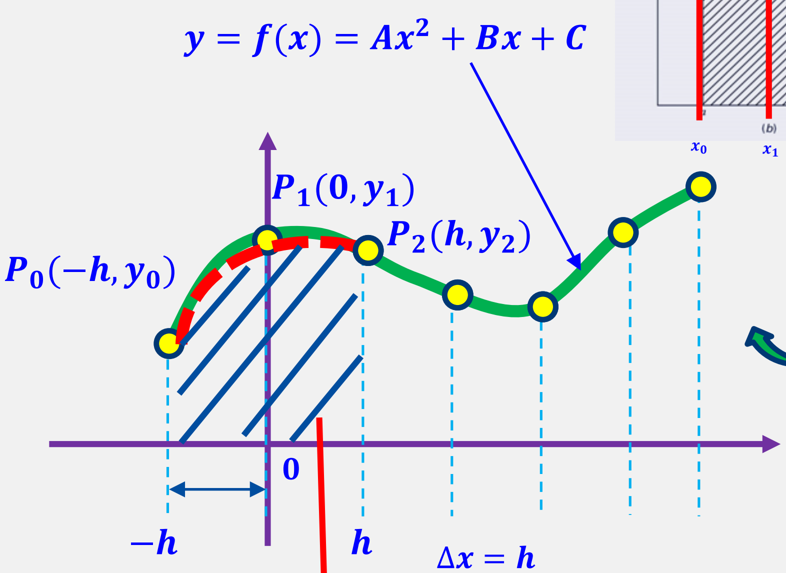


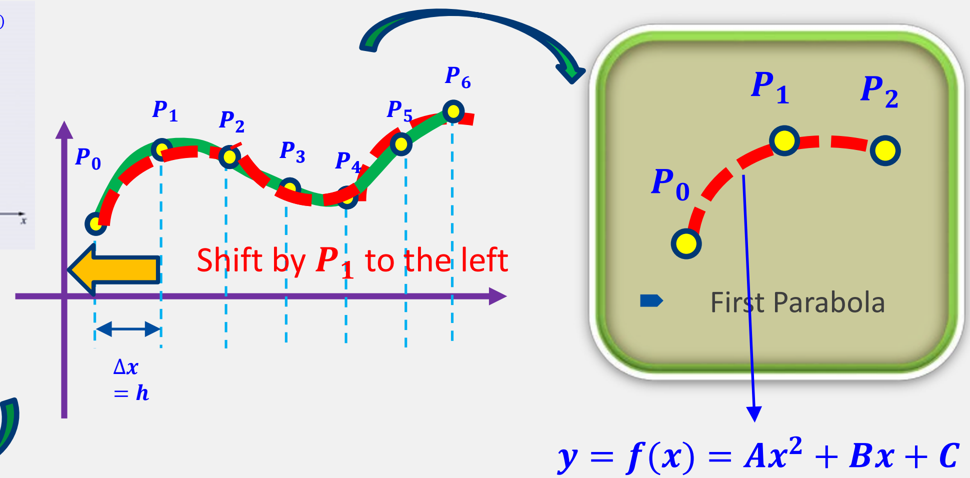
https://www.youtube.com/watch?v=7MoRzPObRf0

첫 번째 포물선 아래의 면적 구하기

- $f(x_0)$는 포물선 위의 점이면서 동시에 곡선 위의 점이기도 하다







$$Area = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\ dx$$

- First Parabola is one of the form of

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

- Area under the First Parabola is

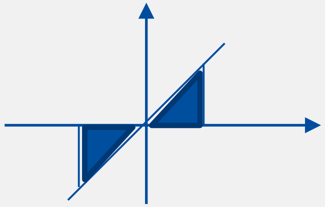
$$Area = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\ dx$$

첫 번째 포물선 아래의 면적 구하기

- Area under the First Parabola is

$$Area = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\ dx = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + C)\ dx + \int_{-h}^{h} Bx\, dx$$

$\int_{-h}^{h} Bx\, dx$ Is odd function, Symmetric about the origin = 0

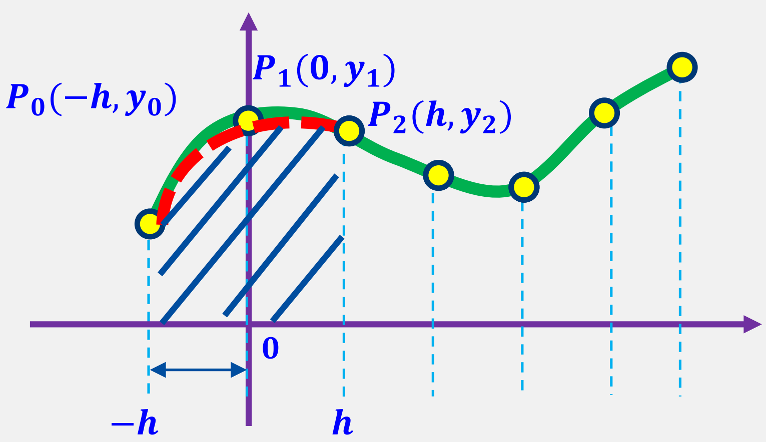


$\int_{-h}^{h} (Ax^2 + C)\ dx$ Is even function, it can be written as $2 \cdot \int_{0}^{h} (Ax^2 + C)\ dx$

첫 번째 포물선 아래의 면적 구하기

- Area under the First Parabola is

$$2 \cdot \int_0^h (Ax^2 + C)\ dx = 2 \cdot \left[\frac{Ax^3}{3} + cx\right]\Bigg|_0^h = 2 \cdot \left[\left(\frac{Ah^3}{3} + ch\right) - (0+0)\right] = \frac{2Ah^3}{3} + 2ch \qquad I$$



$y_0 + 4y_1 + y_2$ form 만들기

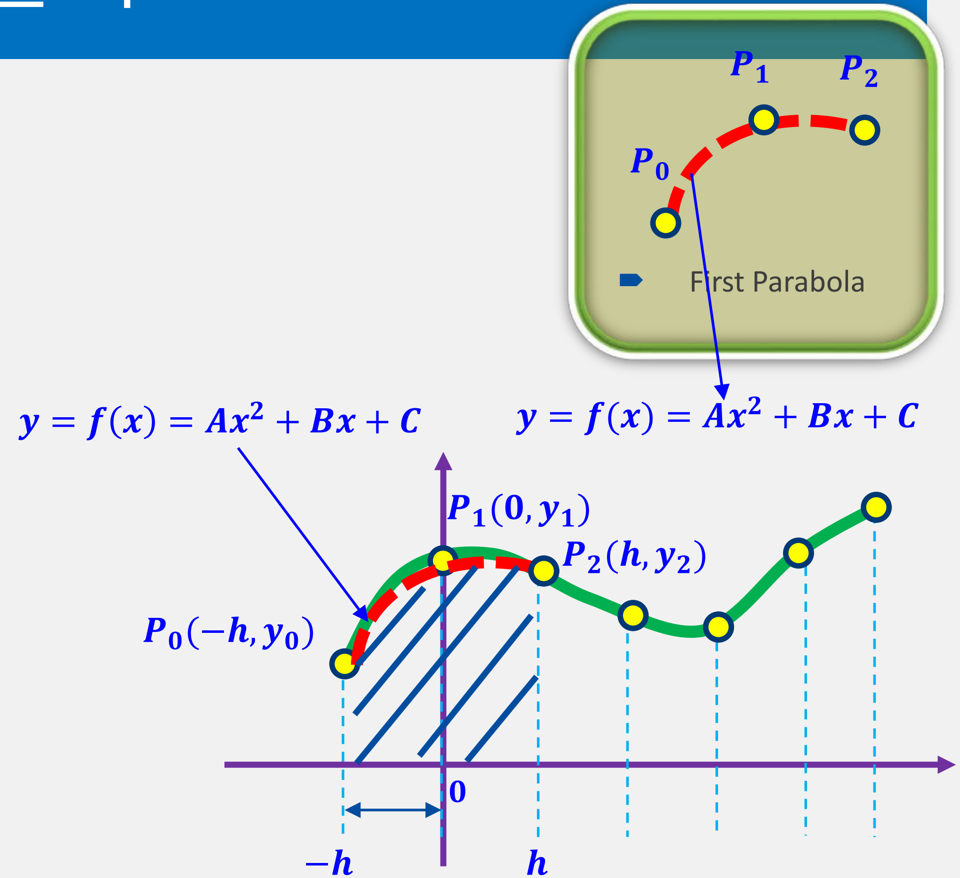
- Calculate y_0, y_1, y_2

$$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = A(0)^2 + B(0) + C = C$$

$$y_2 = A(h)^2 + B(h) + C = Ah^2 + Bh + C$$



➨ Make the form of $y_0 + 4y_1 + y_2$

$$\boxed{y_0 + 4y_1 + y_2 = Ah^2 - Bh + C + 4C + Ah^2 + Bh + C = 2Ah^2 + 6C} \quad II$$

Connect Area under the First Parabola and the form of $y_0 + 4y_1 + y_2$

- Area under the First Parabola is

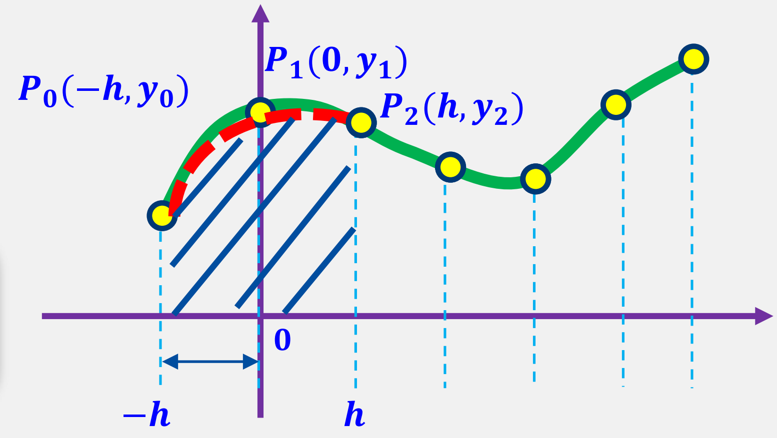
I $\quad \boxed{Area =} \dfrac{2Ah^3}{3} + 2ch = h\left(\dfrac{2Ah^2}{3} + 2c\right) = h\left(\dfrac{2Ah^2 + 6c}{3}\right) \boxed{= \dfrac{h}{3}(2Ah^2 + 6c)}$

- the form of $y_0 + 4y_1 + y_2$

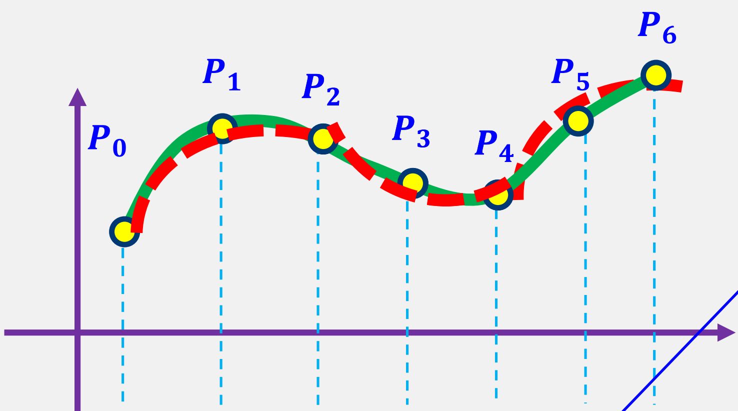
II $\quad \boxed{y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C}$

- Area (I) 와 $y_0+4y_1 + y_2$ (II) 을 연결하여 보자

$$\boxed{Area = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$



Generalize Area and the form of $y_0 + 4y_1 + y_2$

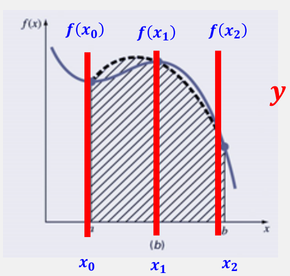


$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$

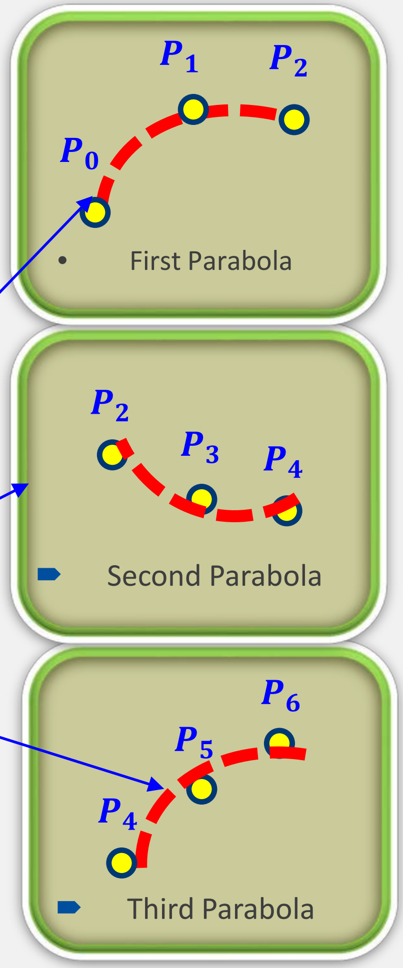
$f(x_0)$는 포물선 위의 점이면서 동시에 곡선 위의 점이기도 하다

$y = f(x) = A'x^2 + B'x + C'$

$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$



$y = f(x) = A''x^2 + B''x + C''$



$P_0(-h, y_0)$ $P_1(0, y_1)$ $P_2(h, y_2)$

$$Area = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$P_2(-h, y_2)$ $P_3(0, y_3)$ $P_4(h, y_4)$

$$Area = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

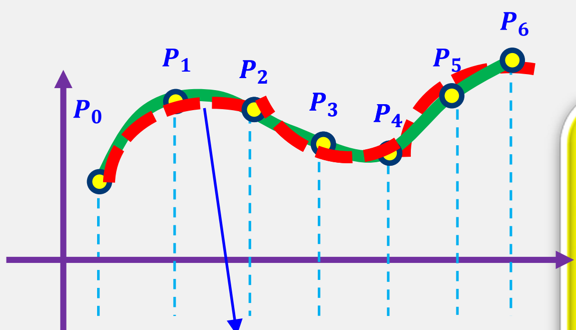
$P_4(-h, y_4)$ $P_5(0, y_5)$ $P_6(h, y_6)$

$$Area = \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$$

Derive Simpson's 1/3 Rule

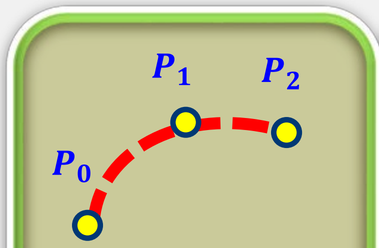
$$\Delta x = h$$

$$Area = \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

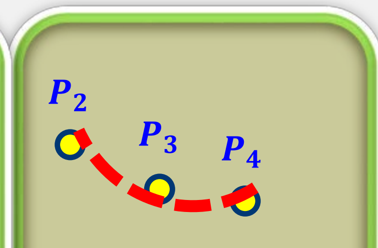


$$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

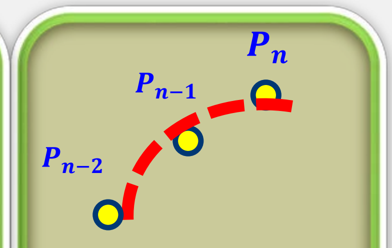
$$\begin{aligned} Area &= \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] \\ &= \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1,odd}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{j=2,even}^{n-2} f(x_j) + f(x_n)\right] \cong \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$



First Parabola



Second Parabola



Last Parabola

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f_n(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f_n(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f_n(x)\,dx$$

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + \frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

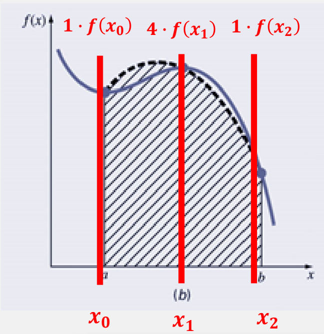
$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i,\ \text{odd}}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{j=2 \\ j,\ \text{even}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$Area = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + \boxed{y_2})$$

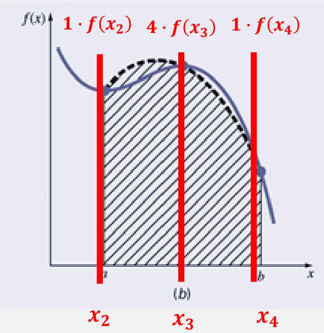
$$Area = \frac{h}{3}(\boxed{y_2} + 4y_3 + y_4) \qquad Area = \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

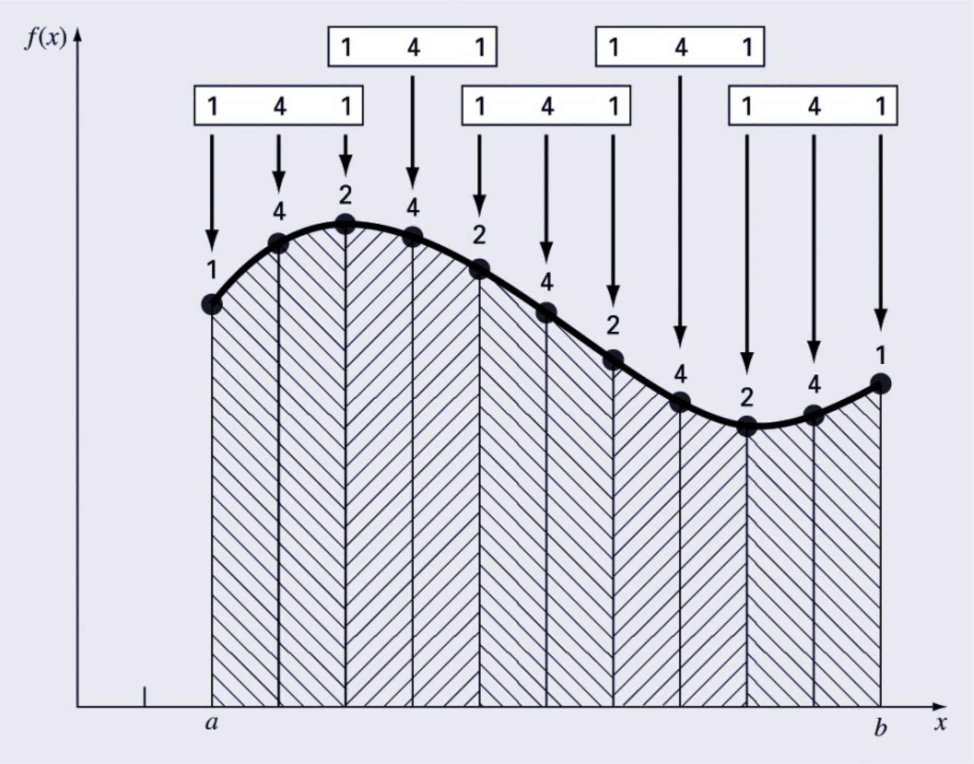
Composite Simpson's 1/3 Rule

$$I = \frac{h}{3} \cdot [1 \cdot f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 1 \cdot f(x_2)]$$



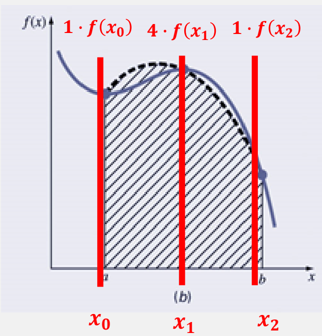
$$I = \frac{h}{3} \cdot [1 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + 1 \cdot f(x_4)]$$



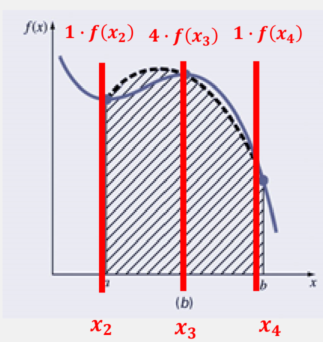


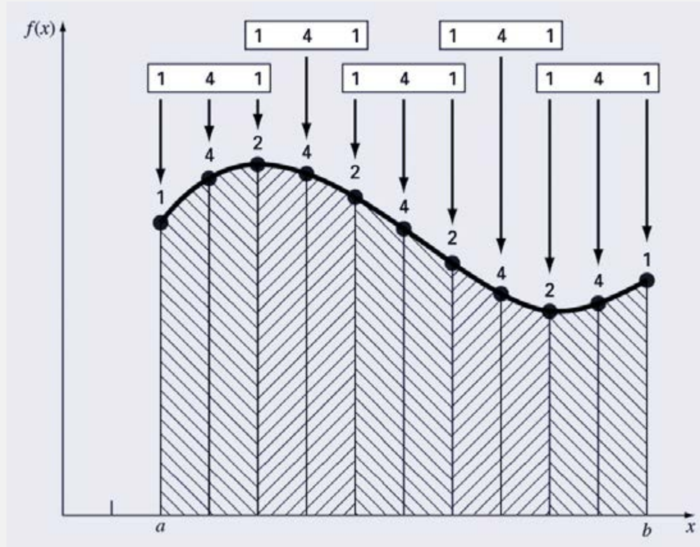
Composite Simpson’s 1/3 Rule

$$I = \frac{h}{3} \cdot [1 \cdot f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 1 \cdot f(x_2)]$$



$$I = \frac{h}{3} \cdot [1 \cdot f(x_2) + 1 \cdot f(x_3) + 1 \cdot f(x_4)]$$





- Simpson’s 1/3 rule can be used on a set of subintervals in much the same way the trapezoidal rule was, except there *must* be an odd number of points.

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f_n(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f_n(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f_n(x)\,dx$$

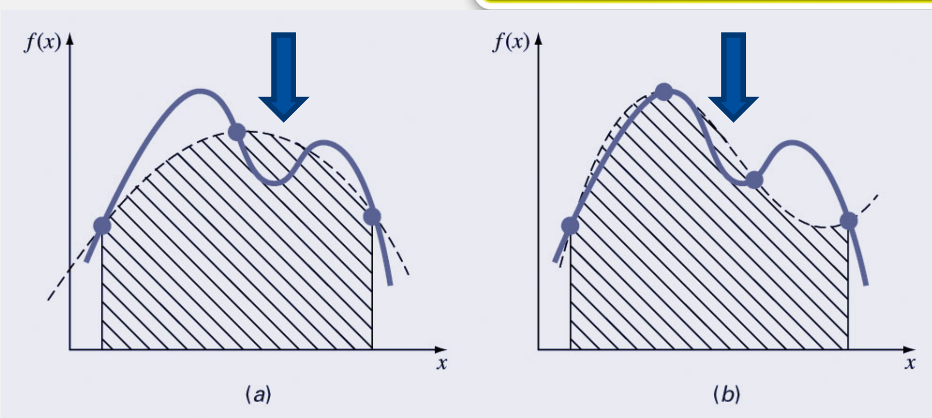
$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \cdots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1\\ i,\text{ odd}}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{j=2\\ j,\text{ even}}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Simpson's 3/8 Rule

$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$\boxed{f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$



- Simpson's 1/3 Rule

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6}$$

- Simpson's 3/8 Rule

$$I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}$$

Method 1:
Hence

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_2(x)dx$$

where $f_2(x)$ is a second order polynomial given by

$f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

$\boxed{f_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}$

Choose

$$(a, f(a)), \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right), \text{ and } (b, f(b))$$

$I = \cdots$

$$\boxed{I = (b-a)\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8}}$$

Python code for Simpson 1/3 rule

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as ig

def simpson(f, a, b, n):
    h=(b-a)/n
    k=0.0
    x=a + h
    for i in np.arange(1, n/2+1):
        k += 4*f(x)
        x += 2*h

    x = a + 2*h
    for i in np.arange(1,n/2):
        k += 2*f(x)
        x += 2*h
    return (h/3)*(f(a)+f(b)+k)
```

Python code for Simpson 1/3 rule

```
if __name__ == '__main__':
    a=0
    b=0.8
    n=7
    #x = np.arange(a, b, 0.01)
    f = lambda x: 0.2 + 25 * x - 200 * x ** 2 + 675 * x ** 3 - 900 * x ** 4 + 400 * x ** 5
    simpson=simpson(f, a, b, n)
    print("simpson=", simpson)

    sol = ig.quad(f, a, b)
    re = np.real(sol)
    real = re[0]

    print("real=", real)
    error = (real - simpson) / real * 100
    print("error=", error)

simpson= 1.6405332896426679
real= 1.6405333333333307
error= 2.663198727976200 7e-06
```


```
simpson= 1.6405332896426679
real= 1.6405333333333307
error= 2.663198727976200 7e-06
```