

# ABC171-F Strivore 解説

@mine691

July 2, 2020

## 問題文

「好きな英小文字 1 文字を好きな位置に挿入する」という操作を文字列  $S$  にちょうど  $K$  回繰り返してできる文字列は何通りあるでしょう？

## 制約

- 入力はすべて整数
- $1 \leq K \leq 10^6$
- $1 \leq |S| \leq 10^6$

## 具体例

$S = ab$ ,  $K = 1$  のとき

- $*ab$
- $a*b$
- $ab*$

のような形があって 76 通り

## 注意

上の例で  $aab$  にする方法は 2 通りある

- 1 文字目の前に  $a$  を挿入する
- 2 文字目の前に  $a$  を挿入する

操作の手順や方法を考えずに解きたい！

## 問題文の言い換え

操作が終了した文字列を  $T$  としたとき

「文字列  $S$  を部分列として含む文字列  $T$  は何通りあるか」  
ただし、 $|T| = |S| + K$  である

という問題に言い換えられる

$S = ab$ ,  $K = 1$  のとき

$aab$  は  $ab$  を部分列に持つ

以下では、 $N = |S|$  とする

ところで、文字列  $T$  が文字列  $S$  を部分列に持つことはどうやって判定できるだろうか  
→ 先頭から貪欲に一致判定していく

### 貪欲の例

$T = \text{aabcababcbdf}$ ,  $S = \text{abcd}$  のとき、先頭から  $S$  の文字があるかを見る

この構造を見ると

「文字列  $T$  が文字列  $S$  を部分列に持つ」

$\Leftrightarrow$

「 $T = t_1 s_1 t_2 s_2 \cdots s_N t_{N+1}$  となる文字列  $t_i (1 \leq i \leq N+1)$  が存在して、文字列  $t_i (1 \leq i \leq N)$  は文字  $s_i$  を含まない」

である

## 解くべき問題

$S$  から  $K$  回操作をして、 $T$  になったとする

「 $T = t_1 s_1 t_2 s_2 \cdots s_N t_{N+1}$  となる文字列  $t_i (1 \leq i \leq N+1)$  が存在して、文字列  $t_i (1 \leq i \leq N)$  は文字  $s_i$  を含まない」となる  $T$  は何通りあるか

$t_{N+1}$  の文字数を  $j$  とすれば、重複組合せの考え方をういて

$$26^j 25^{K-j} \binom{K-j+N-1}{N-1}$$

となり、最終的な答えはこれを  $1 \leq j \leq K$  で足し上げる全体として  $O(N+K)$  で解けた

## Remark

- 最後の式の導出は母関数を使ってもできる  
 $(1 - 25x)^{-N}(1 - 26x)^{-1}$  の  $x^K$  の係数が求めたいもの
- 「 $\text{dp}[i][j] := i$  文字目まで決めて  $S$  の  $j$  文字目まで含まれる場合の数」から計算量を落としてもいい
- 操作の完成形の場合の数は、「完成形の条件を見つける」「操作と完成形を一対一に対応させる」と上手くいきやすい
- OEIS(オンライン整数列大辞典) にあるらしい

提出