ABC169-F : F - Knapsack for All Subsets 解説

ホスフィン
twitter: @mine691

July 2, 2020

問題文

長さ N の正整数列 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ と正の整数 S が与えられます. 集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ の空でない部分集合 T について,$f(T)$ を以下のように定めます.

- T の空でない部分集合 $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ であって,$A_{x_1} + A_{x_2} + \cdots + A_{x_k} = S$ をみたすものの個数

T として考えられる集合は $2^N - 1$ 通りありますが, そのすべてに対する $f(T)$ の和を求めてください.

制約

- 入力は全て整数である.
- $1 \leq N \leq 3000$
- $1 \leq S \leq 3000$
- $1 \leq A_i \leq 3000$

ところで部分和問題というものがある.

部分和問題

n 個の正の整数 $a[0], a[1], \cdots, a[n-1]$ と正の整数 A が与えられる. これらの整数から何個かの整数を選んで総和が A になるようにすることが可能か判定せよ. 可能ならば "YES" と出力し, 不可能ならば "NO" と出力せよ.

この問題はナップサック問題と似たように解ける.

$$dp[i+1][j] = \begin{cases} dp[i][j-a[i]] \quad |dp[i][j] \ (j \geq a[i]) \\ dp[i][j] \quad (j \geq a[i]) \end{cases}$$

$$dp[0][j] = \begin{cases} \text{True} & (j = 0) \\ \text{False} & (j \neq 0) \end{cases}$$

$dp[i][j]$ を $A_1, A_2, \cdots, A_i$ までで集合と作ったときに, 何個かの整数を選んで総和が j になるような場合の数と定義する.
$dp[i][j]$ は $dp[i+1][j+a[i]]$ $(j+a[i] \leq S)$ と $dp[i+1][j]$ へ遷移する.
$dp[i+1][j+a[i]]$ への遷移は, 「T に含まれていて, $a[i]$ が和にも寄与している」の一通り
$dp[i+1][j]$ への遷移は,「T に含まれているが, 和には寄与していない」「T にも含まれていない」の二通り

詳しいことは このコードを見てくれ
時間計算量 $O(NS)$, **空間計算量** $O(NS)$ **でできる**.
ひとつ前見るタイプの dp **なので** in-place **にやれば 空間計算量** $O(S)$ **でできる**.

統計情報

人数 : 818 / 1146
正解率 : 71.38 **%**
平均ペナ : 0.86
ペナ率 : 45.20 **%**
difficulty : 1601