アルゴリズム論

2010年度

問題のクラス **P** と **NP** [3]

多項式時間アルゴリズム

- 個別問題のサイズの多項式オーダーの時間計算量をもつアルゴリズム
  - 易しい問題には多項式時間アルゴリズムがある
  - 多項式は乗算や合成で閉じている
  - 計算機械のモデルに依存しない

- 多項式時間アルゴリズムで解くことのできる問題のクラス（集まり，集合）を **P** と表す
  → クラス **P** に属す問題は易しい問題

クラス NP とは？

判定問題 Q に関する次のようなアルゴリズム A が存在するとき，Q はクラス NP に属するという

① Q の判定が ″yes″ となる個別問題 I に対して，その証明書 C_I が存在して，I と C_I を A に入力すると ″yes″ と判定する

② Q の判定が ″no″ となる個別問題 I に対しては，① のような証明書はとれなくてよい

③ アルゴリズム A は多項式時間で演算する

・個別問題 instance （具体例）

・アルゴリズム A は判定問題 Q を解くのではなく，証明書の正しさを判定するだけ

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$

- クラス $\mathbf{P}$ に属する判定問題 Q においては，任意の個別問題 I に対して，″yes″ か ″no″ かを判定する多項式時間アルゴリズム A が存在するので，わざわざ証明書を発行する必要はない。

従って

$Q \in \mathbf{P} \Rightarrow Q \in \mathbf{NP}$ であり

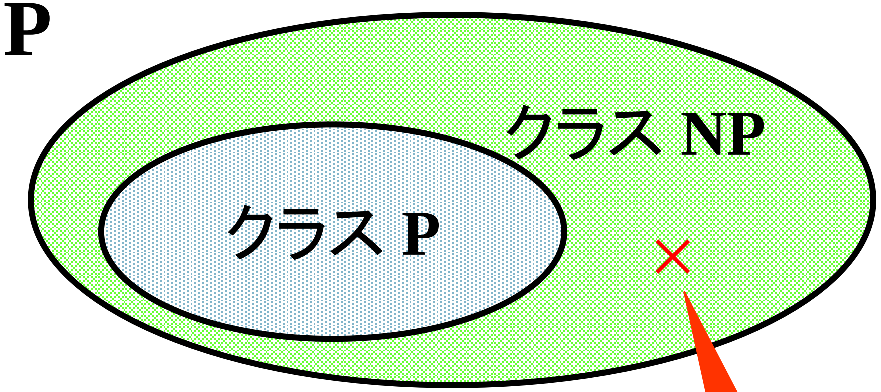
$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ である

ただし

$\mathbf{P} \subset \mathbf{NP}$（真部分集合）かどうかは不明

問題のクラス

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$



$\mathbf{P} \subset \mathbf{NP}$?

$\mathbf{P} = \mathbf{NP}$?

$A \subset B \Leftrightarrow A$ は B の真部分集合

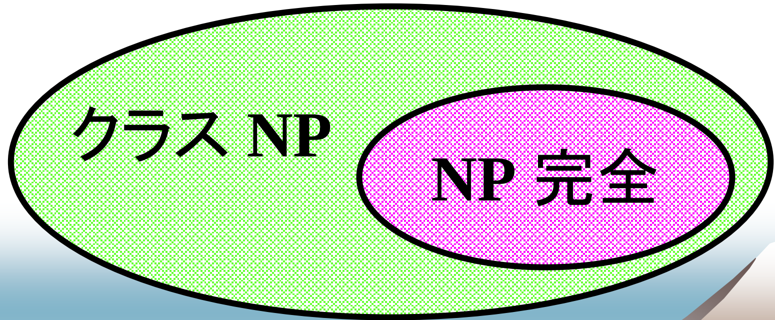
$\Leftrightarrow x \in B$ かつ $x \notin A$

となる要素 x がある

$\mathbf{P} \subset \mathbf{NP} \Leftrightarrow$ **NP** に属し, **P** に属さない 問題 がある

NP-complete（NP完全）

- どれも難しそうで，いまのところ多項式時間アルゴリズムが発見されていない問題
- クラス **P** に属さないことは証明されていない
- もし，**NP** 完全であるどれか一つの問題がクラス **P** に属すことが証明されたら，クラス **NP** に属するすべての問題もクラス **P** に属す（ **P = NP** ）ことが保証されている



どうしたらいい？

線形連立方程式 $Ax = b$ を解くソフトを買ってきた

パッケージを開けたら,
『係数行列は対称であること』とあった

ところが解きたい問題の A は非対称行列だ
どうしたらいい？

$B = A^T A,\ c = A^T b$ と前処理して
$Bx = c$ を解けばよい

$Ax = b$ の解と $A^T A x = A^T b$ の解は同じ

問題の帰着 (reducible)

- 二つの問題 Q_1 と Q_2 があり,
  Q_2 を解く多項式アルゴリズム A_2 がある
- A_2 を利用すれば, Q_1 を解く多項式時間のアルゴリズム A_1 を構成できるとき
  『Q_1 は Q_2 に帰着できる』（$Q_2 \triangleright Q_1$）という
- 非対称係数連立方程式問題は,
  対称係数連立方程式問題に帰着できる

帰着できることの意味

『Q_1 は Q_2 に帰着できる［$Q_2 \triangleright Q_1$］とき』

- $Q_2 \in \mathbf{P} \;\; \Rightarrow \;\; Q_1 \in \mathbf{P}$
- Q_2 は Q_1 より難しい［$Q_2 > Q_1$ という感じ］

$\because$ 状況の可能性は次の４とおり

『$Q_1 \in \mathbf{P} \wedge Q_2 \in \mathbf{P}$』

『$Q_1 \notin \mathbf{P} \wedge Q_2 \in \mathbf{P}$』 $\Leftarrow$ この状況が起こりえない

というのが $Q_2 \triangleright Q_1$

『$Q_1 \in \mathbf{P} \wedge Q_2 \notin \mathbf{P}$』

『$Q_1 \notin \mathbf{P} \wedge Q_2 \notin \mathbf{P}$』

連立方程式問題の場合

- SymLES : 対称係数連立方程式問題
- AsymLES : 非対称係数連立方程式問題

$$\mathrm{SymLES} \triangleright \mathrm{AsymLES}$$

対称係数の方が難しい？

実は SymLES $\triangleleft$ AsymLES

結局, SymLES と AsymLES の難しさは同程度

彩色問題の場合

- k-Color : 彩色判定問題
- Chromatic : 彩色最適化問題

k-Color $\triangleright$ Chromatic　　←２分探索法

Chromatic $\triangleright$ k-Color

Chromatic と k-Color は同程度の難しさ

クラス NP とは？

判定問題 Q に関する次のようなアルゴリズム A が存在するとき，Q は**クラス NP** に属するという

① Q の判定が "yes" となる個別問題 I に対して，その証明書 C_I が存在して，I と C_I を A に入力すると "yes" と判定する

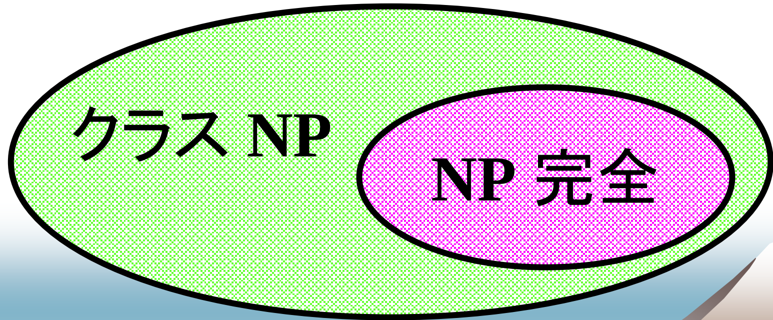
② Q の判定が "no" となる個別問題 I に対しては，① のような証明書はとれなくてよい

③ アルゴリズム A は多項式時間で演算する

- 個別問題 instance （具体例）
- アルゴリズム A は判定問題 Q を解くのではなく，証明書の正しさを判定するだけ

NP-complete（NP完全）

- どれも難しそうで，いまのところ多項式時間アルゴリズムが発見されていない問題
- クラス **P** に属さないことは証明されていない
- もし，**NP** 完全であるどれか一つの問題がクラス **P** に属すことが証明されたら，クラス **NP** に属するすべての問題もクラス **P** に属す（ **P** = **NP** ）ことが保証されている



NP 完全（NP-complete）の定義

- クラス **NP** に属す判定問題 Q に対し, **NP** に属すすべての判定問題が Q に帰着できるとき, Q は **NP** 完全であるという

① $Q \in \mathbf{NP}$

② $Q \triangleright Q'$ for any $Q' \in \mathbf{NP}$

- **NP** 完全な問題は, クラス **NP** の中でも最も難しい問題ということになる

NP 困難（NP-hard）

① $Q \in \mathbf{NP}$

② $Q \rhd Q'$ for any $Q' \in \mathbf{NP}$

条件 ① は満たさないが,
条件 ② を満たす問題を **NP困難**な問題という

k-Color : 彩色判定問題
k-Color $\in \mathbf{NP}$ であり, 実は, **NP**完全

Chromatic : 彩色最適化問題
Chromatic $\notin \mathbf{NP}$ なので， **NP**困難

NP 完全は NP 完全を生む

$$\text{If } \underline{Q \in \mathbf{NP}\text{-complete}},\ \underline{\tilde{Q} \in \mathbf{NP}} \text{ and } \underline{\tilde{Q} \rhd Q}$$
$$\text{then } \tilde{Q} \in \mathbf{NP}\text{-complete.}$$

証明：$\tilde{Q} \in \mathbf{NP}$-complete となるには

① $\tilde{Q} \in \mathbf{NP}$　② $\tilde{Q} \rhd Q'$ $(\forall Q' \in \mathbf{NP})$

- ① は条件から成立する。
- $Q \in \mathbf{NP}$-complete なので，③ $Q \rhd Q'$ $(\forall Q' \in \mathbf{NP})$

  よって，条件 $\tilde{Q} \rhd Q$ と ③ から ② が成立する。

  [関係 $\rhd$ は推移律を満たす]

ある問題 Q が NP 完全である
ことを証明するには

まず, ① $Q \in \mathbf{NP}$

次に, ② $Q \rhd \hat{Q}$

となる **NP** 完全問題 $\hat{Q}$ を見つける

$\left[\begin{array}{l}\hat{Q} \text{ が } \mathbf{NP} \text{完全であることは} \\ \text{誰かが証明してくれている}\end{array}\right]$

ところで…

$$Q \rhd Q' \;\; (\forall Q' \in \mathbf{NP})$$

となる判定問題 Q なんてあるのか？

それを知るには，クラス **NP** の厳密な定義が必要

$$\Downarrow$$

非決定性チューリング機械

nondeterministic Turing machine