アルゴリズム論

平成22年11月08日

NP 完全問題［2］

今までの帰着の例

3SAT $\triangleright$ SAT　　　　SAT $\triangleright$ 3SAT

k-Color $\triangleright$ Chromatic

Chromatic $\triangleright$ k-Color

いずれも，関連した問題の帰着例

そこで，一見異なる問題の帰着例

SAT $\triangleright$ k-Color

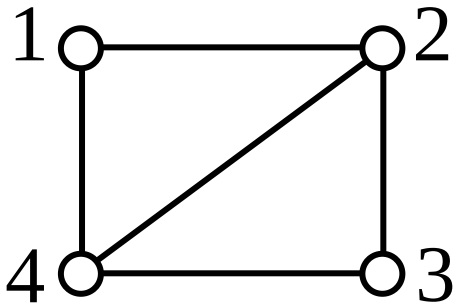
を示す

k-Color は SAT に帰着できる

- k-Color の入力は，グラフ G と色数 k
- この G と k から『G を k 色で彩色可能なとき，かつそのときに限り，f は充足可能である』となる性質をもつ和積形式のブール式 f を，多項式時間で作る

彩色問題を SAT で解く例題

このグラフは３色で彩色可能か？



ブール変数は12個用意する

$x_{vc} \quad (1 \le v \le 4,\ 1 \le c \le 3)$

頂点 v に色 c を塗るとき $x_{vc} = 1,$

そうでないとき $x_{vc} = 0$

		色		
		1	2	3
頂点	1	1	0	0
	2	0	1	0
	3	1	0	0
	4	0	0	1

各頂点には色を一つ

頂点に色は少なくとも一つ：

$$(x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13})(x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23})$$

$$(x_{31} \vee x_{32} \vee x_{33})(x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43})$$

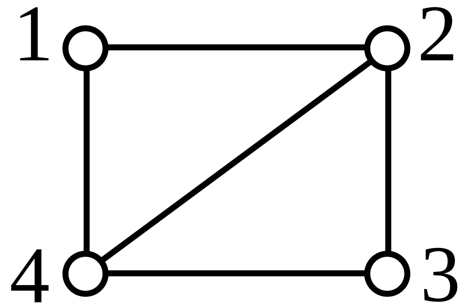
色１と２を同時に塗らない：

$$(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{12}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{31}} \vee \overline{x_{32}})(\overline{x_{41}} \vee \overline{x_{42}})$$

色１と３，色２と３もダメ：

$$(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{31}} \vee \overline{x_{33}})(\overline{x_{41}} \vee \overline{x_{43}})$$

$$(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{32}} \vee \overline{x_{33}})(\overline{x_{42}} \vee \overline{x_{43}})$$



		色		
		1	2	3
頂点	1	1	0	0
	2	0	1	0
	3	1	0	0
	4	0	0	1

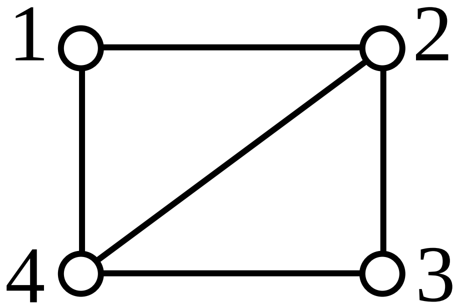
辺の両端は別の色

頂点１と２には別の色を塗る：

$$(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{21}})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{23}})$$

他の辺についても同様に：

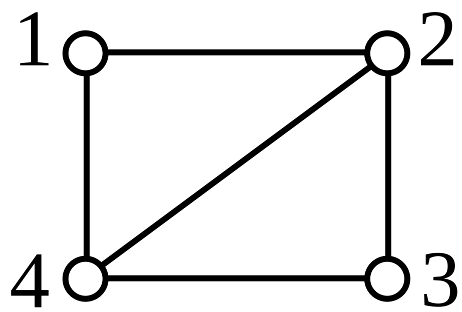
$$(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{41}})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{42}})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{43}})$$
$$(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{31}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{32}})(\overline{x_{23}} \vee \overline{x_{33}})$$
$$(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{41}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{42}})(\overline{x_{23}} \vee \overline{x_{43}})$$
$$(\overline{x_{31}} \vee \overline{x_{41}})(\overline{x_{32}} \vee \overline{x_{42}})(\overline{x_{33}} \vee \overline{x_{43}})$$



		色		
		1	2	3
頂点	1	1	0	0
	2	0	1	0
	3	1	0	0
	4	0	0	1

まとめると…

$$
\begin{aligned}
&f(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{43}) \\
&= (x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13})(x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23}) \\
&\quad (x_{31} \vee x_{32} \vee x_{33})(x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43}) \\
&\quad (\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{12}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{31}} \vee \overline{x_{32}})(\overline{x_{41}} \vee \overline{x_{42}}) \\
&\quad (\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{31}} \vee \overline{x_{33}})(\overline{x_{41}} \vee \overline{x_{43}}) \\
&\quad (\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{32}} \vee \overline{x_{33}})(\overline{x_{42}} \vee \overline{x_{43}}) \\
&\quad (\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{21}})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{23}}) \\
&\quad (\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{41}})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{42}})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{43}}) \\
&\quad (\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{31}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{32}})(\overline{x_{23}} \vee \overline{x_{33}}) \\
&\quad (\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{41}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{42}})(\overline{x_{23}} \vee \overline{x_{43}}) \\
&\quad (\overline{x_{31}} \vee \overline{x_{41}})(\overline{x_{32}} \vee \overline{x_{42}})(\overline{x_{33}} \vee \overline{x_{43}})
\end{aligned}
$$



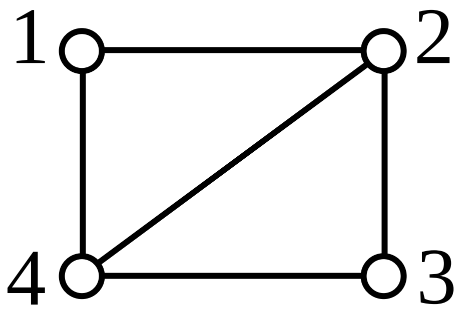
		色		
		1	2	3
頂点	1	1	0	0
	2	0	1	0
	3	1	0	0
	4	0	0	1

ブール式の和項を数える

- グラフの頂点数 n, 辺数 e, 色数 k
  - 頂点に色は少なくとも一つ：和項は n 個
    $(x_{11} \vee x_{12} \vee \cdots \vee x_{1k}) \cdots (x_{n1} \vee x_{n2} \vee \cdots \vee x_{nk})$
  - 色 i と j を頂点 v に同時に塗らない：$(\overline{x_{vi}} \vee \overline{x_{vj}})$
    for $1 \le v \le n,\ 1 \le i < j \le k \Rightarrow$ 和項は $nk(k-1)/2$ 個
  - 頂点 i と j には別の色 p を塗る：$(\overline{x_{ip}} \vee \overline{x_{jp}})$
    for $(i, j) \in E,\ 1 \le p \le k \Rightarrow$ 和項は ek 個

和項は全部で $n + nk(k-1)/2 + ek$ 個

グラフをリストで表現する



- グラフ＝[辺1, 辺2, …, 辺last],
  辺＝[頂点1, 頂点2]

G = [[1, 2], [1, 4], [2, 3], [3, 4], [4, 2]]

```
def checkGraph(G):
    """ グラフ情報 G から頂点名のリストを作る """
    vrtxList = []
    for edge in G:
        if edge[0] not in vrtxList:
            vrtxList.append(edge[0])
        if edge[1] not in vrtxList:
            vrtxList.append(edge[1])
    return vrtxList
```

課題 col：k-Color

- k-Color を解くプログラムを satisfiability を利用して作成せよ

```
def k_color(G, k):
    vrtxList = checkGraph(G)
    CNF = []
    for vrtx in vrtxList:
        ..... CNF.append(.....)
    for edge in G:
        ..... CNF.append(.....)
    vrblList = satisfiability(CNF)
    if vrblList == []:    print "impossible"
    else:                 print vrblList
    return
```