L3.02 : TD 2

Applications linéaires

5 septembre 2022 – B. Colombel

1 Motivations

En synthèse d'image, on considère des *caméras* qui définissent le point de vue à partir duquel l'observateur voit la scène.
Une scène 3D possède un repère fixe $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ dans lequel l'utilisateur définit les objets, les sources lumineuses et la position de la caméra. Ce repère s'appelle le *repère de la scène* ou *repère du monde*.
Par ailleurs, chaque objet possède son propre repère, le *repère de l'objet*, dans lequel il est construit (voir figure 1 page 1).

Dans les applications de synthèse 3D, on utilise de nombreuses bases vectorielles et de nombreux repères affines. En effet,

- on construit chaque objet dans un repère le repère de l'objet dans lequel la position de l'objet est simple ;
- on plonge dans la scène (ou le monde) où les objets sont repérés dans le repère du monde ;
- pour visualiser, on transforme les objets dans le repère de la caméra. Par convention, l'observateur regarde la scène en direction du troisième axe de coordonnées ;
- il faut ensuite projeter la scène en deux dimensions puis l'afficher à l'écran.

Le schéma global est expliqué par la figure 2 page 2.

Mathématiquement, changer de repère revient à appliquer aux objets des *transformations géométriques*, ce qui se ramène à du calcul matriciel.

L'objectif de cette partie est de :

- connaitre les différentes transformations géométriques ;
- utiliser ces transformations dans le cadre d'un changement de repère ;
- utliser le calcul matriciel pour effectuer les calculs.

Figure 1 – Repère de l'objet, repère de la scène et repère de la caméra

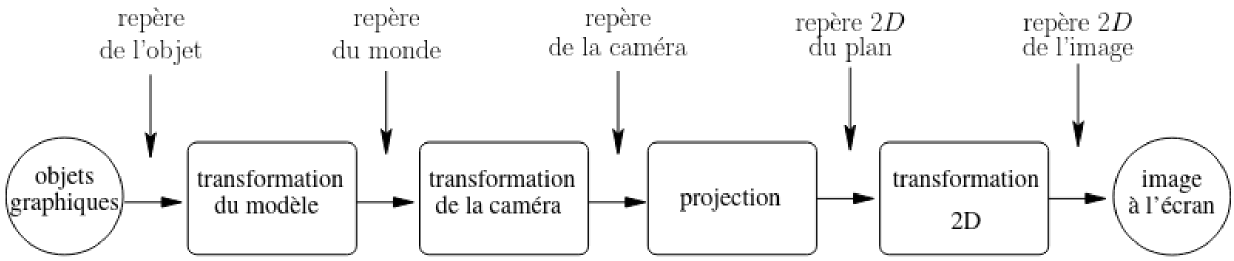

FIGURE 2 – Transformations et changement de repère pour la synthèse d'une image 3D

2 Rappels sur les matrices

Définition 1 (Matrice à coefficients réels)
Une matrice A de dimension $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.
On note :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le nombre réel a_{ij} représente le coefficient de A situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne.

Matrices particulières

1. Une **matrice colonne** est une matrice de dimension $n \times 1$.
2. Une **matrice ligne** est une matrice de dimension $1 \times p$.
3. Un **matrice carrée** est une matrice de dimension $n \times n$ (même nombre de lignes et de colonnes).

Définition 2 (Égalités de deux matrices)
Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles ont la **même dimension** et si tous leurs coefficients sont égaux.

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \text{ pour tout } i \text{ et } j$$

Définition 3 (Somme de 2 matrices)
On considère$A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de dimension $n \times p$. La **somme** des matrices A et B, notée $A + B$, est la matrice obtenue en additionnant les coefficients de A et de B situés au **même emplacement**.

$$C = A + B \iff c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Vocabulaire. La **matrice nulle** de dimension $n \times p$ est la matrice de dimension $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

On la note en générale $O_{np} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$.
Pour toute matrice A de dimension $n \times p$, on a $A + O_{np} = O_{np} + A = A$.
On parle d'*élément neutre* pour l'addition.

Définition 4 (Multiplication par un réel)
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimension $n \times p$ et k un nombre réel.
La matrice $k \cdot A$ est la matrice $M = (m_{ij})$ obtenue en multipliant chacun des coefficients a_{ij} par k :

$$m_{ij} = k \times a_{ij}$$

Définition 5 (Multiplication de deux matrices)
Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et B une matrice de dimension $p \times q$.
Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice de dimension $n \times q$, notée $A \times B$ (ou AB) obtenue de la manière suivante :
Le coefficient de la matrice AB situé à l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est égal au produit de la i^{e} ligne de A et de la j^{e} ligne de B.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_q \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{iq} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_p \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix} = A \times B$$

où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant q$,

$$c_{ij} = L_i \times C_j = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Vocabulaire. On appelle *matrice identité* d'ordre n la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sur la diagonale sont égaux à 1 et tous les autres coefficients sont nuls :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors, pour toute matrice carrée A d'ordre n :

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

On parle d'*élément neutre* pour la multiplication.

Définition 6 (Matrice inverse)
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est inversible si il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

Dans ce cas, on dit que B est l'*inverse* de A et on note A^{-1}.

On dispose d'un moyen calculatoire et pratique de savoir si une matrice est inversible ou non. Il s'agit du *déterminant*. Il n'est pas question ici de détailler cette fonction dont le fondement théorique dépasse de très loin l'objet du cours ; néanmoins cette fonction est implémentée dans tous les bibliothèques de calcul matriciel. On retiendra :

Théorème 1
Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors :

$$A \text{ inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 \\ -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$. Déterminer $A \times B$ et conclure.

3 Applications linéaires

Définition 7
Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est *linéaire* si pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel λ, on a :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \text{et} \quad f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$$

Définition 8
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire et si (e_i) est une base de E alors, la matrice de f est la matrice $A = (a_{ij})$ où :

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$$

Théorème 2
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est linéaire et si A est sa matrice dans la base (e_i), alors :

$$\forall\ X \in \mathbb{R}^n, \quad f(X) = AX$$

Réciproquement, si il existe une matrice A telle qu'une application f vérifie $f(X) = AX$ pour tout X de $\mathbb{R}^n$, alors f est linéaire.

Exercice 2 : On considère les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$f(x;y;z) = \begin{pmatrix} -y+z \\ -x+z \\ -x-y+2 \end{pmatrix} z) \quad \text{et} \quad g(x;y;z) = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+3z \\ -x+y \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les matrices A et B de f et g dans les bases canoniques.
2. f et g sont-elles inversibles ?
3. Soit h définie par $h(x) = g(f(x))$. Quelle est la matrice de h ?

4 Transformations géométriques linéaires

On peut distinguer deux grandes familles de transformations géométriques :

Isométries Une *isométrie* est une transformation qui ne déforme pas les objets. En particulier :
- elles conservent les distances ;
- elles conservent les angles ;
- elles sont inversibles et l'inverse est une isométrie et

$$A^{-1} = {}^tA \quad \text{si } A \text{ est la matrice de l'application.}$$

Similitudes Une *similitude* est une transformation qui agrandit ou réduit les dimensions des objets sans en changer la forme. En particulier :
- elles multiplient les distances par un facteur constant (le rapport) ;
- elles conservent les angles ;
- elles conservent les formes (un cercle reste un cercle) ;
- elles sont inversibles et l'inverse est un similitude ;
- elles contiennent les transformations isométriques.

Page 6, figurent les matrices des principales transformations géométriques.

Exercice 3 :

1. **Affinités**
   (a) Une affinité est-elle une isométrie ?

(b) Dessiner à main levée l'image du cercle de rayon 1 dans les deux cas.

(c) En trois dimensions, combien y a-t-il d'affinités orthogonales ? Quelles sont leurs matrices ?

2. **Changements d'échelle et homothéties**

(a) Un changement d'échelle est-il une isométrie ? une similitude ?

(b) Une homothétie est elle une isométrie ? une similitude ?

(c) Quel lien existe-t-il entre affinités et homothéties ? entre homothéties et changements d'échelle ?

(d) Quelles transformations représentent les matrices :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il d'autres transformations de ce type ?

Exercice 4 :

1. Donner la matrice A de la rotation d'angle 45° autour de l'axe (Ox) et celle, B, de la rotation d'angle 90° autour de l'axe (Oz).
2. Calculer l'image du vecteur $\vec{u}(0;1;2)$:
   — Par la transformation f_A associée à A ;
   — Par la transformation f_B associée à B ;
3. Donner la matrice de la transformation qui consiste à effectuer ces deux rotations à la suite. Inverser l'ordre des rotations donne-t-il la même transformation ?

Exercice 5 : Un utilisateur d'une librairie graphique type `OpenGL` souhaite transformer un objet à partir d'un empilement de matrices de dimension 3. Il veut réaliser dans l'ordre une homothétie de rapport $(1;2;3)$ puis une rotation d'angle 45° suivant l'axe y et enfin une rotation d'angle 30° suivant l'axe z (dans cet ordre).
Écrire le produit de matrices qu'il faudra transmettre à la librairie.

Affinités orthogonales

dans le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

rapport k, direction $\vec{\jmath}$ et base $\vec{\imath}$	rapport k, direction $\vec{\imath}$ et base $\vec{\jmath}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Changement d'échelle

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ dans le plan $\qquad$ $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ dans l'espace

Si tous les rapports sont égaux, on parle d'*homothétie vectorielle*

Rotations

dans le plan vectoriel de base $(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dans l'espace vectoriel de base $\left(\vec{\imath}\,;\vec{\jmath},\vec{k}\right)$

$\vec{u}=\vec{\imath}$	$\vec{u}=\vec{\jmath}$	$\vec{u}=\vec{k}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

TABLE 1 – Matrices des transformations géométriques usuelles