# 第一周作业参考答案

第1周作业 第一章 4，5，7，8，9

---

## 4

> 任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多。

**证**：将每个人看作顶点，两个人是朋友则在这两人所代表的顶点之间加一条边，因此问题等价于，在对任意满足 $V(G) \geq 2$ 的图 G 中，存在 $V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得 $deg(v_i) = deg(v_j)$.
**反证法**：假设对任意$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，都有$deg(v_i) \neq deg(v_j)$，deg(v) 在 G 中共有|V(G)|个不同的取值，为 0, 1, ... , |V(G)|-1，
所以存在$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得$deg(v_i) = 0$，$deg(v_j) = |V(G)| - 1$，
即 $v_i$ 与所有点都不相连，$v_j$ 与所有点都相连，矛盾，假设不成立，原结论成立。

---

## 5

> $2n(n \geq 2)$人中，每个人至少与其中的n个人认识，则其中至少有4个人，使得这四个人围桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人。

将每个人看作顶点，两个人认识则在这两人所代表的顶点之间加一条边，构造图，因此问题等价于该图一定有长度为4的圈

1. 假设任意两个人都相互认识，那么这是一个完全图，一定存在长度为4的圈
2. 若存在 $u, v$ 两个人不认识，那么在剩下 $2n-2$ 个人中，由于每个人至少与其中的 n 个人认识，根据抽屉原理可得至少有两个人与$u, v$都认识，则这 4 人组成了一个长度为 4 的圈。

---

## 7

> 证明下面的结论：
> (1) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

> (2)设G是二分图，$\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

（1）不妨设 $K_{m,n} = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，其中$|X| = m$，$|Y| = n$
由二分图$K_{m,n}$定义：$\forall u \in X, v \in Y$，有$deg(u) = m, deg(v) = n$
则有：

$$\sum_{v \in V(K_{m,n})} \deg(v) = \sum_{u \in X} \deg(\mathrm{u}) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2mn$$

由Euler定理，$\varepsilon(K_{m,n}) = mn$
（2）设$G$的二分图的两个部分节点数量分别为$m, n$，显然有
$\varepsilon(G) \leq \varepsilon(K_{m,n}), V(G) = m + n$
并且由(1)可得 $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$，所以有 $\varepsilon(G) \leq mn \leq (m+n)^2/4$，即 $\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

---

## 8

> 设$G$是图，给定$V(G)$的非空真子集$V'$，记$k$为一个端点在$V'$中，另一个端点在$V(G) - V'$中的边数。若$V'$中度数为奇数的顶点数为偶数，则$k$为偶数；否则，$k$为奇数

设$\varepsilon$是$V'$的顶点导出子图的边的个数，$V_o'$和$V_e'$是$V'$中顶点度数为奇数和偶数的集合，则有

$$k = \sum_{v \in V'} deg(v) - 2\varepsilon = \sum_{v \in V_o'} deg(v) + \sum_{v \in V_e'} deg(v) - 2\varepsilon$$

因为 $2\varepsilon$ 和 $\sum_{v \in V_e'} deg(v)$ 一定是偶数，所以$k$的奇偶只和 $\sum_{v \in V_o'} deg(v)$ 有关，故若$V'$中度数为奇数的顶点数为偶数，则$k$为偶数；否则，$k$为奇数。

---

## 9

> 每个顶点的度数都是2的连通图是一个圈。

用最长轨法来证明，设 $P(u,v) = v_0(=u)v_1 \ldots v_k(=v)$ 为图中最长轨道，由于 $v_0$ 度数为2，存在不同于$v_1$的点 w 与其相邻，若 w 不在 P 上，则 $P(u,v) + uw$ 为更长的轨道，与假设矛盾，若 w 在 P 上，则 $w = v$，否则 deg(w) = 3。综上，$P(u,v) + uv$ 为一个圈，且由于图为连通图，不可能有孤立点，由于每个顶点的度数都是 2，不可能有点单独与圈上点相连，故 $P(u,v) + uv$ 即为整个图，那么该图为一个圈，证毕。