第九次作业参考答案

Ch9 - 2，4，5，10，11，14

> 2、证明: 在 $Ford-Fulkerson$ 算法的第二步, 通过可增载轨道得到的函数 $\bar{f}$ 是流函数.

即引理9.1的证明

证明 首先证明任给 $e \in E(D)$，都有 $c(e) \geq \overline{f}(e) \geq 0$

因为f是N的流函数，所以任给 $e \in E(D)$，都有$c(e) \geq f(e) \geq 0$。 取 $e' \in E(D)$，若 e' 不是 $P(s,t)$ 上的边，则有 $\overline{f}(e') = f(e')$，所以 $c(e') \geq \overline{f}(e') \geq 0$；若 e' 是 $P(s,t)$ 的正向边，由 $l(P)$ 的定义 $l(P) = min_{e \in E(P)} l(e)$ 知，$l(e') \geq l(P) \geq 0$，而 $l(e') = c(e') - f(e')$，故有 $c(e') = f(e') + l(e') \geq f(e') + l(P) = \overline{f}(e') \geq 0$；若 e' 是 $P(s,t)$ 的反向边，证明类似。

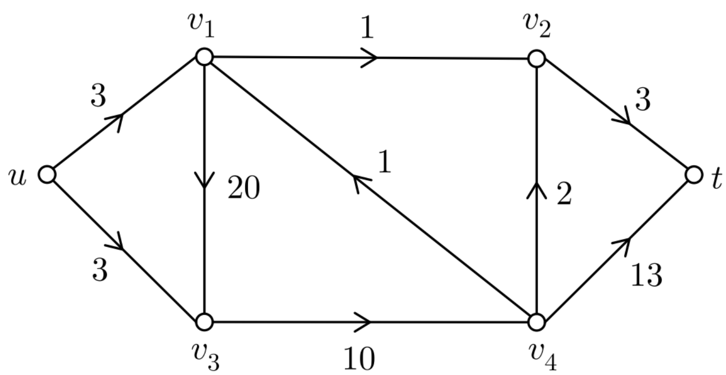
下面证明任给 $v \in V(D) - \{s,t\}$，都有 $\sum_{e \in \alpha(v)} \overline{f}(e) - \sum_{e \in \beta(v)} \overline{f}(e) = 0$。若 v 不是 $P(s,t)$上的顶点，则任给 $e \in \alpha(v)$ 或 $e \in \beta(v)$，都有 $\overline{f}(e) = f(e)$，所以 $\sum_{e \in \alpha(v)} \overline{f} - \sum_{e \in \beta(v)} \overline{f}(e) = \sum_{e \in \alpha(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) = 0$。若 v 是 $P(s,t)$ 上的顶点，不妨设 $P(s,t) = s \ldots e_1 v e_2 \ldots t$，$e_1$ 和 e_2 都有可能是 $P(s,t)$ 的正向边或反向边，共四种情形。我们取 e_1 和 e_2 都是正向边这种情形给出证明，其它情形类似。

由于 e_1 和 e_2 都是正向边，$e_1 \in \alpha(v)$，$e_2 \in \beta(v)$，且 $\overline{f}(e_1) = f(e_1) + l(P)$，$\overline{f}(e_2) = f(e_2) + l(P)$。对于 $\alpha(v)$ 和 $\beta(v)$ 中其余的边 e，则有 $\overline{f}(e) = f(e)$。因此

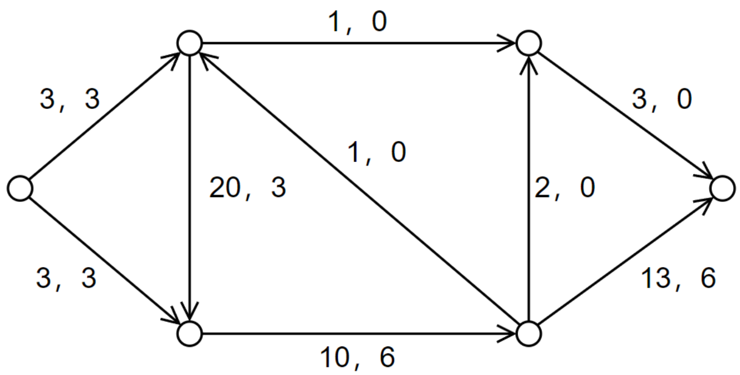
$$
\begin{aligned}
&\sum_{e \in \alpha(v)} \overline{f}(e) - \sum_{e \in \beta(v)} \overline{f}(e) \\
=&[\sum_{e \in \alpha(v) - \{e_1\}} \overline{f}(e) + \overline{f}(e_1)] - [\sum_{e \in \beta(v) - \{e_2\}} \overline{f}(e) + \overline{f}(e_2)] \\
=&[\sum_{e \in \alpha(v) - \{e_1\}} f(e) + (f(e_1 + l(P))] - [\sum_{e \in \beta(v) - \{e_2\}} f(e) + (f(e_2 + l(P))] \\
=&[\sum_{e \in \alpha(v)} f(e) + l(P)] - [\sum_{e \in \beta(v)} f(e) + l(P)] \\
=&0.
\end{aligned}
$$

综上，$\overline{f}$是N的流函数。

> 4、求图中网络的最大流



最大流函数如下，最大流为6



> 5、证明: 若网络中每条边的容量均为整数, 则最大流的流量也一定是整数

最大流流量=最小截截量=$C(S,\overline{S})=\sum_{e\in(s,\bar{s})}c(e)$，因为每条边的容量都是整数,即 $c(e)$ 为整数，所以最大流流量为整数

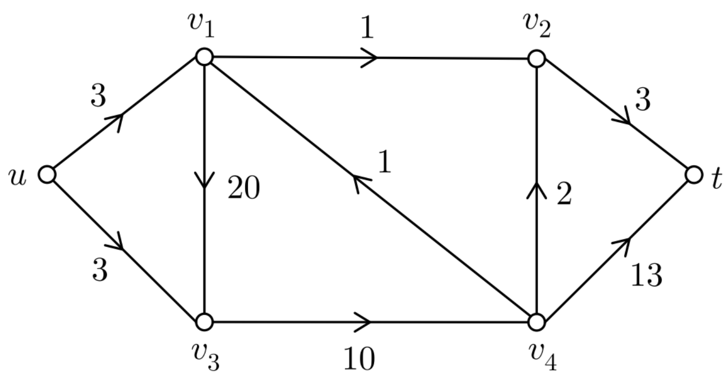
> 10、证明：在有正下界 $b(e)$ 但无上界 ($c(e)=+\infty$) 的网络中，存在可行流的充要条件是对每一条边 e，要么 e 在一个有向回路上，要么 e 在由 s 到 t 或由 t 到 s 的有向轨道上。注：当 e 在 t 到 s 的有向轨道上时，流量有可能为负值

证明

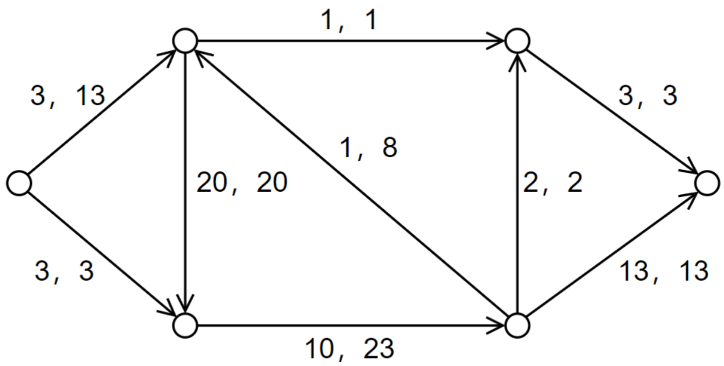
充分性：当所有边均满足题设的两个条件时，由于没有流量上限，易知可通过增加流量的方式使得每条边都满足要求，一定存在可行流；

必要性：当存在可行流时，假设存在 e 不满足题中两个条件，则边 e 在一个有向轨道 P 上，且 P 的终点不是汇 t，轨道终点的流出流量为 0，而流入边 e 的流量至少为 $b(e)$，那么流入和流出的流量不相同，矛盾。

> 11、在第 4 题中, 若边上标的数字是容量下界, 上界均为 +∞. 求该网络的最小流函数



最小流函数如下，最小流为16



> 14、用最大流最小截定理（推论 9.2）证明：任给二分图 G，G 的匹配数等于其覆盖数，即 $\alpha(G)=\beta(G)$（定理 5.2）

证明：构造 $N(D,s,t,c)$，其中 $V(D)=V(G)\cup\{s,t\}$，$E(D)=E(G)\cup(s,X)\cup(Y,t)$，$E(G)$ 中边方向为 X 到 Y，$c(e)\equiv 1$

Ⅰ. 对于 G 的最大匹配 M，若 $e=(x_i,y_j)\in M$，则令 $f(s,x_i)=f(e)=f(y_j,t)=1$，如此可得 G 的最大流函数，且流量为匹配数，假设 f 不是最大流，则存在一条可增载轨道 $P=sx_my_nt$，$l(P)>0$，$f(s,x_m)=f(x_my_n)=f(y_n,t)=0$，那么 x_my_n 没有被 M 匹配，矛盾，故 f 为最大流

Ⅱ. 考虑 G 的一个截 $(S,\bar{S})$，$S=s\cup X_S\cup Y_S$，$X_S=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\},Y_S=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，$k\le|X|=K$，$n\le|Y|=N$，则$(S,\bar{S})$ 由3部分组成

$$\begin{cases} s\text{到}\{x_{k+1},\ldots,x_K\} \\ \{x_1,\ldots,x_k\}\text{到}\{y_{n+1},\ldots,y_N\} \\ \{y_1,\ldots,y_n\}\text{到}t \end{cases}$$

第1部分和第3部分覆盖了$\{x_{k+1},\ldots,x_K\}$和$\{y_1,\ldots,y_n\}$的边

第2部分边的数目 $\geq$ 覆盖剩下的边所需的覆盖数，又$c(e)\equiv 1$，故$C(\overline{S},\bar{S})\geq\beta(G)$
下面说明可以通过最小覆盖构造一个截 S，使得最小截为最小覆盖数
对于 G 的一个最小覆盖 C，构造截 S，令 C 中属于 X 的顶点为 X_S，属于 Y 的顶点为 Y_S
，那么 $(S,\bar{S})$ 的第2部分无边，故截量等于覆盖数等于$|X_S|+|Y_S|$，即为最小截
$C(S,\bar{S})=\beta(G)$
又由最大流最小截定理可得 $\alpha(G)=\beta(G)$，证毕！