2024年秋图论第一次习题课讲义

助教组: 张芷苒 赵子恒 田佳林 邓立鑫

2024 年 10 月

讲解内容：

CH1: 4, 5, 7, 8, 9, 11, 25　　CH2: 8, 6, 16　　CH3: 15, 21, 24

CH4: 5, 7, 11, 12　　CH5: 2, 4

第一章 图的基本概念

习题相关知识点：

- 顶点度数定义
- 二分图的性质
- Euler定理
- 完全二分图
- 图的连通性
- 最长轨道法
- 圈的存在性

习题CH1-4

证明：任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多.

证明：

将每个人看作顶点，两个人是朋友则在这两人所代表的顶点之间加一条边，构造图G.

问题等价于，在任意满足 $|V(G)| \geq 2$ 的图 G 中，存在 $V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得$deg(v_i) = deg(v_j)$.

反证法：假设对任意$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，都有$deg(v_i) \neq deg(v_j)$，deg(v) 在 G 中共有—V(G)—个不同的取值，为 0, 1, ... ，—V(G)—-1，所以存在$V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得$deg(v_i) = 0, deg(v_j) = |V(G)| - 1$，即 v_i 与所有点都不相连，v_j 与所有点都相连，矛盾，假设不成立，原结论成立。

习题 CH1-5

证明：$2n(n \geq 2)$人中，每个人至少与其中的n个人认识，则其中至少有4个人，使得这四个人围桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人.

证明:

将每个人看作顶点，两个人认识则在这两人所代表的顶点之间加一条边，构造图G，V(G)=2n，$\forall v \in V(G)$，$deg(v) > n$. 问题等价于图G一定有长度为4的圈.

(1)若图G为完全图，则一定存在长度为4的圈；

(2)若图G非完全图，取不相邻的顶点 u, v，由于$deg(u) > n, deg(v) > n$，那么在剩余的 $2n-2$ 个顶点中，根据抽屉原理可得至少有两个顶点与u, v都相邻，则这 4 个顶点组成了一个长度为 4 的圈.

习题 CH1-7

证明下面的结论：

(1) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

(2)设G是二分图，$\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

证明:

（1）不妨设 $K_{m,n} = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，其中$|X| = mfi|Y| = n$ 由二分图$K_{m,n}$定义：$\forall u \in X, v \in Y$，有$deg(u) = m, deg(v) = n$ 则有：

$$\sum_{v \in V(K_{m,n})} \deg(v) = \sum_{u \in X} \deg(\mathrm{u}) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2mn$$

由Euler定理，$\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

（2）设G的二分图的两个部分节点数量分别为m, n，显然有 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(K_{m,n}), V(G) = m + n$ 并且由(1)可得 $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$，所以有 $\varepsilon(G) \leq mn \leq (m+n)^2/4$，即 $\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

习题 CH1-8

设G是图，给定$V(G)$的非空真子集Vß，记k为一个端点在Vß中，另一个端点在$V(G) - V'$中的边数。若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数.

证明:

设ε是V'的顶点导出子图的边的个数，V_o'和V_e'是V'中顶点度数为奇数和偶数的集合，则有

$$k = \sum_{v \in V'} deg(v) - 2\varepsilon = \sum_{v \in V_o'} deg(v) + \sum_{v \in V_e'} deg(v) - 2\varepsilon$$

因为 2ε 和 $\sum_{v \in V_e'} deg(v)$ 一定是偶数，所以k的奇偶只和 $\sum_{v \in V_o'} deg(v)$ 有关，故若V'中度数为奇数的顶点数为偶数，则k为偶数；否则，k为奇数.

习题 CH1-9

证明：每个顶点的度数都是2的连通图是一个圈.

证明:

用最长轨法来证明，设 $P(u,v)=v_0(=u)v_1...v_k(=v)$ 为图中最长轨道，由于 v_0 度数为2，存在不同于v_1的点 w 与其相邻，若 w 不在 P 上，则 $P(u,v)+uw$ 为更长的轨道，与假设矛盾，若 w 在 P 上，则 $w=v$，否则 $\deg(\mathrm{w})=3$。综上，$P(u,v)+uv$ 为一个圈，且由于图为连通图，不可能有孤立点，由于每个顶点的度数都是 2，不可能有点单独与圈上点相连，故 $P(u,v)+uv$ 即为整个图，那么该图为一个圈，证毕.

习题 CH1-25

设 G 是简单图. 证明:

(1) 若 $\epsilon(G)>\nu(G)$, 则 G 中有圈;

(2) 若 $\epsilon(G)>\nu(G)+4$, 则 G 中有两个无公共边的圈.

证明：

(1) 使用反证法，假设 G 不含圈，则 G 为一棵树（或森林），有$\epsilon(G)\leq\nu(G)-1$，与题目条件矛盾。故得证。

习题 CH1-25

证明： 通过对顶点数 $\nu(G)(\nu(G) \geq 5$，见幻灯片) 进行归纳整理：

1. **基始情形** $\nu(G) = 5$：
   若 $\epsilon(G) \geq 9$，相当于图 K_5 至多删去一条边。这时可以验证，图中必然存在两个无公共边的圈，因此该情形成立。

2. **归纳假设**：假设当 $\nu(G) < k$ 时命题成立。

3. **归纳步** $\nu(G) = k$：
   若 $\epsilon(G) \geq \nu(G) + 4 > \nu(G)$，则根据 (1) 已知，图中必然存在一个圈。分以下几种情况：

   (a) 若图 G 中存在长度为 3 或 4 的圈 C，我们删除该圈的所有边，剩下的图 G' 依然满足 $\epsilon(G') \geq \nu(G)$。由归纳假设知，G' 中依然存在一个圈，并且与 C 无公共边，因此结论成立。

   (b) 若图 G 中所有圈的长度都大于等于 5，则无三角形或四边形。我们进一步讨论如下情况：

   - 若存在某个顶点 v 使得 $\deg(v) \leq 1$，删除该点及其关联的一条边，使得图的阶数降为 $k-1$，由归纳假设可知此时存在两个无公共边的圈，将此顶点及边加回不会破坏此性质。
   - 若存在某个顶点 v 使得 $\deg(v) = 2$，设与之相邻的两点为 v_1 和 v_2。由于没有三角形，所以 v_1 和 v_2 不相邻。我们可以考虑删除顶点 v 及边 vv_1 和 vv_2，并添加边 v_1v_2。此时图的阶数降为 $k-1$，由归纳假设，图中存在两个无公共边的圈。若 v_1v_2 属于圈中，则替换回 vv_1 和 vv_2 仍满足条件；若 v_1v_2 不在圈中，加回来也不影响无公共边的圈的存在性。
   - 若对任意顶点 v，均有 $\deg(v) \geq 3$，则 $\delta(G) \geq 3$。以下考虑 $\epsilon(G) = \nu(G) + 4$ 的情况，若 $\epsilon(G) > \nu(G) + 4$，则可以先删去一些边，再将其加回来，不会影响性质。

   由于 $\sum \deg(v) = 2\epsilon(G) \geq 3\nu(G)$，结合 $\epsilon(G) = \nu(G) + 4$，得 $\nu(G) \leq 8$。我们接下来证明此时 G 必定包含长度为 3 或 4 的圈，从而矛盾。

   - 考虑 G 中的最短圈 C：
     - 若 $r = \nu(G)$，则由于 $\epsilon(G) = \nu(G) + 4$，必定存在其他边，这与假设 C 为最短圈矛盾。
     - 若 $r = \nu(G) - 1$，由于 $\forall v, \deg(v) \geq 3$，则每个圈上的点都与圈外的点相连，从而形成三角形，这与假设矛盾。
     - 若 $r \leq \nu(G) - 2$，并且 $r \geq 5$，此时 $\nu(G) = 7$ 或 8。

   (c) 当 $\nu(G) = 7$ 时，$\epsilon(G) = 11$：
   若圈长 $r = 5$，则圈上有 5 条边，圈外 2 点至多连 1 条边。因此，圈外必有一点至少与圈上点有三条边，形成三角形，矛盾。

   (d) 当 $\nu(G) = 8$ 时，$\epsilon(G) = 12$：

   - 若圈长 $r = 5$，圈上有 5 条边，圈外 3 点至多有 2 条边，必有一点至少与圈上点有两条边，从而形成四边形，矛盾。
   - 若圈长 $r = 6$，圈上有 6 条边，圈外 2 点至多连 1 条边，则圈外必有一点至少与圈上点有三条边，从而形成四边形，矛盾。

综上，证毕。

第二章 树

习题相关知识点：

- 树的度数序列
- 破圈法
- 最小生成树算法
- 树的中心
- 最长轨道法

习题 CH2-8

证明: 若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\nu$ 是正整数序列, 则此序列是树的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$.

证明：

充分性： 已知此序列是树的度数序列，则由树的性质有$2\epsilon = 2(\nu - 1)$, 故

$$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2\epsilon = 2(\nu - 1)$$

. **必要性：** 已知$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$，由于对任意图都有$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2\epsilon$, 所以 $2\epsilon = 2(\nu - 1)$. 当这个图无环且连通时，由$2\epsilon = 2(\nu - 1)$ 知它是树。

习题 CH2-6 < 知识点: 树的性质，最长轨道>

证明: 树有一个中心或两个中心, 且有两个中心时, 这两个中心相邻.

方法一：

证明：

考虑最长轨道 $v_0 v_1 \cdots v_k$.

若 k 为偶数，显然 $l\left(v_{k/2}\right) = k/2$, 则$v_{k/2}$ 是唯一中心；若 k 为奇数， $v_{(k\pm1)/2}$ 是两相邻中心。

同时，最长轨道上的其它点距离某端距离都大于最长轨道的中心点与这个端点的距离，因此不可能是树的中心。

另外，其它任意不在最长轨道上的点 u , 必与最长轨道上点连通, 因此到最长轨道某一端的距离会大于原选定的最长轨道的中心点到该端的距离，从而也不可能是树的中心。

习题 CH2-6 < 知识点: 树的性质，最长轨道>

证明: 树有一个中心或两个中心, 且有两个中心时, 这两个中心相邻.

方法二：

证明：

$\nu(G) = 1$~2 时显然成立.

考虑 $\nu(G) \geq 3$ 的情形。显然，树叶不可能是中心。考虑进行如下操作：依次删除树叶结点及与之关联的边，直至剩下的结点不是树叶结点，最后只可能是两种情况：

1. 若只剩下一个顶点，说明该树只有一个中心。
2. 若不剩任何顶点，前一步必然是 K_2，则说明该树有两个中心，且相邻。

下面说明每次删除树叶后的原图的中心还是中心:

由中心定义，其离心率最小，而删除树叶后，会导致所有点的离心率要么不变，要么 -1 ，而中心的离心率必然 -1 (以其为一段端点的最长轨道末端必然是树叶，否则与最长轨道矛盾）。从而其离心率依然最小，仍为中心。

习题 CH2-26 < 知识点: 破圈法，生成树算法>

(1) 试给出破圈法的算法.

(2) 证明: 破圈法得到的生成树是最小生成树.

(3) 分析破圈法的时间复杂度.

参考解答：

(1)

输入：加权图$G = (V(G), E(G), \omega)$.

输出：G的一棵生成树的边子集E'.

1. 在图中找一个圈，若无，转4；
2. 去掉该圈中权值最大的边；
3. 重复1、2；
4. 输出边的集合。

(2)

证明：

假设存在一个最小生成树 T 包含被删除的边 e_{max}。由于 e_{max} 在一个圈中，去掉 e_{max} 会使得圈被破坏，但图仍然连通。因此，可以构造一个新的生成树 $T' = T - e_{max} + e$，其中 e 是此圈中除了 e_{max} 以外的任意一条边。

由于 e_{max} 的权值最大，替换后的生成树 T' 的权值和小于或等于 T 的权值和，这与 T 是最小生成树的假设矛盾。故得证。

(3)

第1，2步最多循环 $\epsilon - (\nu - 1)$ 次，因为最多删掉这么多条边；

对于每一次循环，在图中找圈的时间为 $O(\epsilon)$，在一个圈里寻找权值最大边的时间复杂度是 $O(\epsilon)$，这两个操作顺序进行，总时间复杂度依然是$O(\epsilon)$。

故总时间复杂度为 $O(\epsilon(\epsilon - \nu))$.

第三章 图的连通性

习题相关知识点：

- 割顶
- 生成树
- 图的边连通性
- 扇形定理

习题CH3-15 $<$ 知识点: 割顶, 生成树$>$

证明：只有两个顶点不是割顶的连通图是一条轨道。

参考解答：

Insight：轨道的特点是 $\Delta(G) \leq 2$，所以我们证明的重点是不存在 $v \in V(G)$，$\deg(v) \geq 3$。

一个显然的事实是：H 是连通图 G 的生成子图。如果顶点 $v \in V(G)$ 不是 H 的割顶，那么 v 也不是 G 的割顶。

假设 $\exists v \in V(G), \deg(v) \geq 3$，图 G 存在生成树 T，满足 $\Delta(T) \geq 3$。根据习题 2.4 的结论，T 至少有 3 个叶子节点。这三个叶子节点都不是 T 的割顶，所以也不是 G 的割顶，和题目的条件矛盾。所以 $\forall v \in V(G), \deg(v) \leq 2$。

这样的图 G 是轨道或圈。由于 G 是简单图，所以 G 是圈的话，$|G| \geq 3$，且 G 的所有顶点都不是割顶。所以 G 是轨道。

习题CH3-21 $<$ 知识点: 图的边连通性$>$

设 e 是2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G-e$ 也是2-连通图，则称 e 是可删除的。证明: $v(G) \geq 4$ 的2-连通图 G 的每一条边要么是可收缩的，要么是可删除的。

参考解答：

设 e 是 2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G-e$ 也是 2-连通图，则称 e 是可删除的。证明：$v(G) \geq 4$ 的 2-连通图 G 的每一条边要么是可收缩的，要么是可删除的。

两种证明思路：(1)如果 e 不可删除，那么 e 可收缩；(2)如果 e 不可收缩，那么 e 可删除。

我们这里选择第一种进行讲解。

如果 $e = xy$ 不可删除，则在图 $G-e$ 存在割顶，将 $G-e$ 的顶点集合分为两个划分，x 和 y 分别属于其中一个。由此可见，$G-e$ 中 x 到 y 只存在一条无公共内顶的轨道。

下面证明，如果 $G-e$ 不是 2-连通的，那么 $G \cdot e$ 是 2-连通的。

设 $e = xy$ 收缩为顶点 w。对于 $G \cdot e$ 的任意两个顶点 $u \neq v$，它们在原来的图 G 中有两条无公共内顶的轨道。这两条轨道和 $e = xy$ 的关系有以下四种情况：

对于 case 1, 2, 4，收缩掉 $e = xy$ 后，原来的两条 u 到 v 的轨道显然还是没有公共内顶的。

case 3 是不可能存在的，因为在图 $G-e$ 中，x 到 y 有两条无内顶轨道。

所以，如果 $G-e$ 不是 2-连通的，那么 $G \cdot e$ 一定是 2-连通的。即，e 要么是可删除的，要么是可收缩的。

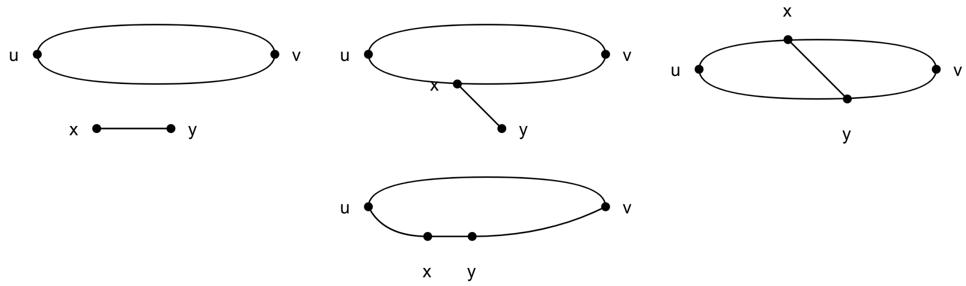

图 1: 习题 CH 3-21四种情况

习题CH3-24 ＜ 知识点: 扇形＞

设 G 是一个图，$x \in V(G)$，$Y \subset V(G)-\{x\}$，$Z \subset V(G)-\{x\}$，$|Y|<|Z|$。假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形，则存在 $z \in Z-Y$，使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形。

参考解答：

几个错误的做法:（1）直接把 Z 中不属于 Y 的一个顶点并入（2）扇形定理 (3) 只考虑一条 x 到 y 的路径.

从一种错误的解法开始(下图2):如果存在 $z \in Z$, x 到 z 的路径和 x 到 Y 的扇形除了 x 外没有公共顶点, 那么可以将 x 到此 z 的路径加入扇形中.

否则,x 到 Z 中所有顶点的路径都和 x 到 Y 的扇形有公共顶点. 因为 $|Z|>|Y|$, 由抽屉原理可知, $\exists y_1 \in Y, z_1, z_2 \in Z$, 使得 $P(x,z_1), P(x,z_2)$ 和 $P(x,y_1)$ 均有除 x 的公共顶点. 假设该路径上的最后一个公共顶点在 $P(x,z_2)$ 上, 我们把 z_1 加入扇形, 并按犹如所示修改 $P(x,y)$ 即可.

Insight 反思:

1. 应该考虑多个 y
2. 一个 z 只能被一个 y “征用”

基于以上思想, 我们可以提出问题的一个算法证明.

1. 对于所有 $y \in Y$, 标记最后出现在 x 到 Z 扇形中的顶点.
2. 如果$z \in Z$, $P(x,z)$的多个顶点被标记, 则取消除了第一个标记以外的标记, 对于被取消标记的$P(x,y)$, 标记距离 x 更近的一个 x 到 Z 扇形公共顶点.
3. 重复Step 2, 直到每个$P(x,z)$上至多有一个标记.
4. 对于所有$y \in Y$, 若$P(x,y)$上有标记, 那么标记以前的路径替换为 x 到 Z 扇形的对应部分
5. 由于$|Z|>|Y|$, 一定存在路径上没有被标记的$z \in Z$. 选取此 z 即可.

两点说明　1. 算法一定会终止　2. 算法的正确性

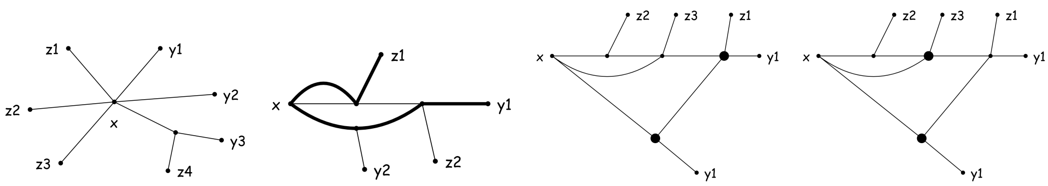

图 2: 习题 CH 3-24

第四章 平面图

习题相关知识点：

- **平面图的定义**
- **连通平图的Euler公式：**
- **图的度数限制**
- **Kuratowski定理**
- **平面图的嵌入和性质**
- **极大平面图**
- **图的厚度**

习题CH4-5

设 ω 是平面图 G 的连通片个数，则 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=\omega+1$。

参考答案：

1. 当 $\omega=1$ 时，图 G 是一个连通图。由欧拉公式 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=2$ 可知，公式在此情况下成立，即：
$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=\omega+1=2$$
2. 归纳假设：假设对于连通片数量为 ω 的平面图 G，公式 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=\omega+1$ 成立。现在考虑 $\omega+1$ 个连通片的情形。设 G 增加了一个新的连通片 G'，满足欧拉公式，即：
$$\nu(G')-\varepsilon(G')+\varphi(G')=2$$
但由于新增加的连通片在外部面上被计算了两次，需要将其外部面减去 1。因此，整个图的欧拉特性为：
$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=(\omega+1)+1=\omega+2$$
由数学归纳法可得，对于任何连通片数量 ω 的平面图 G，原式均成立。

习题CH4-7

设 G 是 ν 个顶点 ε 条边的简单平面图，$\varepsilon<30$，证明存在顶点 $v\in V(G)$，使得
$$\deg(v)\leq 4.$$

参考答案：

若 $\nu\leq 5$，显然成立。考虑 $\nu\geq 6$ 的情况。

假设 $\forall v,\deg(v)\geq 5$，则由度数之和公式，有 $2\varepsilon\geq 5\nu$。

另一方面，由平面图的边界条件，得 $\varepsilon\leq 3\nu-6$。

结合这两个不等式，可以推出：

$$\Rightarrow 0\leq \nu-12$$
$$\Rightarrow \nu\geq 12,\ \varepsilon\geq 30$$

这与 $\varepsilon<30$ 矛盾。因此，假设不成立，必存在顶点 $v\in V(G)$，使得 $\deg(v)\leq 4$。

习题CH4-11

一个连通平面图是 2-连通的，当且仅当它的每个面的边界都是圈。

参考答案：

必要性：由 2-连通性可知，图中没有割边或割顶，任何一个面都不能通过移除一条边或一个点导致图的割裂，因此每个面的边界都是一个简单圈。

充分性：若每个面的边界都是圈，则每个顶点都位于至少一个圈的边界上。删除任意一个顶点不会破坏其余顶点之间的连通性，因为图中无割点，因此整个图是 2-连通的。

习题CH4-12

证明: 在 v ≥ 7 的连通平面图上可以选取不超过 5 个顶点, 把它们删除后得到的图不连通.

参考答案：

由推论4.3，$\sigma \leq 5$。删去度数最小的顶点所关联的顶点即可，此时该点孤立，图不连通。

第五章 匹配理论

习题相关知识点：

- **树的性质**
- **完备匹配**

习题CH5-2

证明: 树至多有一个完备匹配.

参考答案：

假设树 T 存在两个不同的完备匹配 M_1 和 M_2，则 $M_1 \oplus M_2 \neq \varnothing$，且 $T[M_1 \oplus M_2]$ 中每个顶点的度数都是 2。由例 1.8，$\delta(G) \geq 2$，有圈，这与 T 是树矛盾。

习题CH5-4

两个人在图 G 上博弈，交替选择不同的顶点 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，使得当 $i > 0$ 时，v_i 与 v_{i-1} 相邻，直到不能选到顶点为止，谁最后能选到一个顶点谁赢。证明：第一个选顶点的人有必胜的策略，当且仅当 G 中无完备匹配，并给出一个必胜的策略。

参考答案：

第一个玩家的必胜策略如下：

- 在初始选择时，第一个玩家选择任何一个顶点 v_0。
- 随后的每一步中，第一个玩家始终沿着路径选择一个尚未被访问且与前一顶点相邻的顶点。
- 由于图 G 中没有完美匹配，按照这种路径选择的方式，第二个玩家最终会陷入无法继续选择的困境，从而输掉比赛。

必要性：假设图中存在完美匹配 M。在这种情况下，无论第一个玩家怎么选择，第二个玩家都可以始终选择与当前顶点 v 相匹配的顶点，从而跟随第一个玩家的策略，确保自己最终不会陷入困境。因此，若存在完美匹配 M，则第二个玩家会获胜。

充分性：考虑图 G 中一个最大的匹配 M。根据最大匹配的性质，我们可以确定以下情况：

- 若 v_0 是孤立点（即在 M 中没有匹配的顶点），则第一个玩家直接获胜。
- 若 v_0 在匹配中，即与某个顶点 v_1 相连，则第一个玩家选择路径中的下一个顶点。根据最大匹配的定义，无论第二个玩家如何选择，都将无法保持配对，这时第一个玩家可以通过相应的策略确保每次轮到自己时总有可选的相邻顶点。
- 增广路径策略：通过在每次选择中破坏匹配，图 G 会不断被削弱，从而让第二个玩家逐渐失去选择空间。由于 G 中没有完美匹配，因此必然存在一些无法配对的顶点。第一个玩家可以利用这些顶点，让自己在最终一轮拥有必胜的选择。

综上所述，当图 G 中不存在完美匹配时，第一个玩家可以通过上述策略，迫使第二个玩家最终无法选择而输掉比赛。