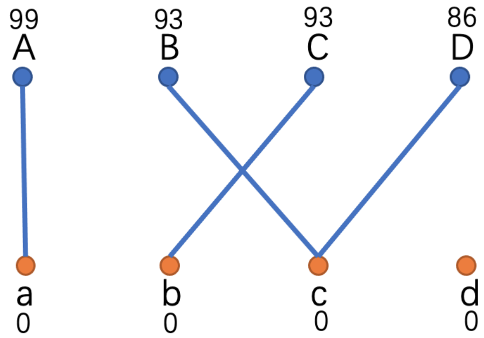
图论第6次作业答案

> ch5 17 19
> ch6 6 8 9 12 19 证明引理6.1

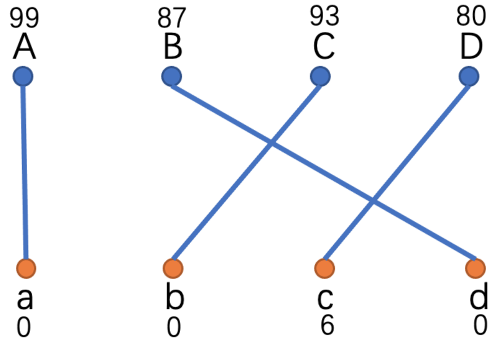
ch5 17

> 设有四个人（行） A, B, C, D, 有四分工作（列） a, b, c, d，每个人做某份工作的效率如下面的矩阵所示，试求最佳的工作分配方案。

按照Kuhn-Munkreas算法逐步计算。
构造相等子图G_l.



G_l无完备匹配，取D为未被许配的点，可得：
$Z = B, D, c$
$S = B, D$
$T = c$
$\alpha_l = 6$
重新构造相等子图：



最佳分配方案为：$A - a, B - d, C - b, D - c, \omega = 99 + 87 + 93 + 86 = 365.$

ch5 19

> 证明：Kuhn-Munkreas算法中修改顶标后，$\hat{l}$ 仍然是可行顶标。

证明:
修改的可行顶标

$$\hat{l}=\begin{cases} l(v)-\alpha_l & \text{v} \in \text{ S} \\ l(v)+\alpha_l & \text{v} \in \text{ T} \\ l(v) & \text{ 其他} \end{cases}$$

$\alpha_l=\min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-\omega(x,y)\}$

对 $\forall v\in S,u\in Y$,
(1) 若 $u\in T$

$$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)+\alpha_l=l(v)+l(u)\geq\omega(u,v)$$

(2) 若 $u\in Y$ 并且 $u\notin T$, 因为有 $\alpha_l\leq l(v)+l(u)-\omega(u,v)$

$$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)-\alpha_l+l(u)\geq l(v)+l(u)-(l(v)+l(u)-\omega(u,v))\geq\omega(u,v)$$

(3)若对 $\forall v\notin S,u\in Y$

$$\hat{l}(v)+\hat{l}(u)=l(v)+\hat{l}(u)\geq l(v)+l(u)=\omega(u,v)$$

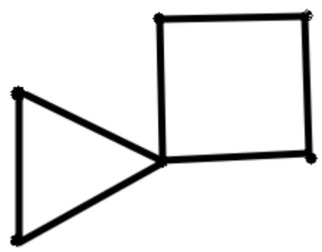
综上，Kuhn - Munkreas算法修改顶标后， $\hat{l}$ 仍然是可行顶标。

ch6 6

> 证明或否定:
> (1) 每个 Euler 二分图都有偶数条边;
> (2) 有偶数个顶点的每个 Euler 简单图有偶数条边.

(1) 对任意一个Euler二分图 $G=K_{X,Y}$ ，由二分图的性质可以得知，每条边一端在X中，另一端在 Y 中， $\sum_{u\in X}\deg(u)=\sum_{v\in Y}\deg(v)$.
同时由于Euler图的性质可知，每个点的度数为偶数，那么
$\epsilon=\frac{1}{2}\sum_{v\in G}\deg(v)=\frac{1}{2}\left(\sum_{u\in X}\deg(u)+\sum_{v\in Y}\deg(v)\right)=\sum_{u\in X}\deg(u)=$ 偶数.

(2) 反例如下：



ch6 8

> 求图6.28的一条最优投递路线.

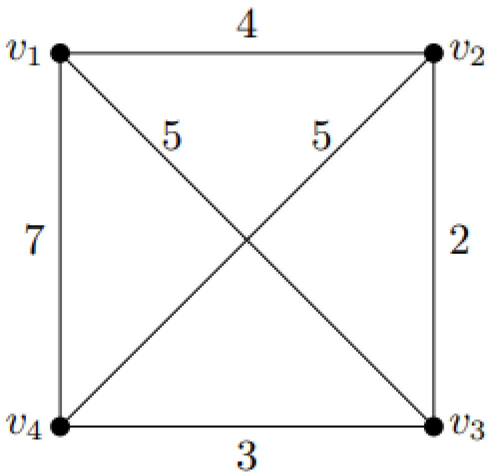
使用EJ算法。

(1) 图 G 的奇度顶集 $V_0=\{v_1,v_2,v_3,v_4\},|V_0|=4$.

(2) 由Dijkstra算法:

$$\begin{aligned}d(v_1,v_2)=4,d(v_1,v_3)=5,d(v_1,v_4)=7\\ d(v_2,v_3)=2,d(v_2,v_4)=5,d(v_3,v_4)=3\end{aligned}$$

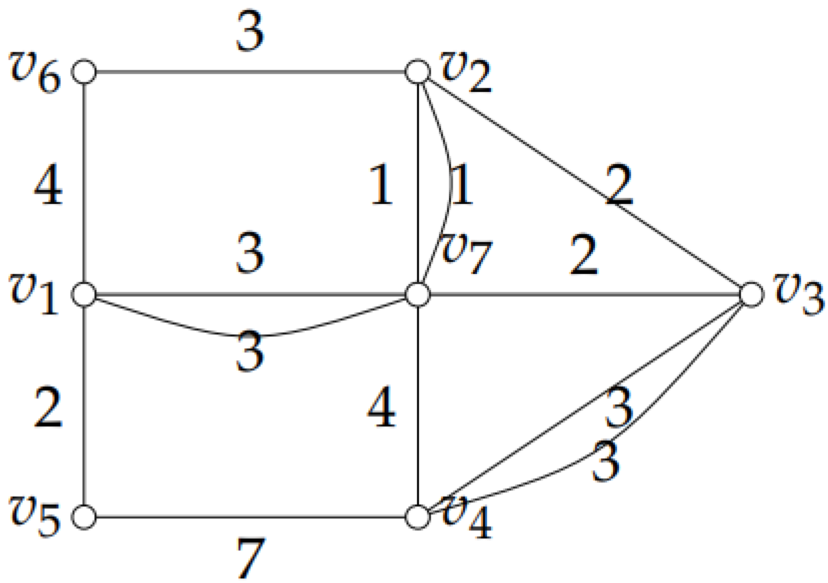
(3) 构成带权完成图 K_4：



(4) 上图 K_4 的最佳匹配 $M=\{v_1v_2,v_3v_4\}$.

在 G 中 v_1,v_2 间最短轨为 $P(v_1,v_2)=v_1v_7v_2,P(v_3,v_4)=v_3v_4$.

(5) Euler图G * 如下：



(6) 在图 G^* 找到Euler回路即为最优投递路线。

不妨设出发点（邮局）为 v_6, 则其中一条Euler回路为:

$$v_6v_2v_3v_4v_3v_7v_2v_7v_1v_7v_4v_5v_1v_6$$

ch6 9

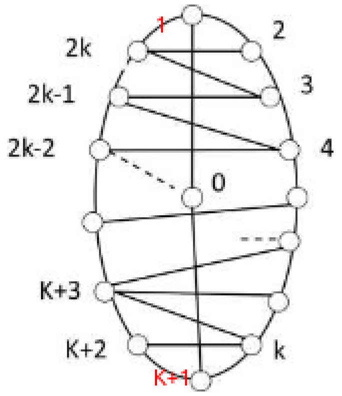
> 设 G 是二分图, 证明: 若 G 是 Hamilton 图, 则 G 必有偶数个顶点. 习题 1 中的图 6.27是 Hamilton 图吗? 为什么?

证明：
二分图无奇圈，Hamilton圈包含G中所有顶点，故G必有偶数个顶点。
图27有11个顶点且是二分图，故它不是Hamilton图。

ch6 12

> 求 K_n 中无公共边的 Hamilton 圈的个数.

假设 $n = 2k + 1$. 将节点编号为0, 1, ..., 2k:



在上图中先取一条哈密顿回路为 $0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4 \ldots k+3, k, k+2, k+1, 0$, 然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置, 可得另一条回路为: $0, 2, 3, 1, 4, 2k, 5, \ldots k+4, k+l, k+3, k+2, 0$.
显然, 这两条回路是没有公共边。继续这样做下去，共可产生 k 条无公共边的哈密顿回路，由于共有 $\frac{(2k+1)(2k)}{2} = k(2k+1)$ ，这 k 条边每条路径是 $(2k+1)$ 长度，因此结果是完备的。

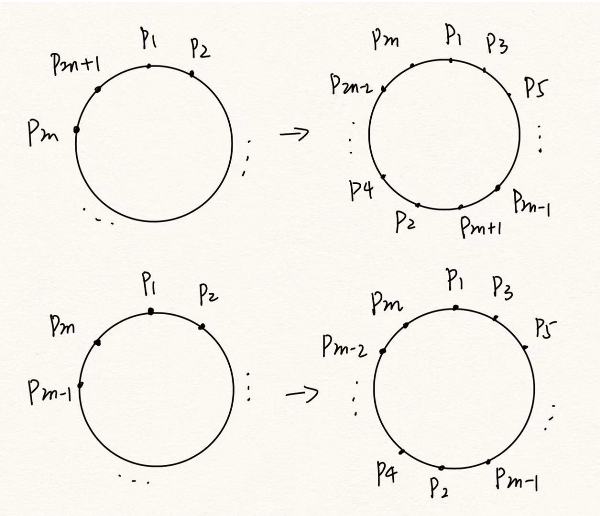
若 $n = 2k + 2$, 那么只要在中间增加一个结点 u , 每次将从 0 出发的第三条边打断 (e.g. 依照图中的数据将 v_2v_{2k} 打断成 v_2u 和 uv_{2k} ， 之后将 v_3v_1 打断成 v_3u 和 uv_1) 就可以同样地得到 k 条无公共边的哈密顿回路，同样可以证明是完备的。

所以结果圈个数为 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

ch6 19

> 若围一张圆桌坐着至少 6 个人, 那么一定可以调整他们的位置, 使得每个人两侧都挨着新邻居.

设这大于等于6个人依次为p_1到p_n，进行如下操作：



（给出例子或者是证明含Hamilton圈都可。）

引理6.1

只需证明 $G+uv$ 是Hamilton图 $\rightarrow G$是Hamilton图。

假设G不是Hamilton图，则G中存在一个Hamilton圈包含uv，则G中存在以$u=v_1$为起点，$v=v_\nu$的Hamilton轨道。

令$S=\{v_i|uv_{i+1}\in E(G)\}$, $T=\{v_i|v_iv\in E(G')\}$, 有$v_\nu\notin S\cup T$, $|S\cup T|<\nu(G)$.

1. 若$S\cap T=\emptyset$, 则$|S\cap T|=0$. 有 $deg(u)+deg(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<\nu(G)$.与条件矛盾。
2. 若$S\cap T!=\emptyset$, 则$\exists v_i\in S\cap T$, 则G中有Hamilton圈，与假设矛盾。
   综上得证。