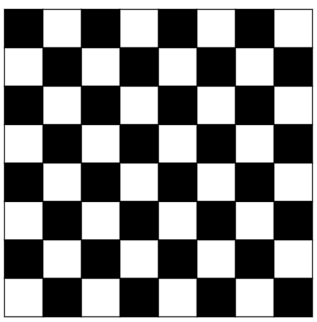
第五次作业参考答案

Ch5 - 6，7，11，13，14，15

> 6.证明：8×8的正方形去除对角上的两个1×1的小正方形后，不能用1×2的长方形覆盖。

证明：
如图对大正方形进行染色。设小正方形为顶点，若两方格相邻，则有边，记白色小正方形集合为X，黑色小正方形集合为Y，于是上述去掉两个对角方块的大正方形对应于一个二分图G，原命题等价于图G没有完备匹配。而$|X|=|Y|+2$，显然G不存在完备匹配，故大正方形无法被覆盖。



> 7.证明：二分图G有完备匹配的充要条件是，对任何$S\subseteq V(G)$，都满足$|N(S)|\geq|S|$。这个命题对一般图成立吗？

证明：
设$V(G)=X\cup Y, X\cap Y=\emptyset, S_X=S\cap X, S_Y=S\cap Y,$
则$|S|=|S_X|+|S_Y|, |N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|.$
（1）必要性：
因为二分图G有完备匹配，所以X中的顶点都被许配。
由$Hall$定理，有$|N(S_X)|\geq|S_X|$. 同理，$|N(S_Y)|\geq|S_Y|$.
$|N(S)|=|N(S_X)|+|N(S_Y)|\geq|S_X|+|S_Y|=|S|$
（2）充分性：
不妨设$|X|\geq|Y|$，取$S\subset X$，由$Hall$定理，存在匹配M，使得X中的顶点都被匹配。
由于$|X|\geq|Y|$，Y中的顶点也相应地都被匹配，所以匹配M即为二分图G的完备匹配。

对一般图不成立，例如K_3满足$|N(S)| \geq S$，但是没有完备匹配。
（感觉有上面这个反例就够了，不用证明那么多）

> 11.设G是顶点集合划分为X与Y的二分图，则G的最大匹配中的边数等于$|X| - max_{S \subset X}(|S| - |N(s)|)$。

证明：
令$B = X - S$,
$|X| - max(|S| - |N(S)|) = min(|X| - |S| + |N(S)|) = min(|B| + |N(X - B)|)$,易知$B \cup N(X - B)$是$G$的一个覆盖，且$G$的任一最小覆盖都可以写成这样的形式，又$G$是二分图则由定理5.2（二分图匹配数等于覆盖数）知成立。

> 13.用Tutte定理来证明Hall定理。

$Tutte$定理：图G（G为一般图，不一定是二分图）由完备匹配$\Leftrightarrow \forall S \subseteq V(G)$，都有$o(G - S) \leq |S|$.
$Hall$定理：二分图$G, V(G) = X \bigcup Y$，且$X \bigcap Y = \emptyset$，存在将X中的顶点都许配的匹配$\Leftrightarrow \forall S \subseteq X$都有$|N(S)| \geq |S|$，其中$N(S)$为$S$的邻顶集合。

证明:
对二分图$G = (X, Y, E)$，当v为偶数时，加一些边使得Y为完全图；当v时奇数时，加一些边和顶点y_0使得$Y \bigcup y_0$是完全图。图G变成完全图H，G中存在将X中所有顶点都许配的匹配的充要条件是H有完备匹配。此时$Hall$定理等价于H有完备匹配的充要条件是$\forall S \subseteq X, |N_H(S)| \geq |S|$.

（1）必要性:
$\forall S \subseteq X$, 由$Tutte$定理，$o(H - N_H(S)) \leq |N_H(S)|$
在$H - N_H(S)$中，S中点都是孤立点，所以$|S| \leq o(H - N_H(S))$，$|N_H(S)| \geq |S|$.

（2）充分性:
对$\forall S \subseteq V(H)$，并设$S = S_1 \bigcup S_2$，且$S_1 \bigcup X, S_2 \bigcup Y$.
因为Y是一个完全图，则在H中删去S_1不会增加连通片个数，且最多产生一个奇片. 删去S_2可能会使得X中有孤立顶点，设此时X中的孤立顶点为S_3，则$|N(S_3)| \leq |S_2|$，则有
$|S_3| \leq |N(S_3)| \leq |S_2|$
若$|S_3| = |S_2|$，则$o(H - S_2) = |S_3| = |S_2|$；
若$|S_3| \leq |S_2| - 1$，则$o(H - S_2) \leq |S_3| + 1 \leq |S_2|$；

若$|S_1|$为偶数，则$o(H-S)=o(H-S_2)\leq|S_2|\leq|S|$;
若$|S_1|$为奇数，则$o(H-S)=o(H-S_2)+1\leq|S_2|+1\leq|S|$;
综上，对$\forall S\subseteq V(H)$，都有$o(H-S)\leq|S|$. 由$Tutte$定理，H为有完备匹配的图。

> 14.证明：若G是$k-1$边连通的k度正则图，且$\nu(G)$是偶数，则G有完备匹配。

证明：设$S\subseteq V(G)$，$G_1,G_2,...,G_n$是$G-S$中的奇片，m_i是G_i与S间的边数。因为图G是$k-1$边连通图，则有

$$m_i\geq k-1$$

并且通过

$$m_i=k|V(G_i)|-2|E(G_i)|$$

可以得到m_i和k同奇偶，所以有

$$m_i\geq k$$

由此我们可以得出

$$k|S|\geq\sum_{i=1}^{n}m_i\geq nk$$

即

$$|S|\geq n=o(G-S)$$

所以由$Tutte$定理可得G有完全匹配。

> 15.证明：树T有完备匹配，当且仅当对任意$v\in V(T)$，都有$o(T-v)=1$。

证明:
（1）必要性:
树T有完备匹配，由$Tutte$定理，$\forall S\subseteq V(T)$, 都有$o(T-S)\leq|S|$。令$S=\{v\}$，则$o(T-v)\leq1$
树T有完备匹配，则$|T|$为偶数，$|T-v|$为奇数，所以$o(T-v)\geq1$
综上，$o(T-v)=1$

（2）充分性:
$\forall v\subseteq V(T)$，都有$o(T-v)=1$，则$V(T)$为偶数

删去v后，树T被划分成若干个连通片，且只有一个连通片为奇片，设奇片中与v相连的顶点为u，在树T中，确定一个v后，由于$o(T-v)=1$，所以u被唯一确定，并且$e=uv$也是被唯一确定的。

由对称性可知，若删去u，v所在的连通片变成了奇片，且他们的连接被唯一确定。

因为v是任意的，所以对于树中的每个顶点都有如上的配对，这就是T中的完备匹配。