图论第四次（第6周）作业答案

邓立鑫　　2024 年 10 月

本次作业：　Ch4: 5, 7, 11, 12;
Ch5: 2, 4.

CH4-5

设 ω 是平面图 G 的连通片个数，则 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=\omega+1$。

参考答案：

1. 当 $\omega=1$ 时，图 G 是一个连通图。由欧拉公式 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=2$ 可知，公式在此情况下成立，即：
$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=\omega+1=2$$
2. 归纳假设：假设对于连通片数量为 ω 的平面图 G，公式 $\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=\omega+1$ 成立。现在考虑 $\omega+1$ 个连通片的情形。设 G 增加了一个新的连通片 G'，满足欧拉公式，即：
$$\nu(G')-\varepsilon(G')+\varphi(G')=2$$
但由于新增加的连通片在外部面上被计算了两次，需要将其外部面减去 1。因此，整个图的欧拉特性为：
$$\nu(G)-\varepsilon(G)+\varphi(G)=(\omega+1)+1=\omega+2$$
由数学归纳法可得，对于任何连通片数量 ω 的平面图 G，原式均成立。

CH4-7

设 G 是 ν 个顶点 ε 条边的简单平面图，$\varepsilon<30$，证明存在顶点 $v\in V(G)$，使得 $\deg(v)\le 4$.

参考答案：

若 $\nu\le 5$，显然成立。考虑 $\nu\ge 6$ 的情况。

假设 $\forall v, \deg(v)\ge 5$，则由度数之和公式，有 $2\varepsilon\ge 5\nu$。

另一方面，由平面图的边界条件，得 $\varepsilon\le 3\nu-6$。

结合这两个不等式，可以推出：

$$\Rightarrow 0\le \nu-12$$
$$\Rightarrow \nu\ge 12,\ \varepsilon\ge 30$$

这与 $\varepsilon<30$ 矛盾。因此，假设不成立，必存在顶点 $v\in V(G)$，使得 $\deg(v)\le 4$。

CH4-11

一个连通平面图是 2-连通的，当且仅当它的每个面的边界都是圈。

参考答案：

必要性：由 2-连通性可知，图中没有桥（割边）。由于无桥，任何一个面都不能通过移除一条边而导致图的割裂，因此每个面的边界都是一个简单圈。

充分性：若每个面的边界都是圈，则每个顶点都位于至少一个圈的边界上。删除任意一个顶点不会破坏其余顶点之间的连通性，因为图中无割点，因此整个图是 2-连通的。

CH4-12

证明: 在 v ≥ 7 的连通平面图上可以选取不超过 5 个顶点, 把它们删除后得到的图不连通.

参考答案：

由推论4.3，$\sigma \leq 5$。删去度数最小的顶点所关联的顶点即可，此时该点孤立，图不连通。

CH5-2

证明: 树至多有一个完备匹配.

参考答案：

假设树 T 存在两个不同的完备匹配 M_1 和 M_2，则 $M_1 \oplus M_2 \neq \varnothing$，且 $T[M_1 \oplus M_2]$ 中每个顶点的度数都是 2。由例 1.8，$\delta(G) \geq 2$，有圈，这与 T 是树矛盾。

CH5-4

两个人在图 G 上博弈，交替选择不同的顶点 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，使得当 $i > 0$ 时，v_i 与 v_{i-1} 相邻，直到不能选到顶点为止，谁最后能选到一个顶点谁赢。证明：第一个选顶点的人有必胜的策略，当且仅当 G 中无完备匹配，并给出一个必胜的策略。

参考答案：

第一个玩家的必胜策略如下：

- 在初始选择时，第一个玩家选择任何一个顶点 v_0。
- 随后的每一步中，第一个玩家始终沿着路径选择一个尚未被访问且与前一顶点相邻的顶点。
- 由于图 G 中没有完美匹配，按照这种路径选择的方式，第二个玩家最终会陷入无法继续选择的困境，从而输掉比赛。

必要性：假设图中存在完美匹配 M。在这种情况下，无论第一个玩家怎么选择，第二个玩家都可以始终选择与当前顶点 v 相匹配的顶点，从而跟随第一个玩家的策略，确保自己最终不会陷入困境。因此，若存在完美匹配 M，则第二个玩家会获胜。

充分性：考虑图 G 中一个最大的匹配 M。根据最大匹配的性质，我们可以确定以下情况：

- 若 v_0 是孤立点（即在 M 中没有匹配的顶点），则第一个玩家直接获胜。
- 若 v_0 在匹配中，即与某个顶点 v_1 相连，则第一个玩家选择路径中的下一个顶点。根据最大匹配的定义，无论第二个玩家如何选择，都将无法保持配对，这时第一个玩家可以通过相应的策略确保每次轮到自己时总有可选的相邻顶点。
- 增广路径策略：通过在每次选择中破坏匹配，图 G 会不断被削弱，从而让第二个玩家逐渐失去选择空间。由于 G 中没有完美匹配，因此必然存在一些无法配对的顶点。第一个玩家可以利用这些顶点，让自己在最终一轮拥有必胜的选择。

综上所述，当图 G 中不存在完美匹配时，第一个玩家可以通过上述策略，迫使第二个玩家最终无法选择而输掉比赛。