第2-3周作业

by zzr

> 9.10 ch1 21,23,25
> 9.12 ch2 2,5,6,7
> 9.19 ch2 16,17,18,20

ch1 21

> 连通图 G 中任意两条最长的轨道都有公共顶点.

使用反证法。
假设 G 中存在两条长度为n、无公共顶点的最长轨道 P_1, P_2，易知 $n \geq 3$.
考虑两条轨道上除端点外的两点 u, v，由连通性知他们之间存在轨道，设长度为 l.
设 u 将 P_1 分为长度为 a 和 $n-a$ 的两部分，v 将 P_2 分为长度为 b 和 $n-b$ 的两部分，则有

$$max(a, n-a) + max(b, n-b) + l \geq n + l \geq n + 1$$

这与 P_1, P_2 是最长轨道矛盾。
故假设不成立，原命题得证。

ch1 23

> G 是一个简单图, $e \in E(G)$ 在一个起点与终点相同的行迹上, 则 e 在一个圈上.

若该行迹是一个圈，得证。
否则，找从起点出发后第一个在行迹上重复的顶点记为 w，利用行迹无重边的性质，一定存在从起点到该点的至少两条轨道，则构成一个圈。
若 e 在该圈上，得证；
否则，删除图中该圈除 外的所有顶点及关联的边，将 w 作为起点（也是终点），依然满足题目性质，继续重复刚才的操作，且能在有限步终止，最终 e 一定在某个圈上。

ch1 25

> 设 G 是简单图. 证明:
> (1) 若 $\epsilon(G) > \nu(G)$, 则 G 中有圈;
> (2) 若 $\epsilon(G) > \nu(G) + 4$, 则 G 中有两个无公共边的圈.

(1)

对顶点数 $\nu(G)$ 进行归纳。

1. $\nu(G)=3$ 时，显然成立（三角形）。
2. 假设 $\nu(G)<k$ 时成立，当 $\nu(G)=k$ 时，若存在 v ，使得 $deg(v)\leq 1$, 则删去该点及与之关联的边，就降至 $k-1$ 阶情形，由归纳假设知成立。若对 $\forall v, deg(v)\geq 2, \delta(G)\geq 2$, 则由例 1.8 知有圈。
   综上得证。

(2)

对顶点数 $\nu(G)$ 进行归纳。

首先注意到 $\nu(G)(\nu(G)-1)/2\geq\epsilon(G)\geq\nu(G)+4$ ，得 $\nu(G)\geq 5$ 。

1.$\nu(G)=5$ 时， $\epsilon(G)\geq 9$ ，即相当于 K_5 至多删一条边，经验证，显然成立。

2.假设 $\nu(G)<k$ 时成立，当 $\nu(G)=k$ 时， $\epsilon(G)\geq\nu(G)+4>\nu(G)$ ，由(1)知必有圈。

若 G 中存在长度为 3 或 4 的圈 C ，则删去圈 C 的所有边依然满足 $\epsilon(G)\geq\nu(G)$ ，仍然有圈，且与 C 无公共边，成立。

否则，所有圈长度大于等于5 (无三角形或四边形) 。

若 $\exists v$, 使得 $\deg(v)\leq 1$ ，删除此点及与之关联的一条边即降为 $k-1$ 阶情形，由归纳假设知存在两个无公共边的圈，再加回来也不破坏，成立。

若 $\exists v$, 使得 $\deg(v)=2$ ，设与之相邻两点 v_1、v_2 ，由于无三角形，则 v_1 与 v_2 不相邻，考虑删去 v 及 vv_1、vv_2 ，加上 v_1v_2 ，降至 $k-1$ 阶情形，由归纳假设知存在两个无公共边的圈，若 v_1v_2 在圈中，将其替换回 vv_1、vv_2 依然满足；若不在圈中，加回来显然满足。

若 $\forall v, \deg(v)\geq 3$ ，以下考虑 $\epsilon(G)=\nu(G)+4$ 情形，若 $\epsilon(G)>\nu(G)+4$ ，删边即可，最后加回去不改变性质。

易知 $\delta(G)\geq 3$ ，从而 $\sum\deg(v)=2\epsilon(G)\geq 3\nu(G)$ ，结合 $\epsilon(G)=\nu(G)+4$ ，得 $\nu(G)\leq 8$ 。下证此情形必定存在三角形或四边形，从而不可能出现。

易知 G 中有圈，设 C 为圈长最短的圈，则圈中点除了圈上的边之外不会有其他边，否则与圈长最短矛盾。设圈长为 r 。

若 $r=\nu(G)$ ，由于 $\epsilon(G)=\nu(G)+4$ ，必定存在其他边，矛盾!

若 $r=\nu(G)-1$ ，由 $\forall v, \deg(v)\geq 3$ ，则只能是圈上每一点都与圈外那一点相连，从而存在三角形，矛盾!

若 $r\leq\nu(G)-2$ ，而 $r\geq 5$ 。所以 $\nu(G)=7\text{或}8$ 。

若 $\nu(G)=7$ ，则 $\epsilon(G)=11$，r 只能为 5 ，圈上有 5 条边，圈外 2 点至多连 1 条边，故圈外必有一点至少与圈上点有三条边，必存在三角形，矛盾!

若 $\nu(G)=8$ ，则 $\epsilon(G)=12$ 。

若 $r=5$，圈上有 5 条边，则圈外 3 点至多有 2 条边，必有一点至少与圈上点有两条边，从而必定存在四边形，矛盾!
若 $r=6$，圈上有 6 条边，圈外 2 点至多连 1 条边，则圈外必有一点至少与圈上点有三条边，必存在四边形，矛盾!

综上，证毕。

ch2 2

> 一棵树 T 有 n_i 个度数为 i 的顶点, i = 2, 3, · · · , k, 其余顶点都是树叶, 则 T 有几片树叶？

由图的性质有: $2\epsilon(T)=\sum_{i=1}^{k} i n_i$
由树的性质有: $\epsilon(T)=v(T)-1=\sum_{i=1}^{k} n_i-1$.
联立可得: $n_1=\sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i+2$

ch2 5

> 图 G 是森林当且仅当 $\varepsilon=\nu-\omega$, 其中 ω 是 G 的连通片个数, $\omega>1$.

必要性：对每个连通片, 有 $\epsilon_i=\nu_i-1$，累加有 $\epsilon=\sum\epsilon_i=\sum\nu_i-1=\nu-\omega$.
充分性：首先，对每个连通片有 $\epsilon_i\geq\nu_i-1$，从而 $\epsilon=\sum\epsilon_i\geq\sum\nu_i-1=\nu-\omega$，而现在 $\epsilon=\nu-\omega$，则对每个连通片等号都必须成立，那么每个连通片都是树(定理 2.1(4))，因此 G 是森林。

ch2 6

> 证明: 树有一个中心或两个中心, 且有两个中心时, 这两个中心相邻.

$\nu(G)=1或2$ 时显然成立. 考虑 $\nu(G)\geq 3$ 的情形。

显然，树叶不可能是中心，考虑进行如下操作，依次删除树叶结点及与之关联的边，直至剩下的结点不是树叶结点，最后只可能是两种情况：

若只剩下一个顶点，说明该树只有一个中心。

若不剩任何顶点，前一步必然是 K_2，则说明该树有两个中心，且相邻。下面说明每次删除树叶后的原图的中心还是中心。

由中心定义，其离心率最小，而删除树叶后，会导致所有点的离心率要么不变，要么 -1 ，而中心的离心率必然 -1 (以其为一段端点的最长轨道末端必然是树叶，否则与最长轨道矛盾），从而其离心率依然最小，仍为中心。

法2:
考虑最长轨道 $v_0 v_1 \cdots v_k$，若 k 为偶数，$v_{k/2}$ 是唯一中心；若 k 为奇数，$v_{(k\pm1)/2}$ 是两相邻中心。
以 k 为偶数为例，显然 $l\left(v_{k/2}\right)=k/2$, 否则与最长轨道矛盾。
易知最长轨道上的其它点都不可能是中心；而考虑其它任意点 u 不在最长轨道上, 必定与最长轨道上点连通, 从而也不可能是中心。

ch2 7

> 证明: 若 G 是森林, 且有 $2k$ 个度数为奇数的顶点, 则 G 中有 k 条无公共边的轨道, 使得 G 的每条边都在这些轨道上.

对 k 归纳。
$k=1,2$ 时显然成立。
假设 $k-1$ 时成立，考虑 k 时情形，在其中一棵树取两片树叶 u、v，$P(u,v)$ 为他们之间唯一轨道，则 $G-P(u,v)$ 显然满足 $k-1$阶情形，由归纳假设有 $k-1$ 条无公共边的轨道，且每条边都在这些轨道上，加回 $P(u,v)$ 依然成立，证毕。

ch2 16

> (1) 试给出破圈法的算法.
> (2) 证明: 破圈法得到的生成树是最小生成树.
> (3) 分析破圈法的时间复杂度.

(1)

1. 在图中找一个圈；
2. 去掉该圈中权值最大的边；
3. 重复1、2直至图中无圈，得到最小生成树。

(2)
最后得到的是连通无圈图，也就是树，记为 T'。
考虑与 T' 变数重合最多的最小生成树 T，记 $G=T+T'$，根据破圈法的构造过程，$G-T'$ 中的边的权值和一定大于等于 $G-T$ 中的权值和，而 T 是最小生成树，从而只能是相等，则 $\omega(T)=\omega\left(T'\right)$。

(3)
时间复杂度可以分解为几个部分：

1. 寻找权值最大边：在一个圈里用 DFS 寻找权值最大边的时间复杂度是 $O(\nu)$
2. 去掉边：去掉边的操作是常数时间 $O(1)$

3. 循环执行：$O(\epsilon)$
   故总体时间复杂度为 $O(\epsilon\nu)$.

ch2 17

> 证明: 一棵有向树 T 是有根树, 当且仅当 T 中有且仅有一个顶点的入度为 0.

必要性：由定义，有且仅有根的入度为 0 。
充分性：由于有且仅有一点入度为 0 ，则其余点的入度必定都 ≥ 1 。而由 $\sum \deg^+(v) = \epsilon(G) = \nu(G) - 1 \geq 0 + 1 \times (\nu(G) - 1)$ ，从而等号成立，其余点入度为 1 ，该有向树为有根树。

ch2 18

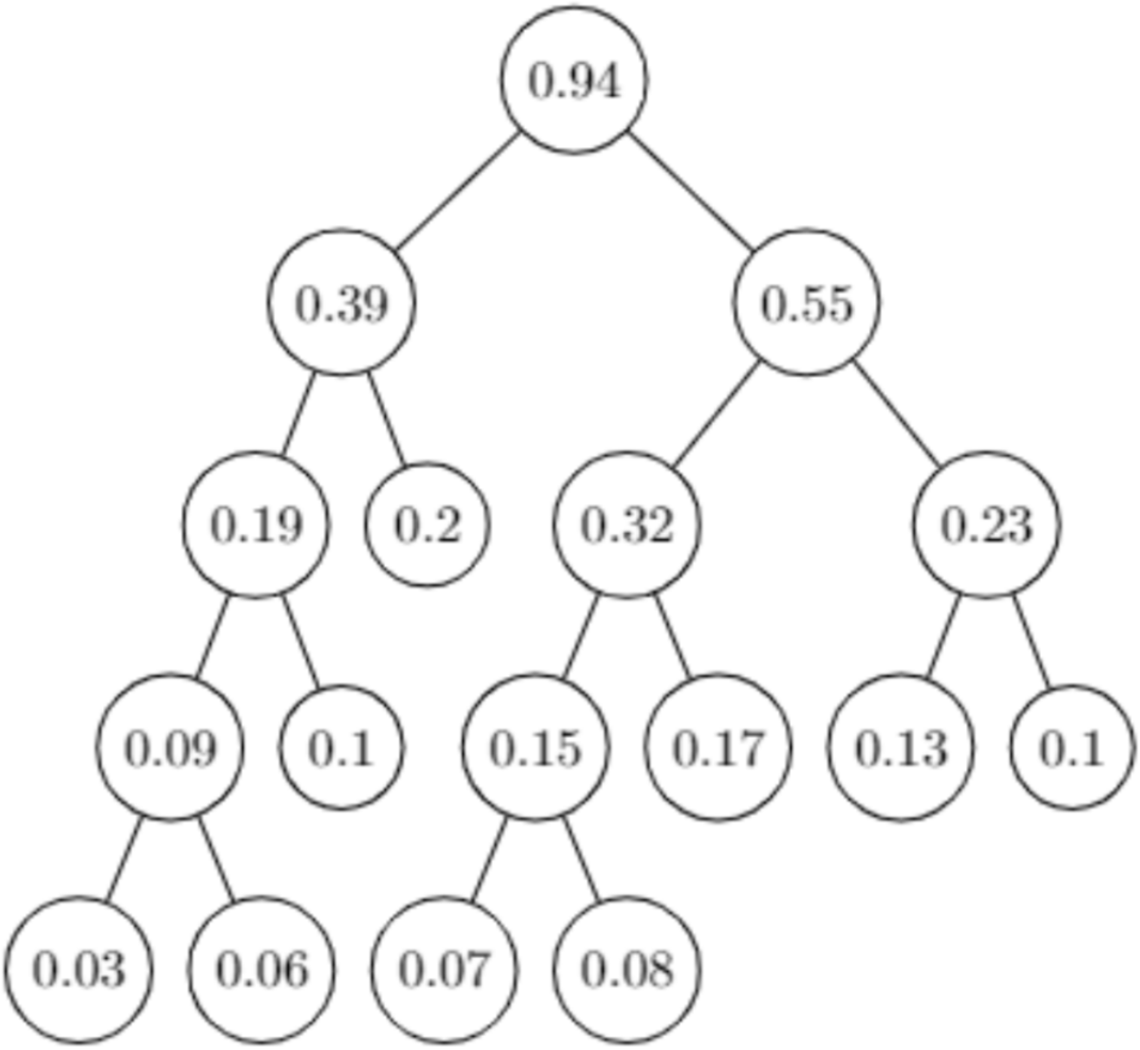
> 设 T 是二叉正则树, i 是分支点数, I 是各分支点的深度之和, L 是各树叶的深度之和, 证明: $L = I + 2i$.

对 i 作归纳。

1. $i = 1$ 时显然成立。
2. 假设 i 时成立，有 $L_i = I_i + 2i$ 。对于 $i + 1$ 情形，考虑删去一片树叶的父节点 v （是分支点）下的树叶，变为 i 情形（刚才的分支点变为了树叶)，而 $L_{i+1} = L_i - L(v) + 2(L(v) + 1), I_{i+1} = I_i + L(v)$ 。从而 $L_{i+1} = I_{i+1} + 2(i + 1)$ 成立。

ch2 20

> 画出带权 0.2, 0.17, 0.13, 0.1, 0.1, 0.08, 0.06, 0.07, 0.03 的 Huffman 树.


0.94
0.39
0.55
0.19
0.2
0.32
0.23
0.09
0.1
0.15
0.17
0.13
0.1
0.03
0.06
0.07
0.08