图论 homework 10 第九章部分

9

通过原网络的可行流构造附加网络的流:

1. 对于 $e \in E(D)$, $f'(e) = f(e)$
2. 对于 $e = (x_0, x_i)$, $f'(e) = \sum_{e\in\beta(x_i)} f(e)$
3. 对于 $e = (y_i, y_0)$, $f'(e) = \sum_{e\in\alpha(y_j)} f(e)$

对于第三类边, 可能出现 $f'(e) > c(y_j, y_0)$ 的情况, 由于只有上界的网络必然存在可行流, 所以可以通过减载使 f' 为合法的流函数, 且 (y_j, y_0)都满载.

12

$\Rightarrow$ 若网络中没有顶点子集漏掉或冒出流, 则取任意 $v \in V(G)$, 有 $\sum_{e\in\alpha(v)} c(e) - \sum_{e\in\beta(v)} b(e) \geq 0, \sum_{e\in\alpha(v)} b(e) - \sum_{e\in\beta(v)} c(e) \leq 0$. 此时存在流满足 $\forall e \in E(D), c(e) \geq f(e) \geq b(e), \forall v \in V(D) - s, t, \sum_{e\in\alpha(v)} f(e) = \sum_{e\in\beta(v)} f(e)$. 即存在可行流

$\Leftarrow$ 若网络中存在可行流, 则 $\sum_{v\in V'} \sum_{e\in\alpha(v)} f(e) - \sum_{v\in V'} \sum_{e\in\beta(v)} f(e) = \sum_{e\in\alpha(V')} f(e) - \sum_{e\in\beta(V')} f(e) = 0$. 则 $\sum_{e\in\alpha(V')} b(e) \leq \sum_{e\in\alpha(V')} f(e) = \sum_{e\in\beta(V')} f(e) \leq \sum_{e\in\beta(V')} c(e)$. 即 V' 不会漏掉流. 同理, V' 不会冒出流. 得证.

17

输入: 有供需需求的网络 $N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$.

输出: N 的最大流 f, 或判定 N 没有可行流.

1. 构造 N 的附加网络 $N' = (D', x_0, y_0, c')$
2. 用 2F 算法求出 N'的最大流函数 f'
3. 若f'满足: 任给 $1 \leq j \leq n$, f'使边(y_j, y_0)满载, 在转第4步, 否则, 输出结论 N没有可行流, 算法停止.
4. 对 $1 \leq j \leq n$, 将 $c(y_j, y_0)$改为正无穷, 再次使用2F算法求最大流, 最后将f'限制在网络 N上, 即任给 $e \in E(D)$, 令 $f(e) = f'(e)$, 则 f就是N的最大流. 算法停止.