图论第三次作业

> CH2 24 考虑n个消息符号，假设它们出现的概率分别为$p_1, p_2, ..., p_n$, 任意 p_i 均是1/2的幂且$\sum p_i = 1$.
>
> (1) 证明：概率最低的两个消息符号有相同的概率.
>
> (2) 证明：在此概率分布下，Huffman编码的平均编码长度为$-\sum p_i \lg p_i$.

(1)

反证法. 不妨设p_1的概率最低, 则其他概率可以表示为p_1的2的幂次方倍.

所有概率之和可以表示为

$$\sum p_i = p_1(1 + \sum_{j=2}^{n} 2^{l_j})$$

由于$1 + \sum_{j=2}^{n} 2^{l_j}$ 是奇数, $\sum p_i$ 不可能为1. 推出矛盾.

(2)

由(1)可知, 在Huffman树的构造过程中, 每次合并的两个节点的概率相同, 所以父节点的权值是子节点的2倍.

所以概率为$\frac{1}{2^k}$的符号的深度为k.

所以Huffman树的平均编码长度为

$$\sum_{i=1}^{n} p_i h_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(-\lg p_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \lg p_i$$

> CH2 25 在$v \geq 3$阶的连通图G中, 存在至少两个顶点, 从G中删除这两个顶点之后所得图仍然连通.

构造连通图G的任意生成树T, T中至少存在两个叶子节点v_1, v_2(定理2.2).

将这两个叶子节点删除之后的图H是连通图.

由于H是$G - v_1 - v_2$ 的子图, 所以$G - v_1 - v_2$ 是连通图.

> CH3 1 G是k-连通图, E'是G的k条边的集合, 则 $\omega(G - E') \leq 2$.

设$E'' \subset E', |E''| = k - 1$, 由于$G$是$k$-连通图, 所以任意删掉$k - 1$条边后仍然连通.

所以$G - E''$ 是连通图. 再删掉E'中最后一条边后最多形成两个连通分量. 即 $\omega(G - E') \leq 2$.

> CH3 3 G是简单图, $\delta(G) \geq v(G) - 2$, 则有$\kappa(G) = \delta(G)$.

(1) 若$\delta(G) = v(G) - 1$, 则G是完全图, $\kappa(G) = \delta(G) = v(G) - 1$.

(2) 若$\delta(G) = v(G) - 2$, 删掉G中的任意$v(G) - 3$个顶点得到子图H.

由于$\delta(G) = v(G) - 2$, 所以H中的任意顶点的度数大于等于1.

显然H是连通图. 所以 $\kappa(G) \geq v(G) - 2$.

由于G不是完全图, 所以$\kappa(G) < v(G)-1$. 所以 $\kappa(G)=v(G)-2$.

综上, G是简单图, $\delta(G) \geq v(G)-2$, 则有$\kappa(G)=\delta(G)$.

> CH3 5 G是简单图, $\delta(G) \geq v(G)/2$, 则有 $\kappa'(G)=\delta(G)$.

由于$\kappa'(G) \leq \delta(G)$, 所以只需证明 $\kappa'(G) \geq \delta(G)$.

删掉若干条边后, G分为两个连通分量, 设其中一个连通分量的顶点数为 v.

$$\text{删除的边数} \geq v\delta(G) - \frac{v(v-1)}{2} \qquad = \delta(G) + (v-1)(\delta(G) - \frac{v}{2}) \quad \geq \delta(G)$$

则 $\kappa'(G) \geq \delta(G)$.

综上, $\kappa'(G)=\delta(G)$.

> CH3 15 证明: 只有两个顶点不是割顶的连通图是一条轨道.

$v=2$是平凡情况, 下面假设 $v \geq 3$.

先证明: H是连通图G的一个生成子图, 如果顶点v不是H的割顶, 那么v也不是G的割顶.

因为 v 不是H的割顶, 所以 H 删除 v 之后依然连通, 由于 $H-v$ 是 $G-v$ 的子图, 所以 $G-v$ 也连通, 所以 v 不是 G 的割顶.

假设 $v \in G, \mathbf{deg}(v) \geq 3$, 则 G 存在生成子树 T, 满足 $\Delta(T) \geq 3$.

根据习题2.4, T 中至少存在 3 个叶子节点, 这三个叶子节点不是 T 的割顶, 所以也不是 G 的割顶.

与题目的条件矛盾, 所以 $\forall v \in G, \mathbf{deg}(v) \leq 2$.

这样的图 G 是轨道或圈. 如果 G 是圈, 在 G 中的所有顶点都不是割顶, 由于 $v \geq 3$, 所以矛盾.

所以 G 为轨道.

> CH3 17 G 是连通图, 且 $v(G) \geq 3$. 证明:
>
> (1) 若 G 有桥, 则存在 $v \in V(G)$, 使得 $\omega(G-v) > \omega(G)$;
>
> (2) 结论(1)的逆未必成立.

(1)

设 G 中有桥 $e=uw$,

取定理3.7中的划分 $V(G)=U \cup W$. 由于 $v(G) \geq 3$, 不妨设 $v \in U, v(U) \geq 2$.

则 e 在 U 和 W 之间的任意一条轨道上, 所以 u 是图 G 的割顶.

由于 U-u 和 W 都非空集, 所以根据割顶的定义, G-v 不是连通图, 即 $\omega(G-v) \geq 2$.

由于 G 是连通图, 所以 $\omega(G)=1$.

所以 $\omega(G-v) > \omega(G)$

(2)

例如 $K_{1,3}$.

> CH3 21 设 e 是 2-连通图G的一条边, 若将边删除后, 得到的图 $G-e$ 也是 2-连通图, 则称 e 是可删除的. 证明: 每个 $v(G) \geq 4$ 的2-连通图 G 每一条边要么是可收缩的, 要么是可删除的.

只需证明, 如果一条边不可收缩, 那么这条边可删除.

设e=uv不可收缩, 那么e收缩得到的顶点v'是割顶. 即{u, v}是G的顶割集.

下面通过定理3.8(2)证明G-e是块, 即对于 $\forall u, v \in V(G), u \neq v$, u和v在G-v的一个圈上.

假设顶割集{u, v}将G划分为两个连通片X, Y.

(1) 对于 $x \in V(X), y \in V(Y)$, 由Menger定理可知, G中存在两条无公共内顶的轨道P(x, y).

由于{u, v}是顶割集, 所有P(x, y)都会经过{u, v}.

所以这两条无内顶轨道均不同时经过u, v. 所以不包含边e=uv.

则这两条轨道构成圈

(2) 对于 $x_1, x_2 \in V(X), x_1 \neq x_2$, 由于G是块, 所以存在包含 x_1, x_2 的圈.

任取 $y \in V(Y)$, 由扇形定理, 可以得到由u经过y到v的轨道 P(u, y, v).

如果包含x_1, x_2的圈中含有边e, 那么将e替换为P(u, y, v)后即可得到包含x_1, x_2的回路, 继而得到包含x_1, x_2的圈.

(3) 对于至少一个顶点属于{u, v}的情况, 类比(1)(2)容易得到一个圈.

所以G-e是块.

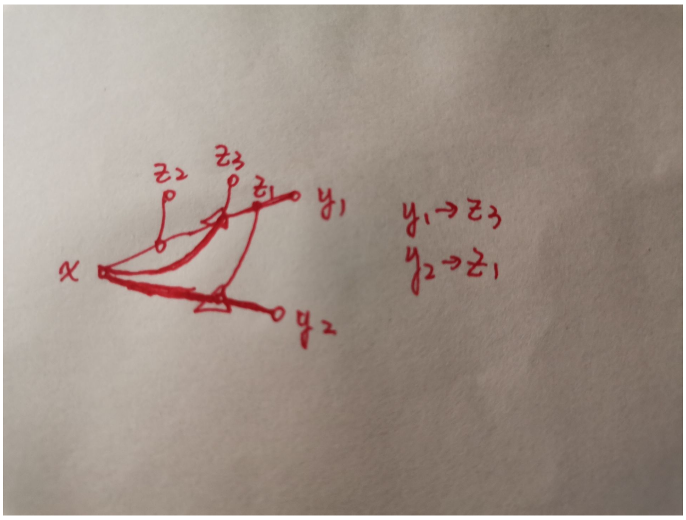
所以2-连通图 G 每一条边要么是可收缩的, 要么是可删除的.

> CH3 24 设G是一个图, $x \in V(G), Y \subseteq V(G)-x, Z \subseteq V(G)-x, |Y|<|Z|$. 假设从x到Y与从x到Z都存在扇形, 则存在 $z \in Z-Y$, 使得从x到 $Y \cup z$ 存在扇形.

我们需要根据x到Z的扇形, 调整部分x到Y的扇形的路径.

下面的算法为部分$y \in Y$找到了对应的$z \in Z$, 并把$P(x, y)$的前一部分替换为$P(x, z)$的相应部分.

(在下面的算法中, 不标记x)



1. 对于所有$y \in Y$, 标记最后出现在x到Z扇形中的顶点. 例如图中, y_1和y_2都标记z_1. (此时如果对$P(x, y_1), P(x, y_2)$ 都进行替换, 将出现重复, 继续Step 2)
2. 如果$z \in Z$, $P(x, z)$ 的多个顶点被标记, 则取消除了第一个标记以外的标记, 对于被取消标记的$P(x, y)$, 标记距离x更近的一个x到Z扇形公共顶点.(y_1标记变为z_3)
3. 重复Step 2, 直到每个$P(x, z)$ 上至多有一个标记
4. 对于所有$y \in Y$, 如果$P(x, y)$ 上有标记, 那么标记以前的路径替换为x到Z扇形的对应部分
5. 由于$|Z| > |Y|$, 一定存在路径上没有被标记的$z \in Z$. 选取此z即可.

进行两点说明:

1. 程序一定会终止

在初次标记以后, 每次标记向x方向移动, 所以有限步后算法会终止

2. 算法的正确性, 即最后所得的是合法的扇形.

    1. 标记前的部分没有重复, 因为它们属于x到Z的扇形
    2. 标记后的部分没有重复, 因为它们属于原来x到Y的扇形
    3. 标记前和标记和的部分没有重复, 因为Step 2中保留的是第一个被标记顶点