



中国科学技术大学  
University of Science and Technology of China

# 图论第二次习题课

2024 年 12 月 12 日



- 1 第 5 与第 9 次作业
- 2 第 6 次作业
- 3 第 7 与第 10 次作业
- 4 第 8 与第 11 次作业



- 1 第 5 与第 9 次作业
- 2 第 6 次作业
- 3 第 7 与第 10 次作业
- 4 第 8 与第 11 次作业



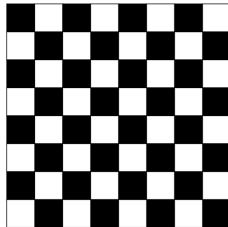
## 习题 5.6

证明： $8 \times 8$  的正方形去除对角上的两个  $1 \times 1$  的小正方形后，不能用  $1 \times 2$  的长方形覆盖.

## 习题 5.6

证明： $8 \times 8$  的正方形去除对角上的两个  $1 \times 1$  的小正方形后，不能用  $1 \times 2$  的长方形覆盖.

**证明:** 如图对大正方形进行染色. 设小正方形为顶点, 若两方格相邻, 则有边, 记白色小正方形集合为  $X$ , 黑色小正方形集合为  $Y$ , 于是上述去掉两个对角方块的大正方形对应于一个二分图  $G$ , 原命题等价于图  $G$  没有完备匹配. 而  $|X| = |Y| + 2$ , 显然  $G$  不存在完备匹配, 故大正方形无法被覆盖.





## 习题 5.7

证明：二分图  $G$  有完备匹配的充要条件是，对任何  $S \subseteq V(G)$ ，都满足  $|N(S)| \geq |S|$ .  
这个命题对一般图成立吗？

## 习题 5.7

证明：二分图  $G$  有完备匹配的充要条件是，对任何  $S \subseteq V(G)$ ，都满足  $|N(S)| \geq |S|$ .  
这个命题对一般图成立吗？

**证明：** 设  $V(G) = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset, S_X = S \cap X, S_Y = S \cap Y$ , 则

$$|S| = |S_X| + |S_Y|, |N(S)| = |N(S_X)| + |N(S_Y)|.$$

(1) 必要性：因为二分图  $G$  有完备匹配，所以  $X$  中的顶点都被匹配。由 Hall 定理，有  $|N(S_X)| \geq |S_X|$ . 同理， $|N(S_Y)| \geq |S_Y|$ .

$$|N(S)| = |N(S_X)| + |N(S_Y)| \geq |S_X| + |S_Y| = |S|$$

(2) 充分性：不妨设  $|X| \geq |Y|$ ，取  $S \subset X$ ，由 Hall 定理，存在匹配  $M$ ，使得  $X$  中的顶点都被匹配。由于  $|X| \geq |Y|$ ， $Y$  中的顶点也相应地都被匹配，所以匹配  $M$  即为二分图  $G$  的完备匹配。

对一般图不成立，例如  $K_3$  满足  $|N(S)| \geq |S|$ ，但是没有完备匹配。



## 习题 5.11

设  $G$  是顶点集合划分为  $X$  与  $Y$  的二分图, 则  $G$  的最大匹配中的边数等于  $|X| - \max_{S \subseteq X} (|S| - |N(S)|)$ .





## 习题 5.11

设  $G$  是顶点集合划分为  $X$  与  $Y$  的二分图, 则  $G$  的最大匹配中的边数等于  $|X| - \max_{S \subset X} (|S| - |N(S)|)$ .

证明: 令

$B = X - S, |X| - \max(|S| - |N(S)|) = \min(|X| - |S| + |N(S)|) = \min(|B| + |N(X - B)|)$ ,  
易知  $B \cup N(X - B)$  是  $G$  的一个覆盖, 且  $G$  的任一最小覆盖都可以写成这样的形式,  
又  $G$  是二分图则由定理 5.2 (二分图匹配数等于覆盖数) 知成立.

## 习题 5.13

用 Tutte 定理来证明 Hall 定理.

*Tutte* 定理: 图  $G$  ( $G$  为一般图, 不一定是二分图) 有完备匹配  $\Leftrightarrow \forall S \subseteq V(G)$ , 都有  $o(G - S) \leq |S|$ .

*Hall* 定理: 二分图  $G$ ,  $V(G) = X \cup Y$ , 且  $X \cap Y = \emptyset$ , 存在将  $X$  中的顶点都匹配的匹配  $\Leftrightarrow \forall S \subseteq X$  都有  $|N(S)| \geq |S|$ , 其中  $N(S)$  为  $S$  的邻顶集合.



## 习题 5.13

用 Tutte 定理来证明 Hall 定理.

**证明:** 对二分图  $G = (X, Y, E)$ , 当  $v$  为偶数时, 加一些边使得  $Y$  为完全图; 当  $v$  为奇数时, 加一些边和顶点  $y_0$  使得  $Y \cup y_0$  是完全图. 图  $G$  变成完全图  $H$ ,  $G$  中存在将  $X$  中所有顶点都匹配的匹配的充要条件是  $H$  有完备匹配. 此时 Hall 定理等价于  $H$  有完备匹配的充要条件是  $\forall S \subseteq X, |N_H(S)| \geq |S|$ .



(1) 必要性:  $\forall S \subseteq X$ , 由 *Tutte* 定理,  $o(H - N_H(S)) \leq |N_H(S)|$  在  $H - N_H(S)$  中,  $S$  中点都是孤立点, 所以  $|S| \leq o(H - N_H(S))$ ,  $|N_H(S)| \geq |S|$ .

(2) 充分性: 对  $\forall S \subseteq V(H)$ , 并设  $S = S_1 \cup S_2$ , 且  $S_1 = S \cap X, S_2 = S \cap Y$ .  
 因为  $Y$  是一个完全图, 则在  $H$  中删去  $S_1$  不会增加连通片个数, 且最多产生一个奇片. 删去  $S_2$  可能会使得  $X$  中有孤立顶点, 设此时  $X$  中的孤立顶点为  $S_3$ , 则  
 $|N(S_3)| \leq |S_2|$ , 则有  $|S_3| \leq |N(S_3)| \leq |S_2|$   
 若  $|S_3| = |S_2|$ , 则  $o(H - S_2) = |S_3| = |S_2|$ ;  
 若  $|S_3| \leq |S_2| - 1$ , 则  $o(H - S_2) \leq |S_3| + 1 \leq |S_2|$ ;  
 若  $|S_1|$  为偶数, 则  $o(H - S) = o(H - S_2) \leq |S_2| \leq |S|$ ;  
 若  $|S_1|$  为奇数, 则  $o(H - S) = o(H - S_2) + 1 \leq |S_2| + 1 \leq |S|$ ;  
 综上, 对  $\forall S \subseteq V(H)$ , 都有  $o(H - S) \leq |S|$ . 由 *Tutte* 定理,  $H$  为有完备匹配的图.



## 习题 5.14

证明：若  $G$  是  $k-1$  边连通的  $k$  度正则图，且  $\nu(G)$  是偶数，则  $G$  有完备匹配.

## 习题 5.14

证明：若  $G$  是  $k-1$  边连通的  $k$  度正则图，且  $\nu(G)$  是偶数，则  $G$  有完备匹配。

**证明：** 设  $S \subseteq V(G)$ ， $G_1, G_2, \dots, G_n$  是  $G-S$  中的奇片， $m_i$  是  $G_i$  与  $S$  间的边数。因为图  $G$  是  $k-1$  边连通图，则有  $m_i \geq k-1$  并且通过  $m_i = k|V(G_i)| - 2|E(G_i)|$  可以得到  $m_i$  和  $k$  同奇偶，所以有  $m_i \geq k$  由此我们可以得出

$$k|S| \geq \sum_{i=1}^n m_i \geq nk$$

即  $|S| \geq n = o(G-S)$

所以由 Tutte 定理可得  $G$  有完全匹配。



## 习题 5.15

证明：树  $T$  有完备匹配，当且仅当对任意  $v \in V(T)$ ，都有  $o(T - v) = 1$ .



## 习题 5.15

证明：树  $T$  有完备匹配，当且仅当对任意  $v \in V(T)$ ，都有  $o(T - v) = 1$ 。

证明：

(1) 必要性：树  $T$  有完备匹配，由 *Tutte* 定理， $\forall S \subseteq V(T)$ ，都有  $o(T - S) \leq |S|$ 。令  $S = \{v\}$ ，则  $o(T - v) \leq 1$ 。树  $T$  有完备匹配，则  $|T|$  为偶数， $|T - v|$  为奇数，所以  $o(T - v) \geq 1$ 。综上， $o(T - v) = 1$ 。

(2) 充分性： $\forall v \in V(T)$ ，都有  $o(T - v) = 1$ ，则  $V(T)$  为偶数。删去  $v$  后，树  $T$  被划分成若干个连通片，且只有一个连通片为奇片，设奇片中与  $v$  相连的顶点为  $u$ ，在树  $T$  中，确定一个  $v$  后，由于  $o(T - v) = 1$ ，所以  $u$  被唯一确定，并且  $e = uv$  也是被唯一确定的。由对称性可知，若删去  $u$ ， $v$  所在的连通片变成了奇片，且他们的连接被唯一确定。因为  $v$  是任意的，所以对于树中的每个顶点都有如上的配对，这就是  $T$  中的完备匹配。





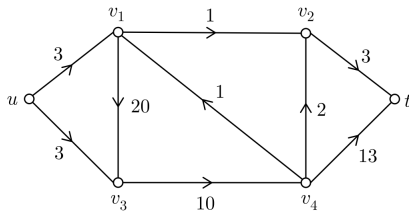
## 习题 9.2

证明: 在 *Ford – Fulkerson* 算法的第二步, 通过可增载轨道得到的函数  $\bar{f}$  是流函数.

证明见引理 9.1 的证明

## 习题 9.4

求图中网络的最大流

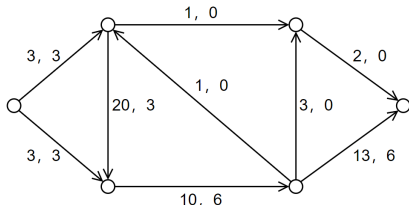


## 习题 9.4

求图中网络的最大流

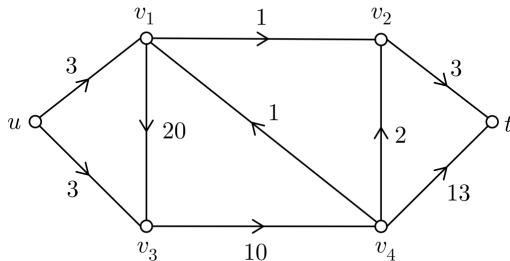
取初始流函数  $f(e) \equiv 0$ 可增载轨道  $P_1 = uv_3v_4t$ ,  $l(P_1) = \min\{3, 10, 13\} = 3$ , 修改流函数, 流量增加 3可增载轨道  $P_2 = uv_1v_3v_4t$ ,  $l(P_2) = \min\{3, 20, 10 - 3, 13 - 3\} = 3$ , 修改流函数, 流量增加 3

无可增载轨道, 最大流函数如图, 流量为 6



## 习题 9.11

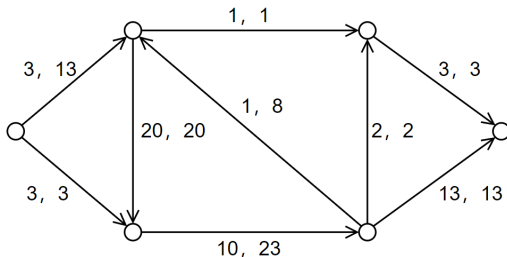
在第 4 题中, 若边上标的数字是容量下界, 上界均为  $+\infty$ . 求该网络的最小流函数.



## 习题 9.11

在第 4 题中, 若边上标的数字是容量下界, 上界均为  $+\infty$ . 求该网络的最小流函数.

取一个较大的初始流函数, 寻找“可减载轨道”直到最小  
最小流函数如图, 流量为 16





## 习题 9.5

证明：若网络中每条边的容量均为整数，则最大流的流量也一定是整数.



## 习题 9.5

证明: 若网络中每条边的容量均为整数, 则最大流的流量也一定是整数.

证明: 最大流流量 = 最小截截量 =  $C(S, \bar{S}) = \sum_{e \in (S, \bar{S})} c(e)$ , 因为每条边的容量都是整数, 即  $c(e)$  为整数, 所以最大流流量为整数.



## 习题 9.10

证明：在有正下界  $b(e)$  但无上界 ( $c(e) = +\infty$ ) 的网络中，存在可行流的充要条件是对每一条边  $e$ ，要么  $e$  在一个有向回路上，要么  $e$  在由  $s$  到  $t$  或由  $t$  到  $s$  的有向轨道上。注：当  $e$  在  $t$  到  $s$  的有向轨道上时，流量有可能为负值。





## 习题 9.10

证明：在有正下界  $b(e)$  但无上界 ( $c(e) = +\infty$ ) 的网络中，存在可行流的充要条件是对每一条边  $e$ ，要么  $e$  在一个有向回路上，要么  $e$  在由  $s$  到  $t$  或由  $t$  到  $s$  的有向轨道上。注：当  $e$  在  $t$  到  $s$  的有向轨道上时，流量有可能为负值。

证明：

- (1) 充分性：当所有边均满足题设的两个条件时，由于没有流量上限，易知可通过增加流量的方式使得每条边都满足要求，一定存在可行流；
- (2) 必要性：当存在可行流时，假设存在  $e$  不满足题中两个条件，则边  $e$  在一个有向轨道  $P$  上，且  $P$  的终点不是汇  $t$ ，轨道终点的流出流量为 0，而流入边  $e$  的流量至少为  $b(e)$ ，那么流入和流出的流量不相同，矛盾。



## 习题 9.14

14、用最大流最小截定理（推论 9.2）证明：任给二分图  $G$ ， $G$  的匹配数等于其覆盖数，即  $\alpha(G) = \beta(G)$ （定理 5.2）。



## 习题 9.14

14、用最大流最小截定理（推论 9.2）证明：任给二分图  $G$ ， $G$  的匹配数等于其覆盖数，即  $\alpha(G) = \beta(G)$ （定理 5.2）。

**证明：**构造  $N(D, s, t, c)$ ，其中  $V(D) = V(G) \cup \{s, t\}$ ， $E(D) = E(G) \cup (s, X) \cup (Y, t)$ ， $E(G)$  中边方向为  $X$  到  $Y$ ， $c(e) \equiv 1$ 。

(1) 对于  $G$  的最大匹配  $M$ ，若  $e = (x_i, y_j) \in M$ ，则令  $f(s, x_i) = f(e) = f(y_j, t) = 1$ ，如此可得  $G$  的最大流函数，且流量为匹配数，假设  $f$  不是最大流，则存在一条可增载轨道  $P = sx_my_nt$ ， $l(P) > 0$ ， $f(s, x_m) = f(x_my_n) = f(y_n, t) = 0$ ，那么  $x_my_n$  没有被  $M$  匹配，矛盾，故  $f$  为最大流。

(2) 考虑  $G$  的一个截  $(S, \bar{S})$ ,  $S = s \cup X_S \cup Y_S$ ,  
 $X_S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ,  $Y_S = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ ,  $k \leq |X| = K$ ,  $n \leq |Y| = N$ ,  
 则  $(S, \bar{S})$  由 3 部分组成

$$\begin{cases} s \text{ 到 } \{x_{k+1}, \dots, x_K\} \\ \{x_1, \dots, x_k\} \text{ 到 } \{y_{n+1}, \dots, y_N\} \\ \{y_1, \dots, y_n\} \text{ 到 } t \end{cases}$$

第 1 部分和第 3 部分覆盖了  $\{x_{k+1}, \dots, x_K\}$  和  $\{y_1, \dots, y_n\}$  的边

第 2 部分边的数目  $\geq$  覆盖剩下的边所需的覆盖数, 又  $c(e) \equiv 1$ , 故  $C(\bar{S}, \bar{S}) \geq \beta(G)$

下面说明可以通过最小覆盖构造一个截  $S$ , 使得最小截截量等于最小覆盖数

对于  $G$  的一个最小覆盖  $C$ , 构造截  $S = \{s\} \cup Y_C \cup (X - X_C)$ , 那么  $(S, \bar{S})$  的第 2 部分无边, 故截量等于覆盖数等于  $|X_S| + |Y_S|$ , 即为最小截  $C(S, \bar{S}) = \beta(G)$

又由最大流最小截定理可得  $\alpha(G) = \beta(G)$ , 证毕!

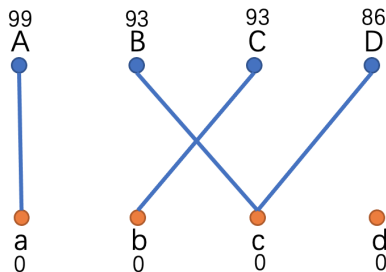


- 1 第 5 与第 9 次作业
- 2 第 6 次作业
- 3 第 7 与第 10 次作业
- 4 第 8 与第 11 次作业

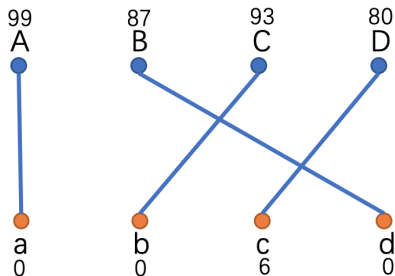
## 习题 5.17

设有四个人（行） $A, B, C, D$ ，有四分工作（列） $a, b, c, d$ ，每个人做某工作的效率如下面的矩阵所示，试求最佳的工作分配方案。

按照 Kuhn-Munkres 算法逐步计算。构造相等子图  $G_l$ 。



$G_I$  无完备匹配, 取  $D$  为未被许配的点, 可得:  $Z = B, D, c$ ;  $S = B, D$ ;  $T = c$ ;  $\alpha_I = 6$ .  
重新构造相等子图:



最佳分配方案为:  $A - a, B - d, C - b, D - c, \omega = 99 + 87 + 93 + 86 = 365$ .



## 习题 5.19

证明: Kuhn-Munkreas 算法中修改顶标后,  $\hat{l}$  仍然是可行顶标。

证明: 修改的可行顶标

$$\hat{l} = \begin{cases} l(v) - \alpha_I & v \in S \\ l(v) + \alpha_I & v \in T \\ l(v) & \text{其他} \end{cases}$$

$$\alpha_I = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - \omega(x, y)\}$$



对  $\forall v \in S, u \in Y$ ,

(1) 若  $u \in T$ ,  $\hat{l}(v) + \hat{l}(u) = l(v) - \alpha_l + l(u) + \alpha_l = l(v) + l(u) \geq \omega(u, v)$ .

(2) 若  $u \in Y$  并且  $u \notin T$ , 因为有  $\alpha_l \leq l(v) + l(u) - \omega(u, v)$ ,  
 $\hat{l}(v) + \hat{l}(u) = l(v) - \alpha_l + l(u) \geq l(v) + l(u) - (l(v) + l(u) - \omega(u, v)) \geq \omega(u, v)$

(3) 若对  $\forall v \notin S, u \in Y$ ,  $\hat{l}(v) + \hat{l}(u) = l(v) + \hat{l}(u) \geq l(v) + l(u) = \omega(u, v)$ .

综上, Kuhn - Munkreas 算法修改顶标后,  $\hat{l}$  仍然是可行顶标。

## 习题 6.6

证明或否定:

- (1) 每个 Euler 二分图都有偶数条边;
- (2) 有偶数个顶点的每个 Euler 简单图有偶数条边.

(1) 对任意一个 Euler 二分图  $G = K_{X,Y}$ , 由二分图的性质可以得知, 每条边一端在  $X$  中, 另一端在  $Y$  中,  $\sum_{u \in X} \deg(u) = \sum_{v \in Y} \deg(v)$ .

同时由于 Euler 图的性质可知, 每个点的度数为偶数, 那么

$$e = \frac{1}{2} \sum_{v \in G} \deg(v) = \frac{1}{2} \left( \sum_{u \in X} \deg(u) + \sum_{v \in Y} \deg(v) \right) = \sum_{u \in X} \deg(u) = \text{偶数}.$$

(2) 反例, 见黑板。此题很多人伪证。



## 习题 6.8

求图 6.28 的一条最优投递路线.

使用 EJ 算法。

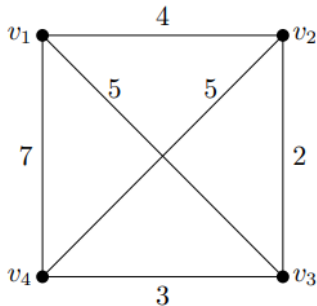
(1) 图  $G$  的奇度顶集  $V_0 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $|V_0| = 4$ .

(2) 由 Dijkstra 算法:

$$d(v_1, v_2) = 4, d(v_1, v_3) = 5, d(v_1, v_4) = 7$$

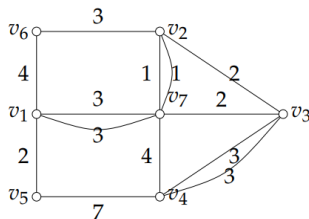
$$d(v_2, v_3) = 2, d(v_2, v_4) = 5, d(v_3, v_4) = 3$$

(3) 构成带权完成图  $K_4$  :



(4) 上图  $K_4$  的最佳匹配  $M = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ . 在  $G$  中  $v_1, v_2$  间最短轨为  $P(v_1, v_2) = v_1v_7v_2$ ,  $P(v_3, v_4) = v_3v_4$ .

(5) Euler 图  $G^*$  如下:



(6) 在图  $G^*$  找到 Euler 回路即为最优投递路线。不妨设出发点（邮局）为  $v_6$ ，则其中一条 Euler 回路为:

$v_6 v_2 v_3 v_4 v_3 v_7 v_2 v_7 v_1 v_7 v_4 v_5 v_1 v_6$



## 习题 6.9

设  $G$  是二分图, 证明: 若  $G$  是 Hamilton 图, 则  $G$  必有偶数个顶点. 习题 1 中的图 6.27 是 Hamilton 图吗? 为什么?

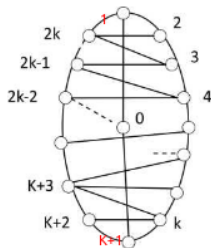
证明:

二分图无奇圈, Hamilton 圈包含  $G$  中所有顶点, 故  $G$  必有偶数个顶点. 图 27 有 11 个顶点且是二分图, 故它不是 Hamilton 图。

## 习题 6.12

求  $K_n$  中无公共边的 Hamilton 圈的个数.

假设  $n = 2k + 1$ . 将节点编号为  $0, 1, \dots, 2k$ :



在上图中先取一条哈密顿回路为  $0, 1, 2, 2k, 3, 2k-1, 4, \dots, k+3, k, k+2, k+1, 0$ , 然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置, 可得另一条回路为:

$0, 2, 3, 1, 4, 2k, 5, \dots, k+4, k+1, k+3, k+2, 0$ .

显然, 这两条回路是没有公共边。继续这样做下去, 共可产生  $k$  条无公共边的哈密顿回路, 由于共有  $\frac{(2k+1)(2k)}{2} = k(2k+1)$ , 这  $k$  条边每条路径是  $(2k+1)$  长度, 因此结果是完备的。

若  $n = 2k + 2$ , 那么只要在中增加一个结点  $u$ , 每次将从  $0$  出发的第三条边打断 (e.g. 依照图中的数据将  $v_2 v_{2k}$  打断成  $v_2 u$  和  $u v_{2k}$ , 之后将  $v_3 v_1$  打断成  $v_3 u$  和  $u v_1$ ) 就可以同样地得到  $k$  条无公共边的哈密顿回路, 同样可以证明是完备的。

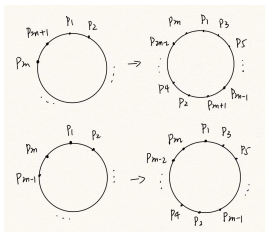
所以结果圈个数为  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ 。



## 习题 6.19

围一张圆桌坐着至少 6 个人, 那么一定可以调整他们的位置, 使得每个人两侧都挨着新邻居.

设这大于等于 6 个人依次为  $p_1$  到  $p_n$ , 进行如下操作:



给出具体操作, 或者证明是哈密顿图, 均可。



## 引理 6.1

只需证明  $G + uv$  是 Hamilton 图  $\rightarrow G$  是 Hamilton 图。

假设  $G$  不是 Hamilton 图, 则  $G$  中存在一个 Hamilton 圈包含  $uv$ , 则  $G$  中存在以  $u = v_1$  为起点,  $v = v_\nu$  的 Hamilton 轨道。

令  $S = \{v_i | uv_{i+1} \in E(G)\}$ ,  $T = \{v_i | v_i v \in E(G)\}$ , 有  $v_\nu \notin S \cup T$ ,  $|S \cup T| < \nu(G)$ .

1. 若  $S \cap T = \emptyset$ , 则  $|S \cap T| = 0$ . 有

$\deg(u) + \deg(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < \nu(G)$ . 与条件矛盾。

2. 若  $S \cap T \neq \emptyset$ , 则  $\exists v_i \in S \cap T$ , 则  $G$  中有 Hamilton 圈, 与假设矛盾。综上得证。



- 1 第 5 与第 9 次作业
- 2 第 6 次作业
- 3 第 7 与第 10 次作业
- 4 第 8 与第 11 次作业



## 习题 7.2

若  $G$  是  $\nu$  个顶点  $\varepsilon$  条边的简单图, 证明:  $\chi(G) \leq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$ .

给定顶点数  $\nu$  和边数  $\varepsilon$  求顶点色数的最大值不容易, 但是根据顶点数和顶点色数求边数的最大值较为简单.

根据着色数为  $\chi(G)$  的着色方案, 得到  $G$  顶点集合的划分:  $V_1, V_2, \dots, V_{\chi(G)}$ . 顶点数分别为  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\chi(G)}$

考虑边数  $\varepsilon$  的最大值. 我们将分别属于不同顶点子集的顶点对连一条边, 同属于一个顶点子集的顶点对不连边.



## 习题 7.2

若  $G$  是  $\nu$  个顶点  $\varepsilon$  条边的简单图, 证明:  $\chi(G) \leq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$ .

$$\begin{aligned} 2\varepsilon &\leq \nu_1(\nu - \nu_1) + \nu_2(\nu - \nu_2) + \cdots + \nu_{\chi(G)}(\nu - \nu_{\chi(G)}) \\ &= \nu^2 - (\nu_1^2 + \cdots + \nu_{\chi(G)}^2) \\ &\leq \nu^2 - \frac{(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{\chi(G)})^2}{\chi(G)} \\ &= \nu^2 - \frac{\nu^2}{\chi(G)} \end{aligned}$$

可得:  $\chi(G) \geq \frac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$ .



## 习题 7.4

设  $G$  的度数序列为  $d_1, d_2, \dots, d_\nu$ , 且  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_\nu$ , 则  
 $\chi(G) \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$ .

从顶点序列的第一项开始使用贪心算法, 即将每个顶点尽可能地染序号小的颜色.  
对于顶点  $i$ , 前面的  $i-1$  个顶点中, 与之相邻的顶点中出现的不同颜色数  $\leq i-1$ , 也  
 $\leq d_i$ , 即  $\leq \min\{d_i, i-1\}$ .  
所以前  $i$  个顶点的正常着色数  $\leq \min\{d_i + 1, i\}$ .  
上面的结论对所有  $1 \leq i \leq \nu$  都成立. 所以  $\chi(G) \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$ .



## 习题 7.6

证明:  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu + 1$ .

$\nu = 1$  时, 命题显然成立.

对于  $\nu = n \geq 2$ , 假设命题对所有  $\nu < n$  的情况成立. 任取  $v \in V(G)$ , 令  $H = G - v$ , 由归纳假设,  $\chi(H) + \chi(H^c) \leq n$ .

如果  $\chi(H) + \chi(H^c) < n$ , 即使增加  $v$  后, 图和补图的色数都增加, 其色数之和依然  $\leq n + 1$ .

## 习题 7.6

证明:  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu + 1$ .

如果  $\chi(H) + \chi(H^c) = n$  我们可以得到  $H$  的  $k_1$  着色方案和  $H^c$  的  $k_2$  着色方案, 满足  $k_1 + k_2 = n$ .

(如果我们想让  $H$  和  $H^c$  在增加  $v$  后色数均增加, 则需要让  $v$  与  $H$  和  $H^c$  中不同颜色顶点都连一条边, 所以至少要连  $\chi(H) + \chi(H^c) = n$  条边, 但是  $H$  总共只有  $n - 1$  个顶点, 所以不可能.)

(1) 若  $\deg_G(v) \leq k_1 - 1$ , 则  $v$  不可能与  $H$  中所有颜色顶点相邻,  $\chi(G) = \chi(H)$ , 所以  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq n + 1$ .

(2) 若  $\deg_G(v) \geq k_1$ , 则  $\deg_{G^c}(v) \leq n - k_1 = k_2$ , 与 (1) 同理,  $\chi(G^c) = \chi(H^c)$ , 命题也成立.

综上,  $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu + 1$ .



## 习题 7.8

轮是一个圈加上一个心顶点, 把圈上的每个顶点都和心顶点之间连一条边, 求  $\nu$  阶轮的边色数.

设轮中间的顶点为  $v_0$ , 圈上的顶点分别为  $v_0, v_1, \dots, v_{\nu-1}$ . 由于  $\deg(v_0) = \nu - 1$ , 所以  $\chi'(G) \geq \nu - 1$ .

下面给出图的  $\nu - 1$  边着色方案.

将“辐条”  $v_0 v_i$  着色为  $i$ ; 将圈上的边  $v_i v_{i+1}$  着色为  $(i + 1) \% (\nu - 1) + 1$ , 即概念上的  $i + 2$ .

所以  $\nu$  阶轮的边色数为  $\nu - 1$ .



## 习题 7.9

给出求二分图正常  $\Delta$  边着色的算法.

设  $G(X, Y, E)$  是二分图,  $|X| \geq |Y|$ . 给出图的正常  $\Delta$  边着色方案:

- ▶ 增加顶点扩充  $Y$  至  $|Y| = |X|$ . 增加边至  $\Delta$  次正则二分图  $G^*$
- ▶ 使用匈牙利算法逐次求  $G^*$  的  $\Delta$  个完备匹配
- ▶ 每个完备匹配着一种颜色
- ▶ 去掉多余的顶点和边

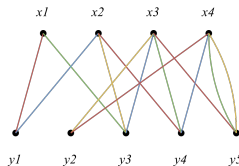
## 习题 7.14

设有 4 名教师  $x_1, x_2, \dots, x_4$  给 5 个班级  $y_1, y_2, \dots, y_5$  上课, 某天的教学要求如下:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ▶ 这一天最少需要安排多少课时? 试排出这样的课表.
- ▶ 在不增加课时数的情况下, 尝排出一个使用教室最少的课表.

需要  $\Delta = 4$  个课时.



课时/教师	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1(红)	$y_1$	$y_4$	$y_5$	$y_2$
2(蓝)		$y_1$	$y_2$	$y_4$
3(绿)	$y_3$		$y_4$	$y_5$
4(黄)		$y_3$	$y_2$	$y_5$

## 习题 7.18

证明: 一个平面图  $G$  是 2-面可着色的当且仅当  $G$  是 Euler 图.

$\Rightarrow$  不成立.

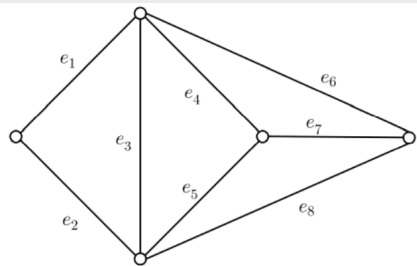


$\Leftarrow$  先证明 (CH7 16) 若一个平面图的平面嵌入是 Euler 图, 则它的对偶图是二分图.  
反证. 假设一个平面 Euler 图的对偶图不是二分图, 那么对偶图中有奇圈, 则原图中存在度数为奇数的顶点, 和 Euler 图矛盾. 证毕.

由于二分图可以正常 2-顶点着色, 所以 Euler 图可以正常 2-面着色.

## 习题 10.1

给出图  $G$  的一颗生成树  $T$ , 求出  $G$  关于  $T$  的一组基本圈组和圈空间  $\mathcal{C}(G)$  中的所有向量, 并给出图示.

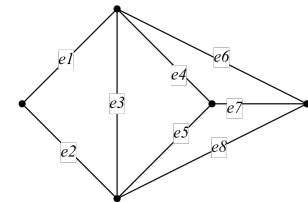


生成树:  $e_1, e_3, e_5, e_7$ . 不在生成树中的边:  
 $e_2, e_4, e_6, e_8$ .

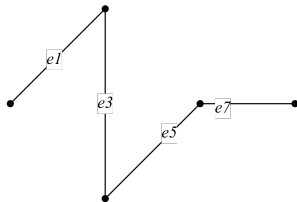
向树中依次添加不在树中的边, 得到基本圈组:

- ▶  $(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$
- ▶  $(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$
- ▶  $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$

所以圈空间中共有  $2^4 = 16$  个向量.

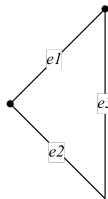


Graph

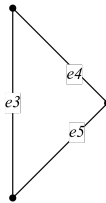


Spanning Tree

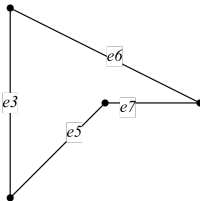
Fundamental Circuit Group



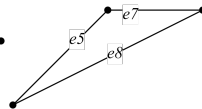
$(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$



$(0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$



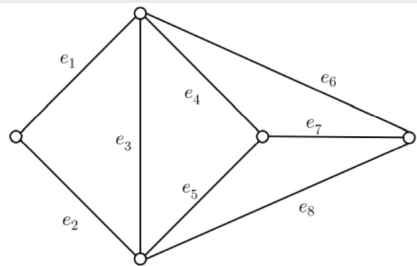
$(0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$



$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$

## 习题 10.2

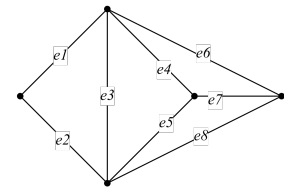
给出图  $G$  的一颗生成树  $T$ , 求出  $G$  关于  $T$  的一组基本割集组和断集空间  $\mathcal{S}(G)$  中的所有向量, 并给出图示.



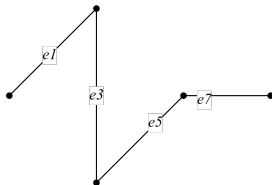
每个树边对应一个割集向量. 方法: 树边将树的顶点分割成两个集合, 对应的断集向量即为该树边对应的割集向量.

- ▶  $(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
- ▶  $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$
- ▶  $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$
- ▶  $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$

断集空间中共有 16 个向量.

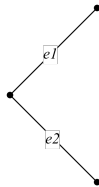


Graph

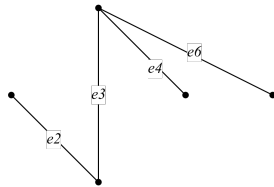


Spanning Tree

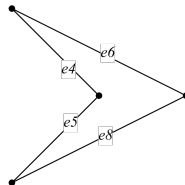
Fundamental Cut-Set Group



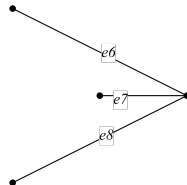
$(1,1,0,0,0,0,0,0)$



$(0,1,1,1,0,1,0,0)$



$(0,0,0,1,1,1,0,1)$



$(0,0,0,0,0,1,1,1)$





## 习题 10.3

证明定理 10.5: 给定连通图  $G$  的一颗生成树  $T$ , 其对应的基本割集组  $S_1, S_2, \dots, S_{\nu-1}$  为  $\mathcal{S}(G)$  的一组基,  $\mathcal{S}(G)$  的维数为  $\nu - 1$ .

对  $G$  中的边进行编号: 对于  $1 \leq i \leq \nu - 1$ ,  $S_i$  的树边定义为  $e_i$ ; 不在树上的边任意编号.

两个证明点:

- ▶ 基本割集组线性无关.
- ▶ 任意  $S \in \mathcal{S}_f(G)$  可以表示为基本割集组的线性组合.



## 习题 10.3

证明定理 10.5: 给定连通图  $G$  的一颗生成树  $T$ , 其对应的基本割集组  $S_1, S_2, \dots, S_{\nu-1}$  为  $\mathcal{S}(G)$  的一组基,  $\mathcal{S}(G)$  的维数为  $\nu - 1$ .

► 基本割集组线性无关.

若存在常数  $k_1, k_2, \dots, k_{\nu-1}$ , 使

$$\begin{aligned} & k_1 S_1 + k_2 S_2 + \dots + k_{\nu-1} S_{\nu-1} \\ &= (*, \dots, *, k_1, k_2, \dots, k_{\nu-1}) \\ &= (0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

则  $k_1 = k_2 = \dots = k_{\nu-1} = 0$ . 所以基本割集组线性无关.

## 习题 10.3

证明定理 10.5: 给定连通图  $G$  的一颗生成树  $T$ , 其对应的基本割集组  $S_1, S_2, \dots, S_{\nu-1}$  为  $\mathcal{S}(G)$  的一组基,  $\mathcal{S}(G)$  的维数为  $\nu - 1$ .

► 任意  $S \in \mathcal{S}_f(G)$  可以表示为基本割集组的线性组合.

设  $S$  在树上的边分别为  $e_{i_1}, \dots, e_{i_t}$ . 则

$$S' = S + S_{i_1} + \dots + S_{i_t} = (*, \dots, *, 0, \dots, 0)$$

后面的 0 表示上面的向量不含在树上的边. 所以  $G$  删掉  $S'$  对应的边集后依然连通. 又因为  $S$  和  $S_i$  属于断集空间, 所以  $S'$  也属于断集空间, 所以只能是零向量. 即任意  $S \in \mathcal{S}_f(G)$  可以表示为基本割集组的线性组合.

上面两点足以说明  $S_1, S_2, \dots, S_{\nu-1}$  为  $\mathcal{S}(G)$  的一组基,  $\mathcal{S}(G)$  的维数为  $\nu - 1$ .

## 习题 10.4

证明:  $G$  是 Euler 图, 当且仅当任给  $S \in \mathcal{S}(G)$ ,  $S$  中非零分量有偶数个.

$\Rightarrow$  若  $G$  是 Euler 图, 任取顶点划分  $(V, \overline{V})$ . 将图  $G$  中的边分为 3 类:

1. 边的两个顶点都在  $V$  中 ( $k_1$ ), 每条边对  $V$  顶点度数贡献为 2.
2. 边一个顶点在  $V$  中, 另一个顶点在  $\overline{V}$  中 ( $k_2$ ). 这部分边对应断集  $S$ , 每条边对  $V$  顶点度数贡献为 1.
3. 边的两个顶点都在  $\overline{V}$  中 ( $k_3$ ), 对  $V$  顶点度数贡献为 0.

由于  $G$  是 Euler 图, 所以  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2k_1 + k_2$  为偶数, 所以  $k_2$  为偶数, 即断集内的边数为偶数.

$\Leftarrow$  对于任意顶点  $v$ , 取  $V = \{v\}$ , 则  $(V, \overline{V})$  即为和  $v$  关联的边, 数量为偶数. 所以  $G$  中所有顶点的度数均为偶数. 所以  $G$  是 Euler 图.



## 习题 10.9

已知图  $G$  的基本圈矩阵为

$$C_f(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求  $G$  的基本割集矩阵  $S_f(G)$ .

将  $C_f(G)$  进行行列变换:

$$C_f(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

由推论 10.1,  $G$  的基本割集矩阵可以为  $S_f(G) = (S_{11} : I_{\nu-1})$ , 其中  $S_{11} = C_{12}^T$ .

$$S_f(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



即:

$$S_f(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



- 1 第 5 与第 9 次作业
- 2 第 6 次作业
- 3 第 7 与第 10 次作业
- 4 第 8 与第 11 次作业





## 习题 8.2

设  $D$  是没有有向圈的有向图.

(1) 证明:  $\delta^- = 0$ .

(2) 试证: 存在  $D$  的一个顶点序列  $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ , 使得对于任给  $i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ),  $D$  的每条以  $v_i$  为终点的有向边在  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$  中都有它的起点.

(1) 假设  $\delta^- \geq 1$ . 取任一点  $v_0$ , 令  $S = \{v_0\}$ , 则存在  $v_1$  使得  $(v_1, v_0) \in E(D)$ , 且  $v_1 \notin S$  (否则存在有向圈). 令  $S = S \cup \{v_1\}$ , 再找到  $v_2$  使得  $(v_2, v_1) \in E$ , 且  $v_2 \notin S$ . 以此类推, 对于  $S = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , 可以找到  $v_{n+1}$ , 使得  $(v_{n+1}, v_n) \in E$ , 且  $v_{n+1} \notin S$ , 与图  $D$  顶点数有限矛盾. 故有  $\delta^- = 0$ .



## 习题 8.2

设  $D$  是没有有向圈的有向图.

(1) 证明:  $\delta^- = 0$ .

(2) 试证: 存在  $D$  的一个顶点序列  $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ , 使得对于任给  $i$  ( $1 \leq i \leq \nu$ ),  $D$  的每条以  $v_i$  为终点的有向边在  $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$  中都有它的起点.

(2) 图  $D$  中  $\delta^- = 0$ , 取  $v_1 \in V(D)$ , 使得  $\deg_D^-(v_1) = 0$ . 记  $D_1 = D - \{v_1\}$ , 则  $D_1$  中也没有有向圈, 则可选择  $v_2 \in D_1$ , 使得  $\deg_{D_1}^-(v_2) = 0$ . 以此类推.

## 习题 8.4

判断图中的各有向图是否强连通，如果不是，再判断是否单向连通，是否弱连通。

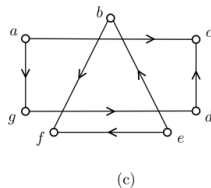
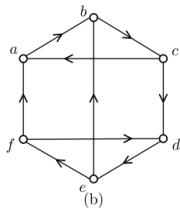
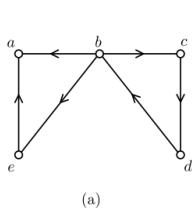
解析：考察强连通、单向连通、弱连通概念的理解。

任两点间双向有路 / 任两点间至少单向有路 / 底图是连通的无向图

(a) 从  $a$  不可达  $b$ ，不为强连通，为单向连通，为弱连通。

(b) 强连通

(c) 不为强连通，不为单向连通，不为弱连通图。





## 习题 8.6

证明：连接有向图同一个强连通片中两个顶点的有向通路上的所有顶点也都在这个强连通片中。

设  $P(u, v)$  是连接有向图同一个强连通片中两个顶点  $u, v$  的一条有向通路。因为  $u, v$  强连通，故则存在有向通路  $P(v, u)$ 。

对  $P(u, v)$  上的任意两点  $u', v'$ （可能与  $u, v$  重合）不妨设  $P(u, v) = P(u, u') + P(u', v') + p(v', v)$ 。则  $P(u', v')$  是  $u'$  到  $v'$  的有向通路， $P(v', v) + P(v, u) + p(u, u')$  为从  $v'$  到  $u'$  的有向通路。

由  $u', v'$  选取的任意性知结论成立。

一句话概括： $P(u, v)$  上的点可以通过  $v$  到达连通片上的任意点，连通片上的任意点可以通过  $u$  到达  $P(u, v)$  上的点。

## 习题 8.3

证明：任给无向图  $G$ ， $G$  都有一个定向图  $D$ ，使得对于所有  $v \in V$ ， $|\deg^+(v) - \deg^-(v)| \leq 1$  成立。

参考答案：

若  $G$  中存在奇度顶点  $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ （奇度顶点必为偶数），则  $G' = G + \{v_i v_{i+k} | 1 \leq i \leq k\}$  为欧拉图，图中存在一条欧拉回路，沿着回路给每条边定向得到图  $D'$ ，对于  $\forall v \in D'$ ，都有  $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ 。

再将  $\{v_i v_{i+k} | 1 \leq i \leq k\}$  从  $D'$  中删去，得到  $G$  的一个定向图  $D$ ，从  $D'$  到  $D$ ，每个顶点关联的边至多减少 1，故在  $D$  中，对于所有的  $v \in V$ ， $|\deg^+(v) - \deg^-(v)| \leq 1$  成立。



## 习题 8.7

证明无向图  $G$  有一种定向方法, 使得其最长有向轨道的长度不超过  $\Delta$ .

参考答案:

设  $C = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  是无向图  $G$  的一个正常  $k$  着色, 其中  $k = \chi(G)$ , 对  $V_i$  中的顶点染成  $i$  色.

在原来的无向图中, 相邻两点分别染成  $i$  色和  $j$  色, 若  $i < j$ , 那么增加从  $i$  色点到  $j$  色点的有向边.

因此  $G$  的最长轨道长度  $\leq \chi(G) - 1 \leq (\Delta + 1) - 1 = \Delta$ .



## 习题 8.14

证明： $\nu \geq 3$  阶的竞赛图中有得分相同的顶点，当且仅当图中有长为 3 的有向圈。

**必要性：**

记两个得分相同的顶点为  $v_1$  和  $v_2$ 。

对于除此两点之外的其他顶点，一定存在至少一个点不同时输或赢给了  $v_1$  和  $v_2$ 。否则，若所有点都要么赢了  $v_1$  和  $v_2$ ，要么输给了  $v_1$  和  $v_2$ ， $v_1$  和  $v_2$  的得分之差一定是 2，它们得分不相同，和假设条件矛盾。

假设  $v_1$  输给了  $v_2$ ，那么在不同时输或赢给了  $v_1$  和  $v_2$  的点中，一定存在一个点  $v_3$  输给了  $v_2$  且赢了  $v_1$ ，否则  $v_1$  和  $v_2$  的得分依旧不可能相等。则  $v_1$ 、 $v_2$  与  $v_3$  构成一个 3 度有向圈。

## 习题 8.14

证明： $\nu \geq 3$  阶的竞赛图中有得分相同的顶点，当且仅当图中有长为 3 的有向圈。

**充分性：**

首先将图中全输或全赢的顶点去掉，剩余的图记作  $G$ 。由于原图存在至少一个 3 度有向圈，故  $n \geq 3$ 。

对于竞赛图  $G$  中的顶点  $v_i$ ，得分  $s_i = \deg^+ v_i - \deg^- v_i$ 。又因为有向图  $G$  是完全图，故  $\deg^+ v_i + \deg^- v_i = n - 1$ 。

联合上述两式，可得  $s_i = 2\deg^+ v_i - n + 1$ 。由于  $G$  中没有全胜或全负的顶点，故  $\deg^+ v_i \in [1, n - 2]$ 。由**鸽巢原理**，必定有两个顶点得分相同。

Q.E.D.





## 习题 10.15

给定  $n$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

试用图论方法求：

1.  $A^2$  的主对角线之和；
2.  $A^3$  的主对角线之和。

(教材) **定理 10.8**: 设  $D = (V, E)$  是有向图, 其邻接矩阵为  $A(D) = (a_{ij})_{\nu \times \nu}$ . 记  $A^n(D) = (a_{ij}^{(n)})_{\nu \times \nu}$ , 则  $a_{ij}^{(n)}$  为  $D$  中从  $v_i$  到  $v_j$  长为  $n$  的有向路径数.

具体到本题:

1.  $A$  是一个循环置换矩阵, 对应环状顶点排列  $(1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n \rightarrow 1)$ .
2. 对角线上元素  $a_{ii}^{(n)}$  为  $G$  中从  $v_i$  到自身长为  $n$  的有向路径数..
3. 当且仅当  $n$  整除  $k$  时, 从任意点出发走  $k$  步都会回到自身. 此时  $A^k$  就是恒等矩阵  $I$  (因为每个点都映射回自己), 故  $\text{trace}(A^k) = n$ .
4. 如果  $n$  不能整除  $k$ , 则不会有任何点走  $k$  步后返回原点, 因此  $\text{trace}(A^k) = 0$ .

## 习题 10.15

给定  $n$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

试用图论方法求：

1.  $A^2$  的主对角线之和；
2.  $A^3$  的主对角线之和.

答案：

1.  $A^2$  的主对角线之和为：

$$\text{trace}(A^2) = \begin{cases} 2 & \text{若 } n = 2, \\ 0 & \text{若 } n \neq 2. \end{cases}$$

2.  $A^3$  的主对角线之和为：

$$\text{trace}(A^3) = \begin{cases} 3 & \text{若 } n = 3, \\ 0 & \text{若 } n \neq 3. \end{cases}$$

## 习题 10.17

图  $G$  的每个基本圈向量中, 非零分量的个数皆为偶数,  $G$  的邻接矩阵为  $A(G)$ , 求  $\sum_{i=1}^{+\infty} A^{2i-1}(G)$ .

解析:

图  $G$  的每个基本圈向量中, 非零分量的个数皆为偶数

$\Leftrightarrow$

$G$  中不存在长度为奇数的圈, 即  $G$  是二分图

1. 如果  $v_i, v_j \in X$  (同一边) 或者  $v_i, v_j \in Y$  (同一边), 则从  $v_i$  到  $v_j$  的路径长度必须为偶数才能存在. 因此, 奇数长度的路径个数  $a_{ij}^{(2i-1)} = 0$ .
2. 如果  $v_i \in X, v_j \in Y$  或  $v_i \in Y, v_j \in X$  (分属两边), 若  $G$  中  $v_i$  到  $v_j$  可达, 则  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}^{(2i-1)} = \infty$ , 否则两点间无路则  $a_{ij}^{(2i-1)} = 0$ .



## 习题 10.17

图  $G$  的每个基本圈向量中, 非零分量的个数皆为偶数,  $G$  的邻接矩阵为  $A(G)$ , 求  $\sum_{i=1}^{+\infty} A^{2i-1}(G)$ .

解析 (续):

因此:

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_{ij}^{(2i-1)} = \begin{cases} \infty, & v_i \text{ 与 } v_j \text{ 间可达;} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



## 习题 10.20

题目：已知图  $G$  的基本关联矩阵为

$$B_f(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

在不画出图的前提下，回答以下问题：

1.  $G$  是否连通图？
2.  $G$  是否 Euler 图？
3.  $e - v + 1 = ?$
4.  $C(G)$  是多少维线性空间？
5.  $G$  共有几个圈，为什么？

答案：

1. 是（基本关联矩阵的秩为  $v - 1 = 3$ ）。
2. 否（ $v_2$  度数为奇）。
3.  $e - v + 1 = 2$
4.  $C(G) = 2$ （ $C(G)$  的维数等于图的回路基数）
5. 3（两个基圈加它们的对称差）。