图论第八次（第11周）作业答案

邓立鑫　　2024 年 11 月

本次作业：　Ch8: 2, 4, 6;

　　　　　　Ch8: 3, 7, 14.

CH8-2

2. 设 D 是没有有向圈的有向图。

(1) 证明：$\delta^- = 0$。

(2) 试证：存在 D 的一个顶点序列 $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$，使得对于任给 i $(1 \le i \le \nu)$，D 的每条以 v_i 为终点的有向边在 $\{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$ 中都有它的起点。

参考答案：

(1) 假设 $\delta^- \ge 1$。取任一点 v_0，令 $S = \{v_0\}$，则存在 v_1 使得 $(v_1, v_0) \in E(D)$，且 $v_1 \notin S$（否则存在有向圈）。令 $S = S \bigcup \{v_1\}$，再找到 v_2 使得 $(v_2, v_1) \in E$，且 $v_2 \notin S$。以此类推，对于 $S = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$，可以找到 v_{n+1}，使得 $(v_{n+1}, v_n) \in E$，且 $v_{n+1} \notin S$，与图 D 顶点数有限矛盾。故有 $\delta^- = 0$。

(2) 图 D 中 $\delta^+ = 0$，取 $v_1 \in V(D)$，使得 $\deg^+_D(v_1) = 0$。记 $D_1 = D - \{v_1\}$，则 D_1 中也没有有向圈，则可选择 $v_2 \in D_1$，使得 $\deg^+_{D_1}(v_2) = 0$。以此类推。

CH8-4

4. 判断图 8.15 中的各有向图是否强连通，如果不是，再判断是否单向连通，是否弱连通。

参考答案：

(a) 从 a 不可达 b，不为强连通，为单向连通，为弱连通。

(b) 强连通

(c) 不为强连通，不为单向连通，不为弱连通图。

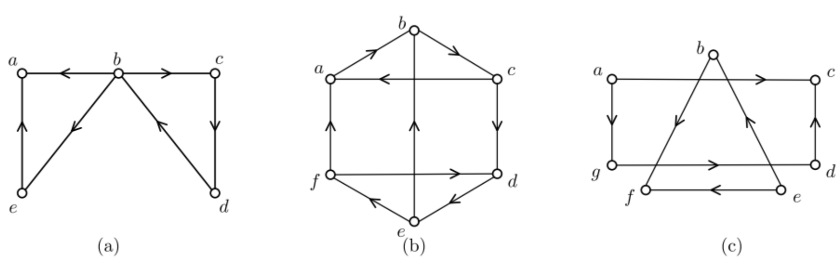

图 8.15

CH8-6

6. 证明：连接有向图同一个强连通片中两个顶点的有向通路上的所有顶点也都在这个强连通片中.

参考答案：
设$P(u,v)$是连接有向图同一个强连通片中两个顶点u,v的一条有向通路。因为u,v强连通，故则存在有向通路$P(v,u)$。
对$P(u,v)$上的任意两点u',v'（可能与u,v重合）不妨设$P(u,v) = P(u,u') + P(u',v') + p(v',v)$。则$P(u',v')$是$u'$到$v'$的有向通路，$P(v',v) + P(v,u) + p(u,u')$为从$v'$到$u'$的有向通路。
由u',v'选取的任意性知结论成立。

CH8-3

3. 证明：任给无向图 G，G 都有一个定向图 D，使得对于所有 $v \in V$，$\left|\deg^+(v) - \deg^-(v)\right| \leq 1$ 成立。

参考答案：
若G中存在奇度顶点$v_1, v_2, \ldots, v_{2k}$（奇度顶点必为偶数），则$G' = G + \{v_i v_{i+k} | 1 \leq i \leq k\}$为欧拉图，图中存在一条欧拉回路，沿着回路给每条边定向得到图D'，对于$\forall v \in D'$，都有$deg^+(v) = \deg^-(v)$。
再将$\{v_i v_{i+k} | 1 \leq i \leq k\}$从$D'$中删去，得到$G$的一个定向图$D$，从$D'$到$D$，每个顶点关联的边至多少1，故在$D$中，对于所有的$v \in V$，$|deg^+(v) - \deg^-(v)| \leq 1$成立。

CH8-7

7. 证明无向图 G 有一种定向方法，使得其最长有向轨道的长度不超过 Δ。

参考答案：
设 $C = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ 是无向图 G 的一个正常 k 着色，其中 $k = \chi(G)$，对 V_i 中的顶点染成 i 色。
在原来的无向图中，相邻两点分别染成 i 色和 j 色，若 $i < j$，那么增加从 i 色点到 j 色点的有向边。
因此 G 的最长轨道长度 $\leq \chi(G) - 1 \leq (\Delta + 1) - 1 = \Delta$。

14. 证明：$\nu \geq 3$ 阶的竞赛图中有得分相同的顶点，当且仅当图中有长为 3 的有向圈。

参考答案：

必要性：

记两个得分相同的顶点为v_1和v_2。

对于除此两点之外的其他顶点，一定存在至少一个点不同时输或赢给了v_1和v_2。否则，若所有点都要么赢了v_1和v_2，要么输给了v_1和v_2，v_1和v_2的得分之差一定是2，它们得分不相同，和假设条件矛盾。

取任意一个不同时输或赢给了v_1和v_2的点v_3，则v_1、v_2与v_3构成一个3度有向圈。

充分性：

首先将图中全输或全赢的顶点去掉，剩余的图记作G。由于原图存在至少一个3度有向圈，故$n \geq 3$。

对于竞赛图G中的顶点v_i，得分$s_i = deg^+v_i - deg^-v_i$。又因为有向图$G$是完全图，故$deg^+v_i + deg^-v_i = n - 1$。

联合上述两式，可得$s_i = 2deg^+v_i - n + 1$。由于G中没有全胜或全负的顶点，故$deg^+v_i \in [1, n-2]$。由鸽巢原理，必定有两个顶点得分相同。

Q.E.D.