中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

图论第一次习题课

2024 年 10 月 24 日

大纲

1 第一次作业

2 第二次作业

3 第三次作业

4 第四次作业

大纲

1 第一次作业

2 第二次作业

3 第三次作业

4 第四次作业

习题 1.4

任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多.

习题 1.4

任何至少由两个人构成的群体中，其中有两个人，他们的朋友数一样多.

证明: 将每个人看作顶点，两个人是朋友则在这两人所代表的顶点之间加一条边，构造图 G.
问题等价于，在任意满足 $|V(G)| \geq 2$ 的图 G 中，存在 $V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得 $deg(v_i) = deg(v_j)$.
反证法：假设对任意 $V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，都有 $deg(v_i) \neq deg(v_j)$，deg(v) 在 G 中共有 |V(G)| 个不同的取值，为 0, 1, … , |V(G)|-1，所以存在 $V_i, V_j \in V(G), i \neq j$，使得 $deg(v_i) = 0$ $deg(v_j) = |V(G)| - 1$，即 v_i 与所有点都不相连，v_j 与所有点都相连，矛盾，假设不成立，原结论成立。

习题 1.5

$2n(n \geq 2)$ 人中，每个人至少与其中的 n 个人认识，则其中至少有 4 个人，使得这四个人围桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人.

习题 1.5

$2n(n \geq 2)$ 人中，每个人至少与其中的 n 个人认识，则其中至少有 4 个人，使得这四个人围桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人.

证明: 将每个人看作顶点，两个人认识则在这两人所代表的顶点之间加一条边，构造图 G，V(G)=2n, $\forall v \in V(G)$，$deg(v) > n$. 问题等价于图 G 一定有长度为 4 的圈.

(1) 若图 G 为完全图，则一定存在长度为 4 的圈；

(2) 若图 G 非完全图，取不相邻的顶点 u, v，由于 $deg(u) > n$ $deg(v) > n$，那么在剩余的 $2n-2$ 个顶点中，根据抽屉原理可得至少有两个顶点与 u, v 都相邻，则这 4 个顶点组成了一个长度为 4 的圈.

习题 1.7

证明下面的结论:

(1) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

(2) 设 G 是二分图，$\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

习题 1.7

证明下面的结论：
(1) $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$
(2) 设 G 是二分图，$\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

证明: （1）不妨设 $K_{m,n} = X \cup Y, X \cap Y = \emptyset$，其中 $|X| = m$ $|Y| = n$ 由二分图 $K_{m,n}$ 定义：$\forall u \in X, v \in Y$，有 $deg(u) = m, deg(v) = n$ 则有：

$$\sum_{v \in V(K_{m,n})} \deg(v) = \sum_{u \in X} \deg(\mathrm{u}) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2mn$$

由 Euler 定理，$\varepsilon(K_{m,n}) = mn$

（2）设 G 的二分图的两个部分节点数量分别为 m, n，显然有 $\varepsilon(G) \leq \varepsilon(K_{m,n}), V(G) = m + n$ 并且由 (1) 可得 $\varepsilon(K_{m,n}) = mn$，所以有 $\varepsilon(G) \leq mn \leq (m+n)^2/4$，即 $\varepsilon(G) \leq v^2(G)/4$

习题 1.8

设 G 是图，给定 $V(G)$ 的非空真子集 V'，记 k 为一个端点在 V' 中，另一个端点在 $V(G)-V'$ 中的边数。若 V' 中度数为奇数的顶点数为偶数，则 k 为偶数；否则，k 为奇数.

习题 1.8

设 G 是图，给定 $V(G)$ 的非空真子集 V'，记 k 为一个端点在 V' 中，另一个端点在 $V(G)-V'$ 中的边数。若 V' 中度数为奇数的顶点数为偶数，则 k 为偶数；否则，k 为奇数.

证明: 设 ε 是 V' 的顶点导出子图的边的个数，V'_o 和 V'_e 是 V' 中顶点度数为奇数和偶数的集合，则有

$$k=\sum_{v\in V'} deg(v)-2\varepsilon=\sum_{v\in V'_o} deg(v)+\sum_{v\in V'_e} deg(v)-2\varepsilon$$

因为 2ε 和 $\sum_{v\in V'_e} deg(v)$ 一定是偶数，所以 k 的奇偶只和 $\sum_{v\in V'_o} deg(v)$ 有关，故若 V' 中度数为奇数的顶点数为偶数，则 k 为偶数；否则，k 为奇数.

习题 1.9

每个顶点的度数都是 2 的连通图是一个圈.

习题 1.9

每个顶点的度数都是 2 的连通图是一个圈.

证明: 用最长轨法来证明，设 $P(u,v) = v_0(=u)v_1...v_k(=v)$ 为图中最长轨道，由于 v_0 度数为 2，存在不同于 v_1 的点 w 与其相邻，若 w 不在 P 上，则 $P(u,v)+uw$ 为更长的轨道，与假设矛盾，若 w 在 P 上，则 $w=v$，否则 deg(w) = 3。综上，$P(u,v)+uv$ 为一个圈，且由于图为连通图，不可能有孤立点，由于每个顶点的度数都是 2，不可能有点单独与圈上点相连，故 $P(u,v)+uv$ 即为整个图，那么该图为一个圈，证毕.

大纲

习题 1.25

设 G 是简单图. 证明:

(1) 若 $\epsilon(G) > \nu(G)$, 则 G 中有圈;

(2) 若 $\epsilon(G) > \nu(G) + 4$, 则 G 中有两个无公共边的圈.

习题 1.25

设 G 是简单图. 证明:
(1) 若 $\epsilon(G) > \nu(G)$, 则 G 中有圈;
(2) 若 $\epsilon(G) > \nu(G) + 4$, 则 G 中有两个无公共边的圈.

证明:
(1) 使用反证法，假设 G 不含圈，则 G 为一棵树（或森林），有 $\epsilon(G) \leq \nu(G) - 1$，与题目条件矛盾。
故得证。

习题 1.25

设 G 是简单图. 证明:
(1) 若 $\epsilon(G) > \nu(G)$, 则 G 中有圈;
(2) 若 $\epsilon(G) > \nu(G) + 4$, 则 G 中有两个无公共边的圈.

证明:
对于 (2) 的证明，我们可以通过对顶点数 $\nu(G)$ 进行归纳整理如下:
假设图 G 满足 $\epsilon(G) > \nu(G) + 4$，需要证明 G 中必然存在两个无公共边的圈。
首先，注意到:

$$\frac{\nu(G)(\nu(G)-1)}{2} \geq \epsilon(G) \geq \nu(G) + 4$$

由此可得 $\nu(G) \geq 5$。后面过程详见讲义。

习题 2.8

证明：若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\nu$ 是正整数序列，则此序列是树的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$.

习题 2.8

证明：若 $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\nu$ 是正整数序列，则此序列是树的度数序列当且仅当 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$.

证明：

充分性：已知此序列是树的度数序列，则由树的性质有 $2\epsilon = 2(\nu - 1)$，故 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2\epsilon = 2(\nu - 1)$.

必要性：已知 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$，由于对任意图都有 $\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2\epsilon$，所以 $2\epsilon = 2(\nu - 1)$. 当这个图无环且连通（要说明一下）时，由 $2\epsilon = 2(\nu - 1)$ 知它是树。

习题 2.16

(1) 试给出破圈法的算法.
(2) 证明: 破圈法得到的生成树是最小生成树.
(3) 分析破圈法的时间复杂度.

习题 2.16

(1) 试给出破圈法的算法.
(2) 证明：破圈法得到的生成树是最小生成树.
(3) 分析破圈法的时间复杂度.

(1)
输入： 加权图 $G = (V(G), E(G), \omega)$.
输出： G 的一棵生成树的边子集 E'.

1. 在图中找一个圈，若无，转 4；
2. 去掉该圈中权值最大的边；
3. 重复 1、2；
4. 输出边的集合。

习题 2.16

(1) 试给出破圈法的算法.
(2) 证明: 破圈法得到的生成树是最小生成树.
(3) 分析破圈法的时间复杂度.

(2) **证明**:
假设存在一个最小生成树 T 包含被删除的边 e_{max}。
由于 e_{max} 在一个圈中，去掉 e_{max} 会使得圈被破坏，但图仍然连通。
因此，可以构造一个新的生成树 $T' = T - e_{max} + e$，其中 e 是此圈中除了 e_{max} 以外的任意一条边。
由于 e_{max} 的权值最大，替换后的生成树 T' 的权值和小于或等于 T 的权值和，这与 T 是最小生成树的假设矛盾。故得证。

习题 2.16

(1) 试给出破圈法的算法.
(2) 证明：破圈法得到的生成树是最小生成树.
(3) 分析破圈法的时间复杂度.

1. 在图中找一个圈，若无，转 4；
2. 去掉该圈中权值最大的边；
3. 重复 1、2；
4. 输出边的集合。

(3)
第 1，2 步最多循环 $\epsilon-(\nu-1)$ 次，因为最多删掉这么多条边；
对于每一次循环，在图中找圈的时间为 $O(\epsilon)$，在一个圈里寻找权值最大边的时间复杂度是 $O(\epsilon)$，这两个操作顺序进行，总时间复杂度依然是 $O(\epsilon)$。
故总时间复杂度为 $O(\epsilon(\epsilon-\nu))$.

习题 2.6

证明：树有一个中心或两个中心，且有两个中心时，这两个中心相邻.

习题 2.6

证明：树有一个中心或两个中心，且有两个中心时，这两个中心相邻.

证明：

考虑最长轨道 $v_0 v_1 \cdots v_k$.

若 k 为偶数，显然 $l\left(v_{k/2}\right) = k/2$，则 $v_{k/2}$ 是唯一中心；若 k 为奇数，$v_{(k\pm1)/2}$ 是两相邻中心。

同时，最长轨道上的其它点距离某端距离都大于最长轨道的中心点与这个端点的距离，因此不可能是树的中心。

另外，其它任意不在最长轨道上的点 u，必与最长轨道上点连通，因此到最长轨道某一端的距离会大于原选定的最长轨道的中心点到该端的距离，从而也不可能是树的中心。

习题 2.6

证明：树有一个中心或两个中心，且有两个中心时，这两个中心相邻.

方法 2：
$\nu(G)=1\ 2$ 时显然成立. 考虑 $\nu(G)\geq 3$ 的情形。
显然，树叶不可能是中心。考虑进行如下操作：依次删除树叶结点及与之关联的边，直至剩下的结点不是树叶结点，最后只可能是两种情况：

1. 若只剩下一个顶点，说明该树只有一个中心。
2. 若不剩任何顶点，前一步必然是 K_2，则说明该树有两个中心，且相邻。

下面说明每次删除树叶后的原图的中心还是中心：
由中心定义，其离心率最小，而删除树叶后，会导致所有点的离心率要么不变，要么 -1 ，而中心的离心率必然 -1 (以其为一段端点的最长轨道末端必然是树叶，否则与最长轨道矛盾)。从而其离心率依然最小，仍为中心。

习题 3.15

证明：只有两个顶点不是割顶的连通图是一条轨道。

Insight 轨道的特点是 $\Delta(G) \leq 2$，所以我们证明的重点是不存在 $v \in V(G)$，$\deg(v) \geq 3$。

习题 3.15

证明：只有两个顶点不是割顶的连通图是一条轨道。

Insight 轨道的特点是 $\Delta(G) \le 2$，所以我们证明的重点是不存在 $v \in V(G)$，$\deg(v) \ge 3$。

一个显然的事实：H 是连通图 G 的生成子图。如果顶点 $v \in V(G)$ 不是 H 的割顶，那么 v 也不是 G 的割顶。

假设 $\exists v \in V(G), \deg(v) \ge 3$，图 G 存在生成树 T, 满足 $\Delta(T) \ge 3$。根据习题 2.4 的结论，T 至少有 3 个叶子节点。这三个叶子节点都不是 T 的割顶，所以也不是 G 的割顶，和题目的条件矛盾。所以 $\forall v \in V(G), v \le 2$。

这样的图 G 是轨道或圈。由于 G 是简单图，所以 G 是圈的话，$|G| \ge 3$，且 G 的所有顶点都不是割顶。所以 G 是轨道。

习题 3.21

设 e 是 2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G-e$ 也是 2-连通图，则称 e 是可删除的. 证明: $\upsilon(G) \geq 4$ 的 2-连通图 G 的每一条边要么是可收缩的，要么是可删除的.

两种证明思路:

- 如果 e 不可删除，那么 e 可收缩
- 如果 e 不可收缩，那么 e 可删除

这两种方法都是可以的，我们这里选择第一种进行讲解.

习题 3.21

设 e 是 2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G-e$ 也是 2-连通图，则称 e 是可删除的．证明：$v(G) \geq 4$ 的 2-连通图 G 的每一条边要么是可收缩的，要么是可删除的．

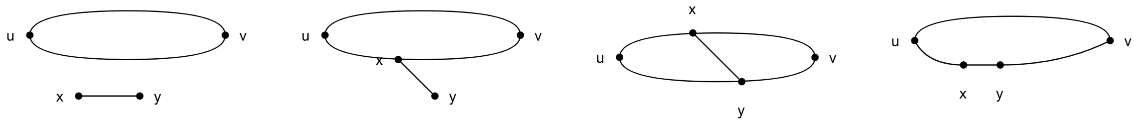
- 如果 e 不可删除，那么 e 可收缩

如果 $e=xy$ 不可删除，则在图 $G-e$ 存在割顶，割顶可以将 $G-e$ 的顶点集合按照定理 3.6 的方式分为两个划分，x 和 y 分别属于其中的一个．由此可见，$G-e$ 中，x 到 y 只存在一条无公共内顶的轨道．

习题 3.21

设 e 是 2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G-e$ 也是 2-连通图，则称 e 是可删除的．证明：$v(G) \geq 4$ 的 2-连通图 G 的每一条边要么是可收缩的，要么是可删除的．

下面证明，如果 $G-e$ 不是 2-连通的，那么 $G \cdot e$ 是 2-连通的．
设 $e=xy$ 收缩为顶点 w．对于 $G \cdot e$ 的任意两个顶点 $u \neq v$，它们在原来的图 G 中有两条无公共内顶的轨道．这两条轨道和 $e=xy$ 的关系有以下四种情况：

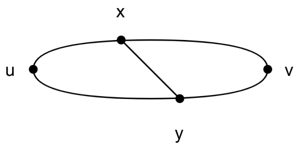


图：case1　图：case2　图：case3　图：case4

习题 3.21

设 e 是 2-连通图 G 的一条边，若将边收缩后，得到的图 $G-e$ 也是 2-连通图，则称 e 是可删除的．证明：$v(G)\geq 4$ 的 2-连通图 G 的每一条边要么是可收缩的，要么是可删除的．

对于 case1,2,4，收缩掉 $e=xy$ 后，原来的两条 u 对 v 轨道显然还是没有公共内顶的．
case3 是不可能存在的，因为在图 $G-e$ 中，x 到 y 有两条无内顶轨道．
所以，如果 $G-e$ 不是 2-连通的，那么 $G\cdot e$ 一定是 2-连通的．即，e 要么是可删除的，要么是可收缩的．



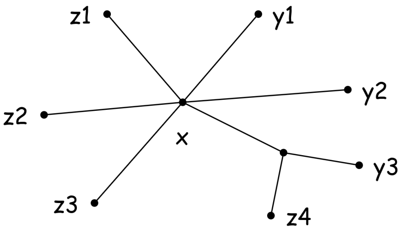
图：case3

习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G) - \{x\}, Z \subset V(G) - \{x\}, |Y| < |Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z - Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

几个错误的做法:

- 直接把 Z 中不属于 Y 的一个顶点并入
- 扇形定理
- 只考虑一条 x 到 y 的路径



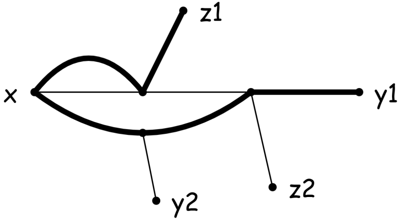
习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G)-\{x\}, Z \subset V(G)-\{x\}, |Y|<|Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z-Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

从一种错误的解法开始:

如果存在 $z \in Z$, x 到 z 的路径和 x 到 Y 的扇形除了 x 外没有公共顶点, 那么可以将 x 到此 z 的路径加入扇形中.

否则,x 到 Z 中所有顶点的路径都和 x 到 Y 的扇形有公共顶点. 因为 $|Z|>|Y|$, 由抽屉原理可知, $\exists y_1 \in Y, z_1, z_2 \in Z$, 使得 $P(x,z_1), P(x,z_2)$ 和 $P(x,y_1)$ 均有除 x 的公共顶点. 假设该路径上的最后一个公共顶点在 $P(x,z_2)$ 上, 我们把 z_1 加入扇形, 并按犹如所示修改 $P(x,y)$ 即可.



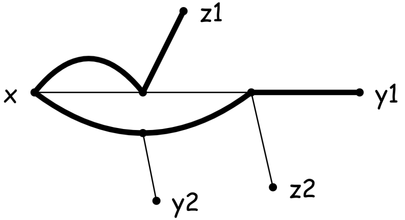
习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G)-\{x\}, Z \subset V(G)-\{x\}, |Y|<|Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z-Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

Insight 反思:

- 应该考虑多个 y
- 一个 z 只能被一个 y "征用"

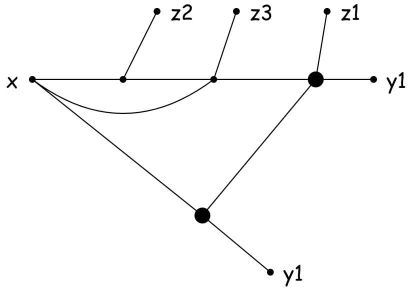
基于以上思想, 我们可以提出问题的一个算法证明.



习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G)-\{x\}, Z \subset V(G)-\{x\}, |Y|<|Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z-Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

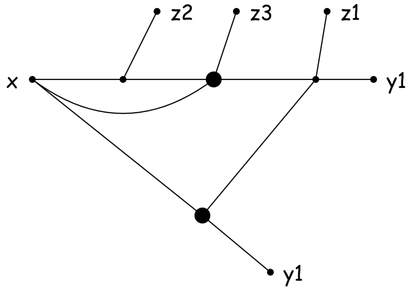
1. 对于所有 $y \in Y$, 标记最后出现在 x 到 Z 扇形中的顶点.
2. 如果 $z \in Z$, $P(x,z)$ 的多个顶点被标记, 则取消除了第一个标记以外的标记, 对于被取消标记的 $P(x,y)$, 标记距离 x 更近的一个 x 到 Z 扇形公共顶点.
3. 重复 Step 2, 直到每个 $P(x,z)$ 上至多有一个标记



习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G)-\{x\}, Z \subset V(G)-\{x\}, |Y|<|Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z-Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

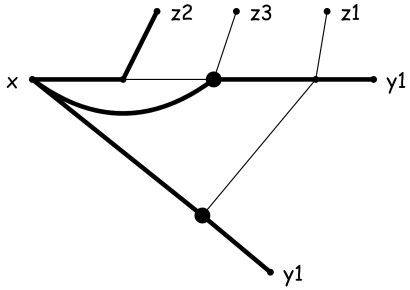
1. 对于所有 $y \in Y$, 标记最后出现在 x 到 Z 扇形中的顶点.
2. 如果 $z \in Z$, $P(x,z)$ 的多个顶点被标记, 则取消除了第一个标记以外的标记, 对于被取消标记的 $P(x,y)$, 标记距离 x 更近的一个 x 到 Z 扇形公共顶点.
3. 重复 Step 2, 直到每个 $P(x,z)$ 上至多有一个标记



习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G) - \{x\}, Z \subset V(G) - \{x\}, |Y| < |Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z - Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

4. 对于所有 $y \in Y$, 如果 $P(x, y)$ 上有标记, 那么标记以前的路径替换为 x 到 Z 扇形的对应部分
5. 由于 $|Z| > |Y|$, 一定存在路径上没有被标记的 $z \in Z$. 选取此 z 即可.

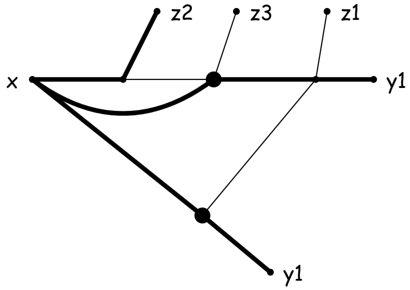


习题 3.24

设 G 是一个图, $x \in V(G), Y \subset V(G)-\{x\}, Z \subset V(G)-\{x\}, |Y| < |Z|$. 假设从 x 到 Y 与从 x 到 Z 都存在扇形, 则存在 $z \in Z - Y$, 使得从 x 到 $Y \cup \{z\}$ 都存在扇形.

两点说明:

- 算法一定会终止
- 算法的正确性



大纲

CH4-5

设 ω 是平面图 G 的连通片个数，则 $\nu(G)=e(G)+\varphi(G)=\omega+1$.

1. 当 $\omega=1$ 时，图 G 是一个连通图。由欧拉公式 $\nu(G)=e(G)+\varphi(G)=2$ 可知，公式在此情况下成立。
2. 归纳假设：假设对于连通片数量为 ω 的平面图，公式 $\nu(G)=e(G)+\varphi(G)=\omega+1$ 成立。
   现在考虑 $\omega+1$ 连通片的情况，设 G 增加一个新的连通片 G'，满足欧拉公式 $\nu(G')=e(G')+\varphi(G')=2$。但是新增的连通片在外部面上计算了两次，因此需要减去 1。最终结果：

$$\nu(G)=e(G)+\varphi(G)=(\omega+1)+1=\omega+2$$

CH4-7

设 G 是 v 个顶点 e 条边的简单平面图，$e < 30$，证明存在顶点 $v \in V(G)$，使得 $\deg(v) \leq 4$。

1. 若 $v < 5$，显然成立。

2. 考虑 $v \geq 6$ 的情况。假设所有 v 的度数 $\deg(v) \geq 5$，则根据度数定理可得 $e \geq 5v/2$。另一方面，由欧拉公式 $\nu - e + f = 2$ 得出 $e \leq 3v - 6$，结合这两个不等式推得：

$$\frac{5v}{2} \leq 3v - 6$$

化简后得 $v \geq 12$，与 $e < 30$ 矛盾，因此必然存在顶点 v 使得 $\deg(v) \leq 4$。

CH4-11

一个连通平面图是 2-连通的，当且仅当它的每个面的边界都是圈。

必要性：由 2-连通性可知，图中没有桥。因此，每个面的边界都是一个简单圈。
充分性：每个面的边界是圈，则每个顶点属于至少一个圈的边界，删除任何一个顶点或边都不影响其余顶点间的连通性，因此整个图是 2-连通的。

CH5-2

证明：树至多有一个完美匹配。

假设树 T 存在两个不同的完美匹配 M_1 和 M_2，则 $M_1 \oplus M_2 \neq \emptyset$,，且 $T[M_1 \oplus M_2]$ 中每个顶点的度数都是 2。由习题 1.8，$\delta(G) \geq 2$，有圈，这与 T 是树矛盾。

CH5-4

两个人在图 G 上博弈，交替选择不同的顶点，直到不能选择顶点为止。证明：第一个选顶点的人有必胜策略，当且仅当图中无完美匹配。

第一个玩家的必胜策略如下：

- 在初始选择时，第一个玩家选择任何一个顶点 v_0。
- 随后的每一步中，第一个玩家始终沿着路径选择一个尚未被访问且与前一顶点相邻的顶点。

必要性：假设图中存在完美匹配 M。无论第一个玩家怎么选择，第二个玩家始终选与当前顶点 v 相匹配的顶点，确保自己最终不会陷入困境。因此玩家二必胜。

充分性：考虑图 G 中一个最大的匹配 M。分以下以下情况：

- 若 v_0 是孤立点（即在 M 中没有匹配的顶点）。
- 若 v_0 在匹配中，则第一个玩家选择路径中的下一个顶点。
- 增广路径策略：通过在每次选择中破坏匹配，图 G 会不断被削弱，从而让第二个玩家逐渐失去选择空间。