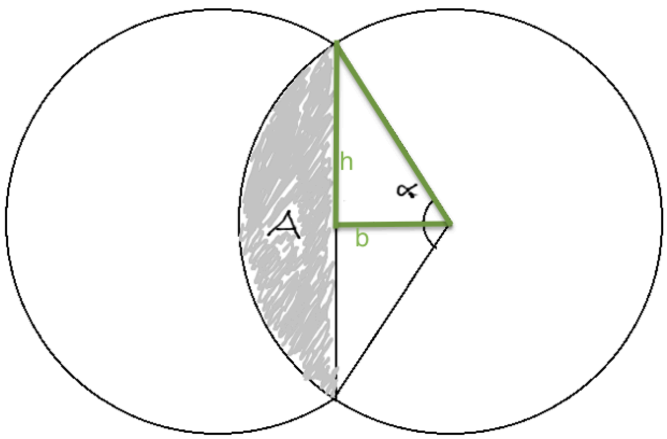
Datorövning 1 Numeraisk matematik, två cirklar

Inledning

I denna raport löses följande uppgift:

"Två perfekt cirkelformade glasunderlägg,båda med samma radie **r** överlappar varandra som i bilden nedan, så att exakt halva ytan av det undre underlägget täcks av det övre. Var sker detta på cirklarna?" Bilden under beskriver fenomenet.



(Bild lånad av Mikael Kurula)

För att kunna undersöka problemet i Matlab så börjar vi med att visa att vinkeln α upfyller ekvationen $\alpha - sin\alpha = \frac{\pi}{2}$. Vi vet att arean av en cirkel sektor är $\frac{\alpha\pi r^2}{2\pi}$. Vi delar in tringeln (som skärs av de gråa området) i två rätvänkliga trianglar. Vi kallar höjden h och basen b. Vi får då att att arean för $A = \frac{\alpha\pi r^2}{2\pi} - 2\frac{hb}{2} = \frac{\alpha r^2}{2} - hb$ vi får med hjälp av trigonometsika samband att $h = rsin\frac{\alpha}{2}$ och $b = rcos\frac{\alpha}{2}$.

Vi vet även att $A + A = \frac{\pi r^2}{2}$, alltså en halv cirkel area. När vi slår ihop dessa olika delar så får vi at

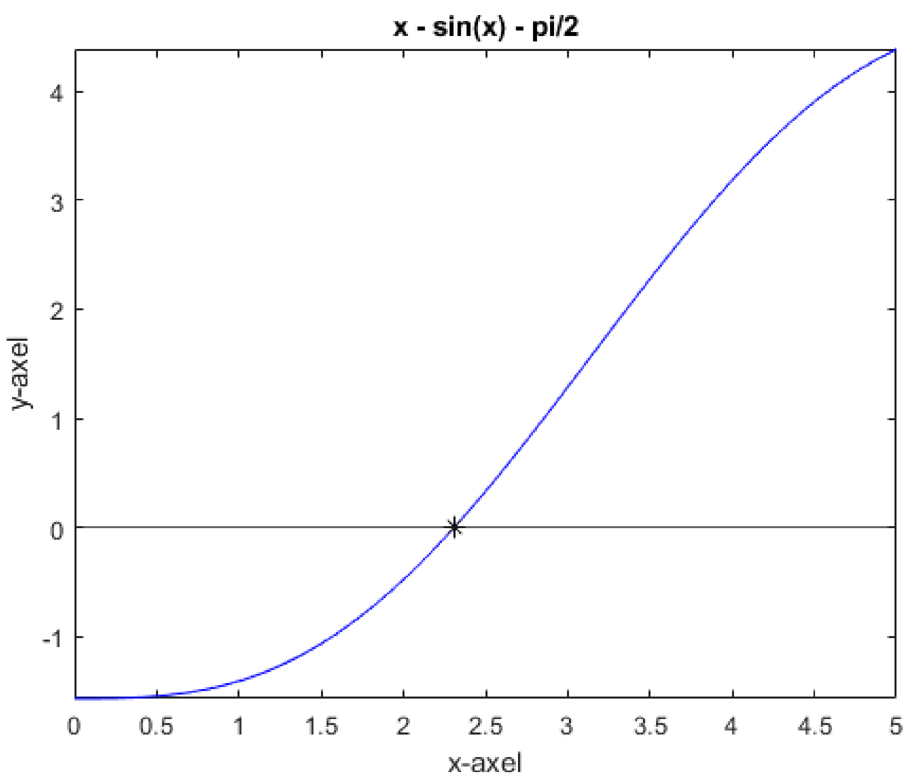
$\frac{\pi r^2}{2} = 2A = \alpha r^2 - 2hb = \alpha r^2 - 2(rsin\frac{\alpha}{2} - rcos\frac{\alpha}{2}) = \alpha r^2 - 2r^2 sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}$. Sedan använder vi oss av formeln sinus för dubblavinkeln, då får vi $\alpha r^2 - sin\alpha$. Alltså uppfyller vinkeln α ekvationen om $r = 1$. Vi har nu kommit till $\alpha - sin\alpha = \frac{\pi}{2}$.

I nästa del kommer vi att beräkna α för att den övre cirkeln ska täcka exakt hälften av den nedra cirkeln.

Beräkningar

Vi börjar med att rita funktionen y, som defineras som en dold funktion. Funktionens betende är även förtydligat med en bild.

```
x = [0 5];
y = @(x) x - sin(x) - pi/2;
fplot(y,x,'b-') %ritar funktionen y
alfa_estimate = fzero(y,x);
hold on
plot(alfa_estimate,0,'k*',"MarkerSize",8) %ritar ut nollstället för alpha
yline(0);
xlabel('x-axel')
ylabel('y-axel')
title('x - sin(x) - pi/2')
hold off
```



Nollsätället $\alpha = 2,3099$ beskriver ett närmevärde.

```
options = optimset('Display','off'); %Räknar ut ett värde för alfa
alfa = fsolve(y,alfa_estimate,options)
```

```
alfa = 2.3099
```

Felet är nära noll så uppskattningen är en bra uppskattning.

```
absolut_fel = y(alfa)
```

```
noggrannhet = -4.4409e-16
```

Slutsatser

Det finns bara en vinkel α som löser ekvationen $\alpha - sin\alpha = \frac{\pi}{2}$. Värdet på denna vinkel α är cirka 2.3099 radianer. Variabelns absoluta fel visar hur mycket värdet på α avviker från den exakta storheten. Variabelns absoluta fel är mycket litet vilket betyder att vårt α ligger mycket nära den exakta storheten och $\alpha - sin\alpha - \frac{\pi}{2}$ mycket nära 0. Då målet är att den övre cirkeln ska täcka hälften av den nedra ska man välja vinkel α så att den är 2.3099 radianer.