Datorövning 2: Richardsonextrapolation av Gauss version av trapetsregeln

Inledning

Uppgiftsbesrkivningen är att räkna ut integralen $\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{x} dx$ numeriskt med hjälp av Gauss trapetsregel som ska Richardsonextrapoleras en gång. Gauss trapetsregel är origocentrerad vilket gör att det är enklare att räkna ut integralen numeriskt än med trapetsregel.

Härledning av Gauss trapetsregel:

Vi har intervall längeden $h = \frac{(b-a)}{n}$,var n är antalet delintervall (i vår uppgift är $n = 2, 2^2, 2^3, ..., 2^{10}$).

I tarapetsregeln aproximeras den k:te delintergralen med en trapets. När vi utför ett variebelbyte $z = x - a - (2k-1)\frac{h}{2}$ kan vi skriva integralen som:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)h}^{a+kh} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z + a + \frac{2k-1}{2}h)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_k(z)dz \approx \sum_{k=1}^{n} h\frac{f_k(\frac{-h}{2}) + f_k(\frac{h}{2})}{2}$$

där $f_k(z) = f(z + a + \frac{2k-1}{2}h)$. Denna omskrivning gör att integralen förkjuts längs med x-axeln så att den är origocentrerad.

(Härledningen lånad från kurskompediet s.96)

Gauss trapetsregel är av ordning 4, och har trunkeringsfelet $e_G(h) = d_1h^4 + d_2h^{p_1} + d_3h^{p_2} + \ldots$, var$p_j < p_k$för $j < k$ och p_j för $j \geq 1$ är obekant.

Vi ska även bestämma p_1 empiriskt och sedan upskatta ett trunkeringsfelet empiriskt med hjälp p_1.

Beräkning

`F0` är den nollte ordningens Richardsons extrapolat.

```
format long
q = 2;        %q^i bildar steglängden
a = 1/2;      %startpunkt
b = 3;        %slutpunkt
f =@(x) 1/x; % definierar f
for i = 1:10
      F0(i,1)=trapets_gauss(f,a,b,q^i);
end
F0 % anropar F0
```

```
F0 = 10×1
   1.777284473040704
   1.789848055815142
   1.791585995520610
   1.791746978620059
   1.791758654521877
   1.791759417726987
```

```
    1.791759465999919
    1.791759469026149
    1.791759469215433
    1.791759469227265
```

`Delta0` beräknar differansen mellan de olika värdena i vektorn `F0`.

```
Delta0=diff(F0)              % Beräkna differenserna i F0
```

```
Delta0 = 9×1
    0.012563582774439
    0.001737939705467
    0.000160983099450
    0.000011675901818
    0.000000763205109
    0.000000048272933
    0.000000003026230
    0.000000000189284
    0.000000000011832
```

Man beräknar `kontroll0` med att dividera första raden med andra, den andra raden med den tredje, osv.

```
kontroll0=Delta0(1:(end-1))./Delta0(2:end)    % Kvoten i Delta0
```

```
kontroll0 = 8×1
    7.229009576635782
   10.795789815249682
   13.787637303007488
   15.298511075264324
   15.810208032989141
   15.951508585268042
   15.987762475658682
   15.998123299239936
```

`kontroll0` visar att stegen minskar ungefär med $\frac{1}{2^4}$. Man ser det mot slutet att de tre sista värdena i vektorn närmar sig 16, vilket tyder på att steglängden börjar vara rätt. Dock ser vi att de tre första steglängderna är för långa. Om steglängen är $\frac{(3-\frac{1}{2})}{2^8} \approx 10^{-2}$ (lagt in värdena i formlen som beräknar h) så får man tredje sista värdet i D`elta0`, efter det tredjesistavärde anser vi att steglängden är rimlig.

Vi Richardson extrapolerar `F0` genom att $\frac{\Delta_0}{(q^{p_0}-1)}$, $p_0 = 4$ (fås från trunkeringsfelet) och $q = 2$ (kvoten mellan steglängdera). Vi kapar av det första elementet (som är det minst nogranna elementet) i `F0` för att kunna addera vektrorna.

```
F1 = F0(2:end) + Delta0/(2^4-1) %Hur vi berkänat F1
```

```
F1 = 9×1
    1.790685628000105
    1.791701858167641
    1.791757710826690
    1.791759432915332
    1.791759468607327
```

```
   1.791759469218115
   1.791759469227898
   1.791759469228053
   1.791759469228054
```

Vi får då att det bästa värdet på integralen är det sista värdet i vektorn `F1`.

Vi bestämmer empiriskt p_1. `Delta1` beräknar differansen mellan de olika värdena i vektorn `F1`.

```
Delta1=diff(F1)              % Beräkna differenserna i F1
```

```
Delta1 = 8×1
   0.001016230167536
   0.000055852659049
   0.000001722088642
   0.000000035691995
   0.000000000610788
   0.000000000009783
   0.000000000000155
   0.000000000000001
```

Man beräknar `kontroll1` med att dividera första raden med andra, den andra raden med den tredje, osv. i `Delta1`.

```
kontroll1=Delta1(1:(end-1))./Delta1(2:end)   % Kvoten i Delta1
```

```
kontroll1 = 7×1
10^2 ×
   0.181948395089208
   0.324330918136135
   0.482485953788799
   0.584360141968915
   0.624331691595361
   0.633031609195402
   1.160000000000000
```

De första steglängderna är för långa, som vi såg i `Delta0`. Vi ser även att den sista steglängden motsvarande 2^{10} ger värdet $160,000...$ är för kort och därför opålitligt. Om stegländen blir för kort så begränas den maskinaritmetiken i uträkningarna. Vi får då att steglängderna motsvarande $n = 2^8$ och $n = 2^9$ är lämpligast, vilket betyder att vi får två evalueringar av integranden med de steglängder vi anser passliga. Vid de här steglängderna är felet ungefär proportionellt till 2^6 och därför bästemmär vi att $p_1 = 6$.

Vi får nu att det näst sista värdet från vektorn `F1` $(= 1,791759469228053...)$ är det bästa värdet och inte det sista som vi konstaterade tidigare.

Funktionen för Gauss trapetsregel:

```
function I=trapets_gauss(f,a,b,n)

  h2=(b-a)/n/2; %steglängden halveras

  for k=1:n
    fk=@(x) f(x+a+(2*k-1)*h2); %förskjutning av x-axeln
```

```
    c(k)= h2*(fk(-h2*1/sqrt(3))+fk(h2*1/sqrt(3))); %värden i delintervallen
  end

  I=sum(c); %integralens numeriskavärde

end
```

Integralen räknat analytiskt: $\int_{\frac{1}{2}}^{3} \frac{1}{x} dx = [ln|x|]_{\frac{1}{2}}^{3} = ln3 - ln\frac{1}{2} = ln2 + ln3 = ln6 \approx 1,791759469228055...$

Slutsatser

Vi antog först att det bästa värdet från vektorn `F1` var det sista men efter att kontrollerat steglängderna i `F1` fick vi att näst sista värdet från vektorn `F1` är det bästa värdet och inte det sista.

Det analytiska värdet för integralen är $ln6$ och från `F1` är $1,791759469228053...$ Vi får med den analytiska beräkning 16 korrekta siffror, medan det näst sista värdet från `F1` har 15 korrekta siffror. Felskattnignen är då $ln6 - 1,791759469228053... \approx 2,00081 \cdot 10^{-15}$. Från `Delta1` får vi felksattningen $1,55 \cdot 10^{-13}$. Felskattningen som vi får med hjälp av Richardsonextrapolation är av samma storlekklass som felskattningen som är beräknad analytisk. Den felskattningen som är beräknad analytiskt är ungefär 100 gånger mindre.

Vi gör endast en Richardsonextrapolation vilket ger i förhållande till arbetsmängden är en bra precision.