

PHS4700
Physique pour les applications multimédia

PAGE COUVERTURE **OBLIGATOIRE** POUR TOUS LES DEVOIRS

Numéro du groupe : 01

Numéro de l'équipe : 11

Numéro de devoir : 4


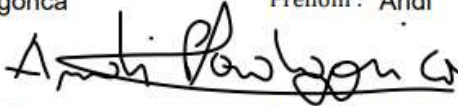

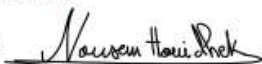
Nom: Yuan	Prénom: Ming Xiao	matricule: 1949477
Signature: 		
Nom: Podgorica	Prénom: Andi	matricule: 1955913
Signature: 		
Nom: Charles	Prénom: Cassy	matricule: 1947025
Signature: 		
Nom: Houdhek	Prénom: Noursen	matricule: 1949635
Signature: 		

Table des matières

Introduction	3
1. Théorie et équations.....	3
1.1 Méthodologie utilisée	3
1.2 Tracé des rayons.....	5
1.3 Sélection des rayons.....	5
1.3.1 Intersection entre la droite et la sphère.....	5
1.3.2 Intersection entre la droite et le plan.....	6
1.3.3. Rayons réfractés dans la sphère	6
1.3.4. Rayons réfléchis dans la sphère.....	7
1.4 Reconstitution d'images.....	8
2. Présentation et analyse des résultats	9
Simulation 1	9
Simulation 2	10
Simulation 3	10
Simulation 4	11
Conclusion	11

Introduction

Dans le devoir 4 du cours de PHS4700, Physique pour application multimédia, nous étudions l'optique. Le chapitre 6 porte sur les notions de l'optique nécessaires pour comprendre les modèles de la réflexion et de la réfraction.

Dans le présent devoir, nous utiliserons ces notions d'optique afin de simuler la vue d'une boîte multicolore de forme parallélépipède se trouvant dans une sphère pleine transparente d'indice de réfraction n_{int} . Cette sphère est placée dans un milieu d'indice de réfraction n_{ext} .

En bref, le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab (Octave) permettant de dessiner l'image de la boîte telle qu'observée par un observateur se trouvant à la position \vec{r}_0 à l'extérieur de la sphère en utilisant la méthode des rayons. La simulation sera limitée à un maximum de 4 réflexions et/ou réfractions pour chaque rayon.

Dans ce rapport, nous présentons dans la partie 1 la théorie et les équations permettant de réaliser ce travail. Par la suite, nous enchaînons avec la présentation et l'analyse des résultats dans la section 2. En terminant, nous concluons par une brève conclusion présentant les difficultés rencontrées dans ce devoir.

1. Théorie et équations

1.1 Méthodologie utilisée

La première étape de ce travail consiste à déterminer l'angle polaire et l'azimutal qui seront utilisés pour générer les rayons. Si un rayon provenant de l'extérieur ne touche pas la sphère, ou est réfléchi une fois qu'il touche la sphère, il est rejeté.

Dans ce devoir, nous utilisons un système de coordonnées sphériques où θ et ϕ sont définis comme suit :

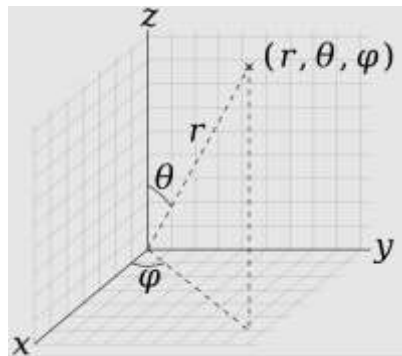


Figure 1: Représentation de l'angle polaire et de l'angle azimutal

$$\vec{\Omega}_{n,m} = \sin(\theta_n) \cos(\phi_m), \sin(\theta_n) \sin(\phi_m), \cos(\theta_n)$$

Nous devons générer des rayons dans la direction de la sphère en utilisant les coordonnées polaires dans le référentiel de l'observateur. L'angle θ varie de 0 à un angle qui peut couvrir toute la sphère. De même, l'angle azimutal varie entre 0 et 2π . Pour obtenir ces coordonnées cartésiennes, on applique les angles dans la direction de l'observateur et le centre de la sphère.



Figure 2: Figure représentant la sphère vue d'en haut avec l'angle azimutal

On convertit les coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires :

$$\vec{u} = \sin(\theta) \cos(\varphi) \vec{i}, \sin(\theta) \sin(\varphi) \vec{j}, \cos(\theta) \vec{k}$$

$$u_x = \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

$$u_y = \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$u_z = \cos(\theta)$$

$$\theta = \cos^{-1}(u_z)$$

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{u_y}{\sin(\theta)}\right)$$

$$R = \sqrt{\sin(\theta) \cos(\varphi)^2 + \sin(\theta) \sin(\varphi)^2 + \cos(\theta)^2}$$

Il est important de remarquer que le \arccos de u_z génère deux angles entre $-\pi/2$ à $\pi/2$. Pour déterminer le bon angle, il faut regarder le signe du sinus de cet angle. Il va de même pour trouver l'angle φ où \arcsin génère deux angles entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Pour varier les angles, nous avons calculé les valeurs max et min de θ et de φ .

Aussi, nous avons les formules :

$$\theta_{max} = \theta + \Delta\theta$$

$$\theta_{min} = \theta - \Delta\theta$$

$$\varphi_{max} = \varphi + \Delta\varphi$$

$$\varphi_{min} = \varphi - \Delta\varphi$$

Avec $\Delta\theta = \sin^{-1}\left(\frac{R}{|r_{obs}|}\right)$ et $\Delta\varphi = \Delta\theta$.

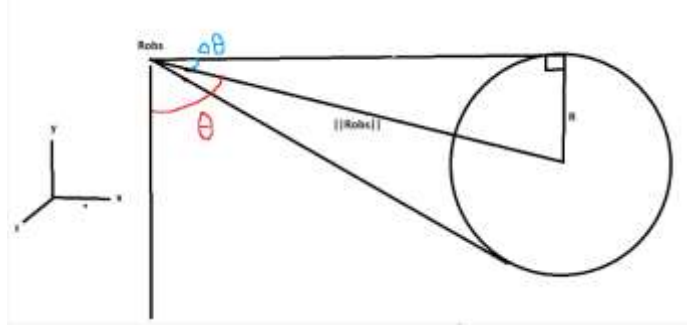


Figure 3: Représentation de θ et de sa variation

1.2 Tracé des rayons

Afin de tracer les rayons, nous générons les rayons à partir de l'observateur. Nous traçons le rayon principal qui va de l'observateur vers le centre de la sphère et après nous générons en balayant les autres points autour de ce point. Pour cela, on fait varier le θ verticalement entre *thêta min* à *thêta max* avec un pas. Aussi, on varie le ϕ horizontalement entre *phi min* à *phi max*. Les différentes combinaisons de θ et ϕ sont utilisées pour déterminer la direction. Pour ce faire, nous avons utilisé la formule :

$$\vec{\Omega}_{n,m} = \sin(\theta_n) \cos(\phi_m), \sin(\theta_n) \sin(\phi_m), \cos(\theta_n)$$

Une fois la direction déterminée, afin de se déplacer depuis le point de l'observateur et ainsi tracer graduellement le rayon, nous avons calculé le vecteur unitaire de direction \vec{u} . Nous avons donc divisé le vecteur $\vec{\Omega}_{n,m}$ par sa norme :

$$\vec{u} = \frac{\vec{\Omega}_{n,m}}{|\vec{\Omega}_{n,m}|}$$

Ensuite, nous avons généré 1000 rayons par simulation dans la direction de la sphère.

1.3 Sélection des rayons

1.3.1 Intersection entre la droite et la sphère

Maintenant que nous avons tracé les rayons, nous devons vérifier ceux qui seront conservés ou rejetés. En appliquant les équations de la droite avec l'équation de la sphère, on va résoudre avec une équation quadratique :

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{obs} + d\vec{u}$$

$$\text{Équation sphère: } x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_{obs_x} + d\vec{u}_x \\ \vec{r}_{obs_y} + d\vec{u}_y \\ \vec{r}_{obs_z} + d\vec{u}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\vec{r}_{obs_x} + d\vec{u}_x)^2 + (\vec{r}_{obs_y} + d\vec{u}_y)^2 + (\vec{r}_{obs_z} + d\vec{u}_z)^2 = 8^2$$

On obtient une équation sous la forme de $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$$\Delta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

avec $a = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, $b = 2(u_x x + u_y y + u_z z)$ et $c = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

- \vec{u} : vecteur direction de la droite
- \vec{r}_p : vecteur de la position de point de contact
- \vec{r}_{obs} : vecteur donnant la position de l'observateur
- d : distance parcourue par le rayon
- R : rayon de la sphère

Si Δ est égal ou supérieur à 0, alors, il y a intersection. Les coordonnées du point d'intersection sont obtenues à partir de la résolution de l'équation quadratique.

Pour $\Delta = 0$, on a : $d0 = -\frac{b}{2a}$

Pour $\Delta > 0$, on a : $d1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $d2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Alors les coordonnées du point d'intersection sont obtenues avec la formule :

$$\overrightarrow{point} = \vec{r} + \Delta * \vec{u} = (x, y, z) + \Delta * (u_x, u_y, u_z)$$

1.3.2 Intersection entre la droite et le plan

Pour chaque rayon, il est nécessaire de vérifier lequel est en collision avec la boîte. Afin de déterminer laquelle des 6 faces a été touchée, nous utilisons l'équation paramétrique d'une droite qui correspond au rayon.

Le calcul du point d'intersection dans le plan est donné par :

$$\overrightarrow{point} = \vec{r} + \Delta * \vec{u} \quad \text{avec } \Delta = \frac{d - (\hat{n}^T \cdot \vec{r})}{\hat{n}^T \cdot \vec{u}}$$

- d : distance de la face sur le plan
- $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$: le vecteur directeur de la droite du rayon touchant la boîte
- $\vec{r} = (x, y, z)$: le point d'où provient le rayon

La face 1 appartient au plan $x = -\frac{a}{2}$ (cyan). La face 2 appartient au plan $x = +\frac{a}{2}$ (bleue). La face 3 appartient au plan $y = -\frac{b}{2}$ (orange). La face 4 appartient au plan $y = +\frac{b}{2}$ (rouge). La face 5 appartient au plan $z = 0$ (magenta). La face 6 appartient au plan $z = +c$ (verte), où $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm.

1.3.3. Rayons réfractés dans la sphère

Une fois qu'on est certain que le rayon touche la sphère, il est alors nécessaire de vérifier si celui-ci subit une réfraction à l'intérieur de cette dernière ou s'il est réfléchi et donc rejeté. Nous devons avant tout déterminer le vecteur \vec{i} (normale unitaire) par rapport auquel on tentera de faire la réfraction. Celui-ci variera en fonction de quelle surface du plan de la sphère est touchée.

$$\vec{i} = \frac{\vec{r}_c - \vec{a}}{|\vec{r}_c - \vec{a}|}$$

- \vec{r}_c : le point de contact
- \vec{a} : la position du centre de l'objet

Nous avons alors déduit que :

Pour la face 1, $\vec{i} = [-1, 0, 0]$. Pour la face 2, $\vec{i} = [1, 0, 0]$. Pour la face 3, $\vec{i} = [0, -1, 0]$. Pour la face 4, $\vec{i} = [0, 1, 0]$. Pour la face 5, $\vec{i} = [0, 0, -1]$. Pour la face 6, $\vec{i} = [0, 0, 1]$.

Il faut ensuite déterminer les vecteurs \vec{j} et \vec{k} avec ces formules :

$$\vec{j} = \frac{\vec{u}_i \times \vec{i}}{|\vec{u}_i \times \vec{i}|} \text{ et } \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

Ensuite, nous calculons :

$$s_i = \sin(\theta_i) = \vec{u}_i \cdot \vec{k}$$

- \vec{u}_i : vecteur directeur du rayon au moment où il touche la sphère
- θ_i : l'angle d'incidence

De plus, pour s_t , nous utilisons la formule :

$$s_t = \frac{n_i}{n_t} s_i = \sin(\theta_t)$$

- n_i est l'indice de réfraction du premier milieu
- n_t est l'indice de réfraction du deuxième milieu

Le rayon est réfracté si $s_t \leq 1$, alors :

$$\vec{u}_t = -\vec{i} \sqrt{1 - s_t^2} + \vec{k} s_t$$

est la nouvelle direction du rayon une fois qu'il a pénétré la sphère.

Sinon, si $s_t > 1$, on a une réflexion totale interne **donc le rayon est rejeté (non transmis)**.

1.3.4. Rayons réfléchis dans la sphère

Une fois dans la sphère, les rayons poursuivent leur chemin en suivant leur nouvelle direction après la réfraction. À chaque endroit, on vérifie si le point est en contact avec la boîte.

Si on trouve qu'un point où le rayon entre en contact avec la sphère, on vérifie si ce rayon est réfléchi ou réfracté avec les mêmes formules en 1.3.3.

Quand il n'y a pas de réfraction, cela signifie que nous avons une réflexion totale interne. Le nouveau vecteur directeur du rayon réfléchi avec cette formule :

$$s_i = \sin(\theta_i) = \vec{k} \cdot \vec{u}_i$$

$$\vec{u}_r = \vec{i} \sqrt{1 - s_i^2} + \vec{k} s_i$$

Nous continuons ensuite de tracer notre rayon avec ce vecteur directeur, jusqu'à ce que le rayon rencontre à nouveau la bordure intérieure de la sphère ou rentre en contact avec la boîte. On s'est limité à un maximum de 4 réflexions et/ou réfractions pour chaque rayon.

1.4 Reconstitution d'images

Une fois que le rayon touche la boîte, il faut alors reconstituer l'image pour l'observateur. Premièrement, il faut déterminer le vecteur donnant la direction initiale du rayon de lumière à partir de l'œil avec cette formule :

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|}$$

- \vec{r}_0 : position initiale de l'observateur
- \vec{r}_1 : la position du premier point de la sphère touchée par le rayon en partant de \vec{r}_0

Il est aussi important de connaître la distance d totale parcourue par le rayon avec la formule :

$$d = \sum_i^N |\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}|$$

- N : le nombre total de points tracés pour former le rayon
- \vec{r}_i : la position du point à chaque itération i
- \vec{r}_{i-1} : la position du point à l'itération avant i

Nous pouvons alors déterminer la position où le point touché apparaît pour l'observateur avec la formule :

$$\vec{r}_p = \vec{r}_0 + d\vec{u}_0$$

- \vec{r}_0 , position initiale de l'observateur

En répétant ces étapes, il est possible de reconstituer l'image de la boîte avec les points obtenus.

2. Présentation et analyse des résultats

Afin de mettre en application la théorie et de montrer le fonctionnement de notre programme, nous devons effectuer 4 simulations avec différentes conditions.

Simulation	\vec{r}_0 (cm)	n_{int}	n_{ext}
1	[20 ; 20 ; 10]	1.5	1
2	[0 ; 20 ; 2]	1.5	1
3	[0 ; 0 ; 10]	1.5	1
4	[0; 0 ; 10]	1	1.5

Figure 4: Conditions initiales des 4 différentes simulations

Simulation 1

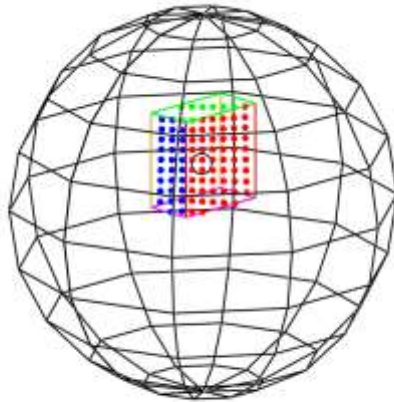


Figure 5: Vue de l'observateur

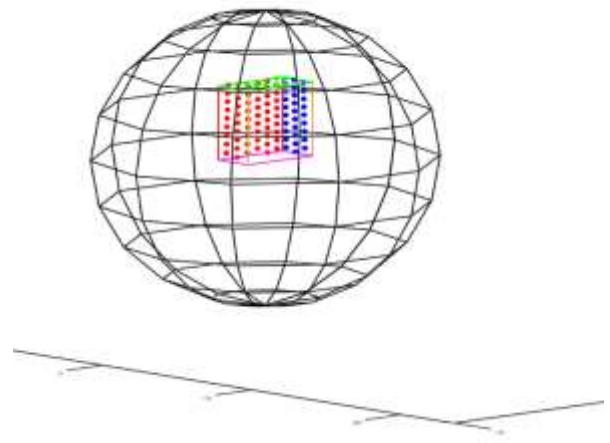


Figure 6: vue opposée à l'observateur

Pour cette simulation, l'indice de réfraction à l'intérieur de la sphère est supérieur à l'indice du milieu extérieur. Cela rend les réflexions totales internes possibles, si l'angle d'incidence est entre des valeurs particulières, c'est-à-dire que le sinus de l'angle est plus grand que 1. On peut voir aussi que l'observateur ne voit pas des faces du plan qui ne sont pas dans sa ligne d'observation. De même, il devrait être possible de voir des réflexions totales internes. Malheureusement, vu que notre code ne fonctionne pas dû à une erreur de dernière minute qui s'est glissée, on n'a pas pu générer les réflexions totales internes avec la simulation. On soupçonne qu'on a inversé un n_{int} et n_{ext} dans notre code.

Simulation 2

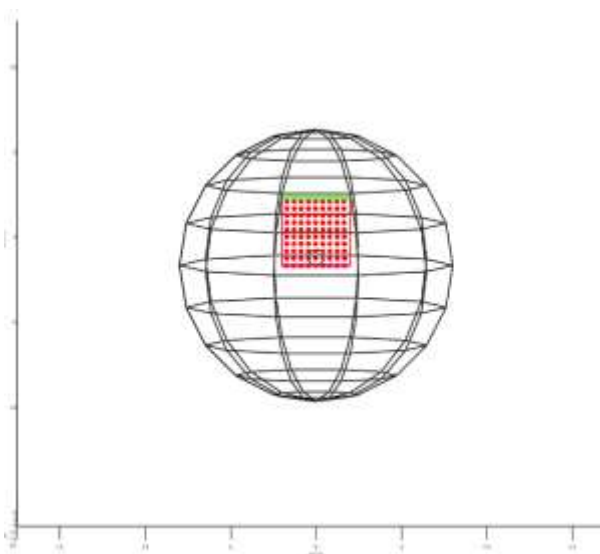


Figure 5: Vue de l'observateur

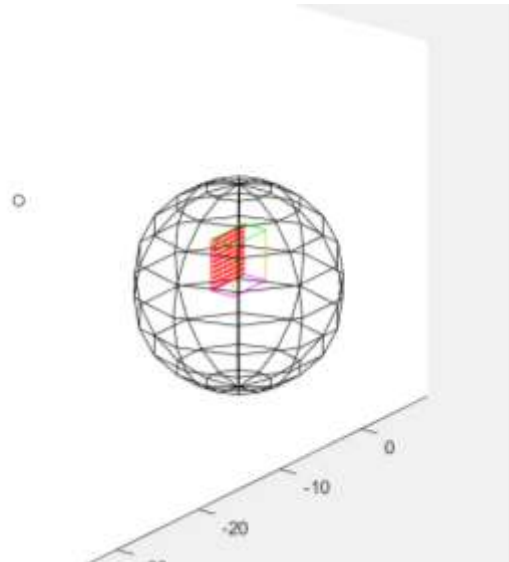


Figure 6: Vue latérale de la sphère

Pour cette simulation, l'indice de réfraction à l'intérieur de la sphère est supérieur à l'indice du milieu extérieur. Cela rend les réflexions totales internes possibles, si l'angle d'incidence est entre des valeurs particulières, c'est-à-dire que le sinus de l'angle est plus grand que 1. On peut voir aussi que l'observateur ne voit pas des faces du plan qui ne sont pas dans sa ligne d'observation. De même, il devrait être possible de voir des réflexions totales internes.

Simulation 3

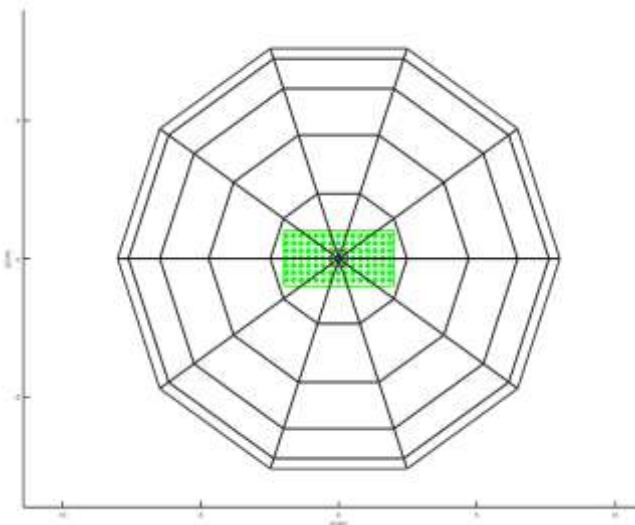


Figure 7: Simulation 3 vue d'en haut

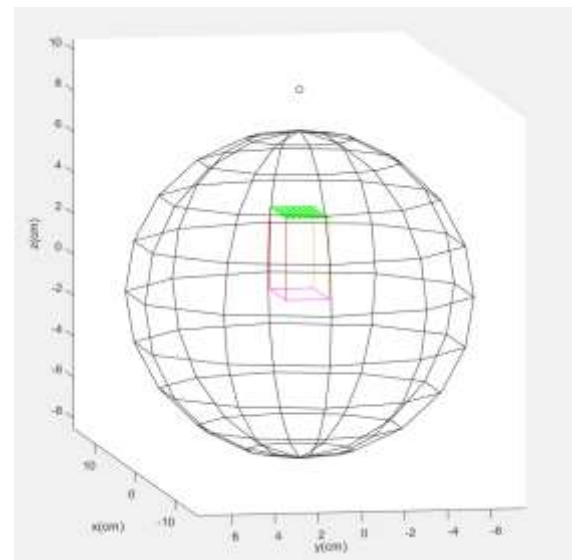


Figure 8: Vue latérale de la sphère

Dans cette simulation, nous devrions voir beaucoup de réflexions totales internes car pour l'observateur, beaucoup de points ne devraient pas sembler à leur place. Nous avions ce résultat avant mais en continuant, la simulation a changé quelques heures avant la remise. Aussi vu que l'indice de réfraction du milieu externe est plus bas que pour le milieu interne, il est normal qu'il y ait des réflexions.

Simulation 4

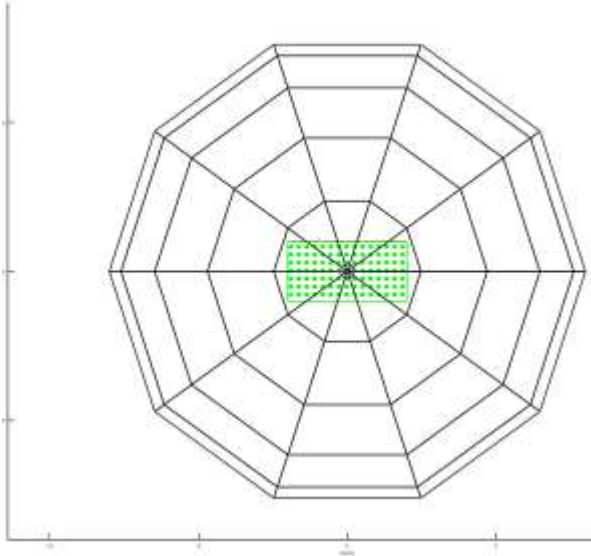


Figure 10: Vue d'en haut de l'observateur

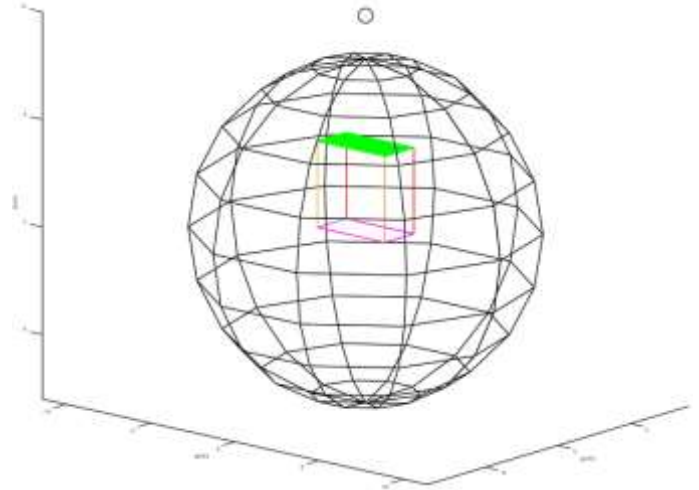


Figure 9: Vue latérale

Pour cette simulation, il est logique que la boîte vue par l'observateur semble avoir moins de points définissant ses surfaces comparativement à la simulation 3. L'indice de réfraction autour de la sphère est supérieur à l'indice de réfraction dans la sphère. Cela fait en sorte que plusieurs rayons n'entrent pas à l'intérieur de la sphère et sont réfléchis (rejetés) plutôt que d'être réfractés.

De plus, on remarque aussi que l'observateur ne voit pas les faces qui ne sont pas devant lui. En effet, à cause des indices de réfraction, une fois que les rayons sont dans la sphère, dès qu'ils toucheront la surface, ceux-ci seront réfractés hors de la sphère et donc rejetés. Ceci est dû au fait que l'indice de réfraction du milieu extérieur est plus grand que celui dans la sphère.

Conclusion

En conclusion, nous avons réussi à reconstituer l'image virtuelle de la boîte vue par l'observateur. Nous avons rencontré plusieurs difficultés lors de la réalisation de ce laboratoire. Au début, les angles polaire et azimutal étaient difficiles à être déterminés. Mais après plusieurs explications données en classe et plusieurs essais, nous avons pu les trouver à l'aide de la trigonométrie. La normale correspondante aux différentes faces de la boîte aussi a été un défi. Nous ne sommes pas parvenus à afficher les rayons rejetés en revanche.

Nous avons passé plus de temps que prévu à la réalisation de ce laboratoire et malgré ces défis, nous avons réussi à avoir un résultat final plus ou moins cohérent.