POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

Devoir 1

Moment d'inertie et accélération angulaire

Date de remise : le lundi 3 octobre 2022

On désire simuler le vol d'un drone de livraison à six hélices. La figure 1 montre un exemple d'un tel drone. On peut représenter ce drone par une demi-sphère pleine de masse $m_s = 1.5$ kg, de rayon $R_s = 30$ cm sur laquelle sont soudés six bras de longueur $L_b = 50$ cm et de masse $m_b = 0.2$ kg. Les bras sont répartis équitablement sur la circonférence de la demi-sphère. Pour simplifier le problème, on considérera que les bras sont cylindriques creux, de rayon $R_b = 2.5$ cm. Au bout de chaque bras, est fixé, de façon solidaire, un moteur représenté par un cylindre plein de hauteur $H_m = 10$ cm, de rayon $R_m = 5$ cm et de masse $m_m = 0.4$ kg. Les moteurs sont munis d'hélices de masse négligeable. Les bras et les moteurs sont numérotés de 1 à 6 comme montré sur la figure 2 (M_i et B_i, i varie de 1 à 6). La distance entre les axes des moteurs et le centre de la demi-sphère est donc $(R_S + L_b + R_m)$.

Figure 1 : photo d'un drone de livraison

Le système d'axes lié au drone (oxyz) a comme origine le centre de la base circulaire de la demi-sphère. Les orientations des axes ox, oy et oz sont indiquées sur la figure 2. On considérera que les bases des moteurs et les faces inférieures des bras sont dans le plan oxy.

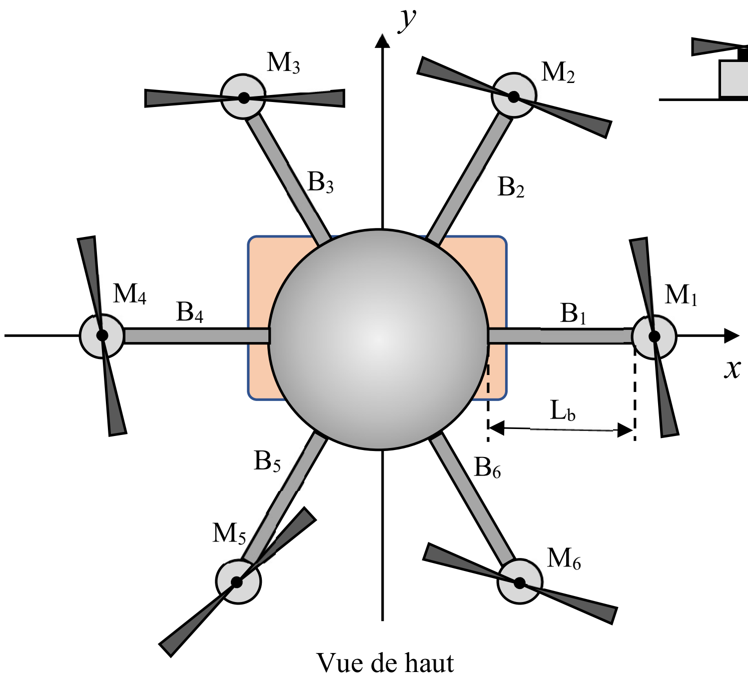
Lorsqu'il tourne à plein régime, chaque moteur peut exercer une force maximale F_{max}=20 N dirigée dans l'axe du moteur. Lors du vol du drone, la puissance électrique fournie à chacun des moteurs est ajustée de façon individuelle afin de pouvoir guider le drone. La force exercée par un moteur peut alors s'écrire :

$$\vec{F}_i = \lambda_i F_{max} \hat{z}$$

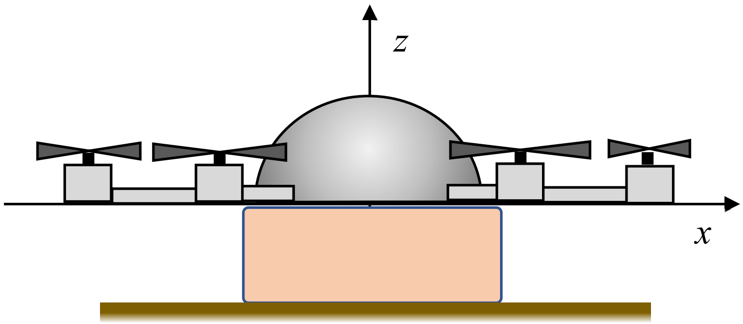
avec $\lambda_i$un nombre réel variant entre 0 et 1, l'indice *i* représente le numéro du moteur et $\hat{z}$, le vecteur unitaire de l'axe oz du référentiel lié au drone.

Le drone transporte un colis de masse $m_c = 0.8$ kg et de forme parallélépipède de longueur $L_c = 0.7$ m dans la direction *ox*, de largeur $l_c = 0.4$ m dans la direction *oy* et de hauteur $H_c = 0.3$ m dans la direction *oz*. Le colis, considéré comme étant homogène (son centre de masse coïncide avec son centre géométrique) se situe sous la demi-sphère mais légèrement décalé dans la direction *oy* positif de sorte que son centre de masse se situe à $\vec{r}_c = (0, 0.1, -0.15)$m .

À l'instant initial, le drone repose sur le sol horizontal tel que représenté sur la figure 2 (vue de face). À cette position, le système d'axes du laboratoire (OXYZ) est confondu avec le système d'axes lié au drone (oxyz) décrit plus haut. L'accélération gravitationnelle est $\vec{g} = (0,0,-9.81)\ m/s^2$.



Vue de haut



Vue de face

Figure 2 : Modèle du drone de livraison avec sa cargaison. Vue de haut et de face.

But du devoir

Le but de ce devoir est de programmer une fonction Matlab ou Octave qui permet de calculer la position du centre de masse, le moment d'inertie et l'accélération angulaire du drone pour différentes conditions initiales. La fonction demandée doit pouvoir être appelée comme suit :

```
[pcm acm MI aa]=Devoir1(pos,ar,va,Lambda)
```

Les données d'entrée pour cette fonction sont :

- `pos=[pos_x;pos_y;pos_z]` est le vecteur $\vec{r}_o$ indiquant, dans le référentiel du laboratoire, la position de l'origine du référentiel lié au drone (en mètre).
- `ar` représente l'angle de rotation (en rad) du système drone+colis autour de l'axe *OY* (on se limitera à ce seul axe de rotation).
- `va=[va_x;va_y;va_z]` est le vecteur $\vec{\omega}$ décrivant la vitesse angulaire (en rad/s) du système drone+colis autour de son centre de masse.
- `Lambda=[ lambda_1, lambda_2, lambda_3, lambda_4, lambda_5, lambda_6]` est un vecteur de six composantes indiquant les coefficients λ_i des moteurs M_i.

Les résultats produits par cette fonction Matlab (ou Octave) sont :

- `pcm=[pcm_x;pcm_y;pcm_z]`, le vecteur $\vec{r}_{CM}$ indiquant la position du centre de masse du système drone+colis (en m) dans le référentiel du laboratoire;
- `acm=[acm_x;acm_y;acm_z]`, le vecteur accélération $\vec{a}_{CM}$ du centre de masse du système drone+colis (en m) dans le référentiel du laboratoire;
- `MI`, la matrice moment d'inertie ***I*** du système drone+colis par rapport à son centre de masse dans le référentiel du laboratoire (kg×m^2) ;
- `aa=[aa_x;aa_y;aa_z]`, le vecteur l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ du système drone+colis autour de son centre de masse (en rad/s^2).

Simulations requises

Vous devez ensuite utiliser cette fonction pour analyser deux différentes situations :

- **Cas 1** :
  Le drone est au sol (position indiquée sur la figure 2) et sa vitesse angulaire est nulle. La force appliquée par chaque moteur est maximale.

- **Cas 2 :**
  Le drone est dans les airs, la position du point o est $\vec{r}_o = (-3.5;\ 2.0;\ 40.0)$(en m) les coefficients λ_i sont (0.4; 0.5; 0.6; 0.6; 0.5; 0.4). Le drone a subi une rotation de 0.2 rad autour de l'axe OY et sa vitesse angulaire est $\vec{\omega} = (0, 0.05, 0.01)$ rad/s.

Centre de masse et moment d'inertie d'une demi-sphère pleine et homogène :

Le centre de masse d'une demi-sphère pleine de rayon R est situé sur son axe de symétrie oz à une distance de $\frac{3}{8}R$ de sa base. Son moment d'inertie par rapport à son centre de masse est donné par :

$$\begin{pmatrix} \frac{83}{320} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83}{320} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} mR^2$$