



武汉大学测绘学院
SCHOOL OF GEODESY AND GEOMATICS

《惯性导航原理》实验报告

实验 2: 捷联惯导系统的静态解析粗对准

姓名: _____ 明佳浩 _____

学号: _____ 2023302143030 _____

年级: _____ 2023级 _____

班级: _____ 智能导航二班 _____

教师: _____ 朱锋、张万威、孙骁 _____

二〇二五年十月

目 录

一、 实验概述	错误! 未定义书签。
二、 实验目的	3
三、 实验仪器	3
四、 实验原理	4
1. 姿态角定义	4
2. 静态解析粗对准的基本原理	5
五、 实验步骤和方法	7
六、 注意事项	8
七、 程序设计	8
1. 数据读取	8
2. 轴系调整以及误差补偿	10
3. 静态解析粗对准	10
八、 实验结果	11
九、 实验总结	13

一、实验概述

惯性导航解算是一个时间积分过程,通过加速度的积分可以获取速度和位置信息,通过角速度的积分可以获取载体姿态。因此,必须在导航之前预先确定积分初值,该过程通常被称为惯性导航的初始化,或者称为初始对准。初始化参数主要包括位置、速度和姿态等。其中,位置和速度通常可以通过GNSS等其他技术确定,因此,姿态初始化是惯导初始对准的主要难点。

本实验旨在通过通过静态解析粗对准的方法对捷联式惯导的姿态进行初始化,并分析按不同时间间隔进行静态数据平均后的姿态曲线。

二、实验目的

- (1) 掌握惯性导航系统初始对准的概念。
- (2) 掌握静态解析粗对准的原理,会利用高精度IMU的原始观测数据计算惯导的初始姿态,知道姿态的欧拉角和方向余弦矩阵形式。
- (3) 掌握静态解析粗对准的基本误差分析方法,了解影响对准精度的误差因素。

三、实验仪器

中高精度惯性测量单元(IMU),实验仪器型号为Novatel SPAN-100C,采样率为200Hz。

四、实验原理

惯性导航刚上电启动时，其IMU或载体坐标系相对于参考导航坐标系的各轴指向完全未知或不够精确，无法立即进入导航状态。确定载体相对于参考导航坐标系坐标轴的先买个对空间朝向关系的过程，称为初始对准。初始姿态可用姿态角或方向余弦矩阵来表示。

1. 姿态角定义

如图1所示，载体或IMU的姿态可用一组欧拉角来表示，定义如下：

1. 航向角 ψ ：载体纵轴(图中x轴)正方向在当地水平面上的投影与当地地理北向的夹角，常取北偏东为正，取值范围为 $0^\circ \sim 360^\circ$ 或 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 。
2. 俯仰角 θ ：载体纵轴正方向与其水平投影线之间的夹角，当载体“抬头”时定义为正，取值范围为 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 。
3. 横滚角 ϕ ：载体利州正方向与载体纵轴所在铅锤面之间的夹角，当载体向右倾斜(如飞机右机翼下压)时为正，取值范围为 $-180^\circ \sim 180^\circ$ 。

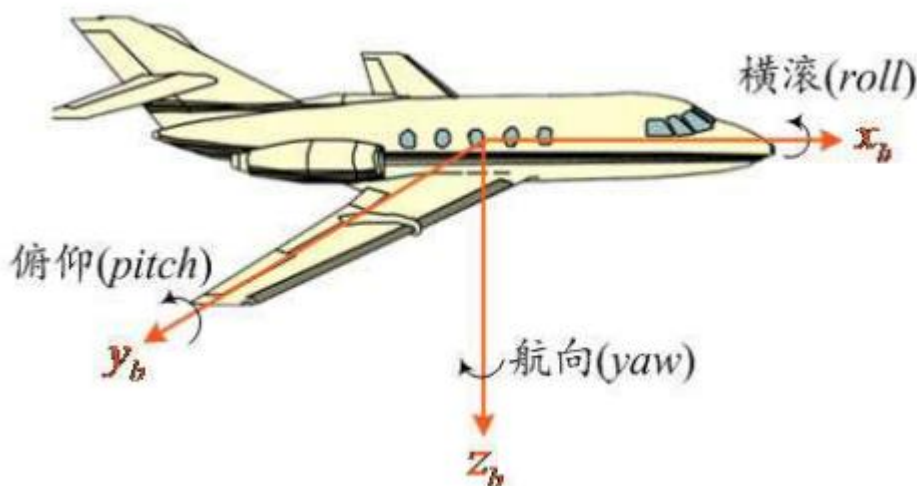


图1 载体的坐标轴及姿态角示意图（假设IMU的x, y, z 轴分别与飞机载体x, y, z 轴对齐）

载体的姿态也可以用方向余弦矩阵(或称姿态矩阵)来表示,方向余弦矩阵通过描述三维向量在两个不同坐标系下的坐标变换来表示姿态。例如,姿态矩阵 C_b^n 表示从b系到n系的坐标变换矩阵,或者说该矩阵可以将任意三维向量在b系下的坐标变换为在n系下的坐标,即 $v^n = C_b^n v^b$ 。

欧拉角和姿态矩阵之间可相互转转,其中根据欧拉角计算姿态矩阵的公式如下:

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

根据姿态矩阵,计算对应的欧拉角方法如下:

$$\begin{cases} \theta = \tan^{-1} \frac{-c_{31}}{\sqrt{c_{32}^2 + c_{33}^2}}, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} \\ \phi = \tan^{-1} \frac{c_{32}}{c_{33}}, |\phi| \leq \pi \\ \psi = \tan^{-1} \frac{c_{21}}{c_{11}}, |\psi| \leq \pi \end{cases} \quad (2)$$

其中, c_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$ 表示姿态矩阵 C_b^n 的第i行第j列的元素。

2. 静态解析粗对准的基本原理

取北东地方向为导航坐标系的坐标轴,即NED形式的n系。初始对准时,IMU静止放置在地面上,此时加速度计感知的是重力加速度 g 向量在b系(前右下)中的分量,陀螺仪感知的是地球自转角速度向量 w_{ie} 在b系中的分量。这两个矢量在导航系n中(已知当地的经纬高)的分量是已知的,并且是常值。上述向量在n系和b系间的坐标投影变换记作

$$\begin{aligned} g^b &= C_n^b g^n \\ w_{ie}^b &= C_n^b w_{ie}^n \end{aligned} \quad (3)$$

构造第三向量 v

$$v = g \times w_{ie} \quad (4)$$

式中运算符 \times 表示两个向量的叉乘，即矢量积，计算规则如下，对于任意三维向量 $v = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ 和 $v_1 = [v_{1x} \ v_{1y} \ v_{1z}]^T$ ，有

$$v \times v_1 = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(4)等号两边的向量，投影到n系，有

$$v^n = g_n \times w_{ie}^n \quad (6)$$

根据公式(3) (4) (6)，构造如下矩阵表达式

$$\begin{bmatrix} (g^b)^T \\ (w_{ie}^b)^T \\ (v^b)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (w_{ie}^n)^T \\ (v^n)^T \end{bmatrix} (C_b^n)^T = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (w_{ie}^n)^T \\ (v^n)^T \end{bmatrix} C_b^n \quad (7)$$

解得

$$C_b^n = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (w_{ie}^n)^T \\ (v^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (g^b)^T \\ (w_{ie}^b)^T \\ (v^b)^T \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中，

$$g^n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, w_{ie}^n = \begin{bmatrix} w_e \cos \varphi \\ 0 \\ -w_e \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$w_{ie}^b = w_{ib}^b = \begin{bmatrix} w_{ib,x} \\ w_{ib,y} \\ w_{ib,z} \end{bmatrix}, g^b = -f^b = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -f_z \end{bmatrix}$$

g^b 和 w_{ie}^b 可由加速度计和陀螺测量得到，如果式(8)中的逆矩阵存在，待确定的姿态矩阵 C_b^n 便可唯一确定下来。但矩阵中的任一行不是其余行的线性组合时，该逆矩阵便存在；如果两个矢量 g^n 和 w_{ie}^n 不共线，这个条件总能满足。此时有

$$C_b^n = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (w_{ie}^n)^T \\ (v^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (g^b)^T \\ (w_{ie}^b)^T \\ (v^b)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tan \varphi}{g} & \frac{1}{w_e \cos \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{g w_e \cos \varphi} \\ \frac{1}{g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (g^b)^T \\ (w_{ie}^b)^T \\ (v^b)^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

根据姿态矩阵，可以出IMU对应的姿态角，式(10)即双矢量定姿和静态解析粗对准的基本原理。

在实际应用中，由于加速度计和陀螺仪的测量值存在误差，由上式解出来的姿态矩阵不满足正交矩阵的特性，求解的姿态角也存在误差。为提升数值稳定性，需要对式(10)做一定的改进，一种常用的思路是预先对参与解算的所有矢量做正交化和单位化处理。

定义向量

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{g^n}{|g^n|}, v_w = \frac{g^n \times w_{ie}^n}{|g^n \times w_{ie}^n|}, v_{gw} = \frac{g^n \times w_{ie}^n \times g^n}{|g^n \times w_{ie}^n \times g^n|} \\ w_g &= \frac{\tilde{g}^b}{|\tilde{g}^b|}, w_w = \frac{\tilde{g}^b \times \tilde{w}_{ie}^b}{|\tilde{g}^b \times \tilde{w}_{ie}^b|}, w_{gw} = \frac{\tilde{g}^b \times \tilde{w}_{ie}^b \times \tilde{g}^b}{|\tilde{g}^b \times \tilde{w}_{ie}^b \times \tilde{g}^b|} \end{aligned} \quad (11)$$

求解姿态矩阵

$$C_b^n = \begin{bmatrix} v_g^T \\ v_w^T \\ v_{gw}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_g^T \\ w_w^T \\ w_{gw}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_g & v_w & v_{gw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_g^T \\ w_w^T \\ w_{gw}^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

由上式求解得到的姿态矩阵必然为单位正交矩阵，再根据所得姿态矩阵求解响应的姿态角。

五、实验步骤和方法

(1) 将IMU放置在地面上(或静置在转台上)，连接电源和数据线缆，保持IMU不动。

(2) 检查线缆连接无误后给IMU上电，记录IMU数据，连续静态时长不小于30分钟。

(3) 断开数据采集，关闭电源。

(4) 对IMU原始数据进行解码、格式转换和轴系调整，所需解码软件和格式说明参考文档。

(5) 编写程序计算IMU的初始姿态角，横滚、俯仰和航向角。

六、注意事项

(1) IMU原始数据的轴系调整

实验中所用的IMU的载体坐标系(b系)的x-y-z可能与IMU外壳的右前上方向一致，在做初始对准之前，我们必须将其调整为与前右下一致，再套用公式进行解算，具体调整公式如下：

$$\begin{aligned} f_{a,x} &= f_{raw,y}, f_{a,y} = f_{raw,x}, f_{a,z} = -f_{raw,z} \\ w_{a,x} &= w_{raw,y}, w_{a,y} = w_{raw,x}, w_{a,z} = -w_{raw,z} \end{aligned} \quad (13)$$

其中，

$f_{a,x}$ 为调整后的x轴加速度计测量值；

$f_{raw,x}$ 为调整前的x轴加速度计的原始测量值；

$w_{a,x}$ 为调整后的x轴陀螺角速度测量值；

$w_{raw,x}$ 为调整前的x轴陀螺的原始角速度测量值；

其余符号的含义类推。

七、程序设计

1. 数据读取

惯导解析粗对准和后续解算都是为了获取某时刻载体的位置、速度、姿态等信息，因此，程序中设计InerNav惯性导航系统类，集成加速度计和陀螺仪，负责载体信息的相关解算，部分定义见下：

```
1. // 惯性导航系统
2. class InerNav
3. {
4. private:
```

```

5.     ProcessedData data; // 当前时刻观测数据/平均观测数据
6.     Attitude att;      // 当前时刻载体姿态
7. public:
8.     Accer acc;
9.     Gyro gyro;
10. public:
11.     InerNav() {}
12.     Attitude getAtt() { return att; }
13.
14.     bool compensate(RawInerData &raw_data, bool need_trans = false);
15.     void staticCoarseAlign(double lat);
16. };

```

数据读取模块参考实验一IMU误差标定模块的数据读取，区别主要在于两次实验读取的数据格式略有不同，因此，仅在实验一读取单行IMU数据函数的基础上进行修改完善，具体如下：

```

1. ...
2. // 根据首字段确定数据开始顺序
3. int start_idx = 5;
4. if (tokens[0] == "%RAWIMUSA")
5. {
6.     start_idx = 5;
7. }
8. else if (tokens[0] == "%RAWIMUSXA")
9. {
10.     start_idx = 7;
11. }
12. else
13. {
14.     return false;
15. }
16.
17. // 解析数据
18. data.gpstime.week = stoi(tokens[1]);
19. data.gpstime.sow = stod(tokens[2].substr(0, 9));
20. data.frq = frq;
21. data.delta_v[2] = stod(tokens[start_idx]) * ACC_SCALE[type];
22. data.delta_v[1] = -stod(tokens[start_idx + 1]) * ACC_SCALE[type];
23. data.delta_v[0] = stod(tokens[start_idx + 2]) * ACC_SCALE[type];
24. data.delta_angle[2] = stod(tokens[start_idx + 3]) * GYRO_SCALE[type];
25. data.delta_angle[1] = -stod(tokens[start_idx + 4]) * GYRO_SCALE[type];
26. data.delta_angle[0] = stod(tokens[start_idx + 5]) * GYRO_SCALE[type];
27.
28. ...

```

主要修改逻辑在于对文件数据进行识别，从而确定数据格式。

2. 轴系调整以及误差补偿

考虑到IMU原始测量数据包含仪器零偏等一系列误差(本实验不必考虑), 并且可能存在坐标轴定义与公式中定义不同的情况。因此, 在使用原始观测值进行初始对准(或后续解算)之前, 本程序首先设计了 `bool compensate(RawInerData& raw_data, bool need_trans = false)` 函数对数据进行改正, 具体设计如下:

```
1.  /*
2.  @brief 综合加速度计和陀螺仪观测值改正
3.  @param 是否需要坐标转换(ENU->NED)
4.  @return 改正成功返回true
5.  */
6.  bool InerNav::compensate(RawInerData &raw_data, bool need_trans)
7.  {
8.      // 保持与原始数据一致
9.      double temp_acc[3] = {raw_data.acc[0], raw_data.acc[1], raw_data.acc[2]};
10.     double temp_gyro[3] = {raw_data.gyro[0], raw_data.gyro[1], raw_data.gyro[2]};
11.     if (need_trans) // 进行轴系调整
12.     {
13.         temp_acc[0] = raw_data.acc[1], temp_acc[1] = raw_data.acc[0], temp_acc[2] = -raw_data.acc[2];
14.         temp_gyro[0] = raw_data.gyro[1], temp_gyro[1] = raw_data.gyro[0], temp_gyro[2] = -raw_data.gyro[2];
15.     }
16.     // 补充仪器零偏, 比例因子等误差
17.     data.acc = acc.compensate(temp_acc);
18.     data.gyro = gyro.compensate(temp_gyro);
19.     if (data.acc.isZero(1e-10) || data.gyro.isZero(1e-10))
20.     {
21.         return false;
22.     }
23.     return true;
24. }
```

3. 静态解析粗对准

按照公式(11)和公式(12), 粗对准部分容易实现, 仅须完成观测向量和理想观测向量的构造与处理后即可最小二乘求解, 具体如下:

```
1.  /*
2.  @brief 静态粗对准
3.  @param lat:纬度(°)
```

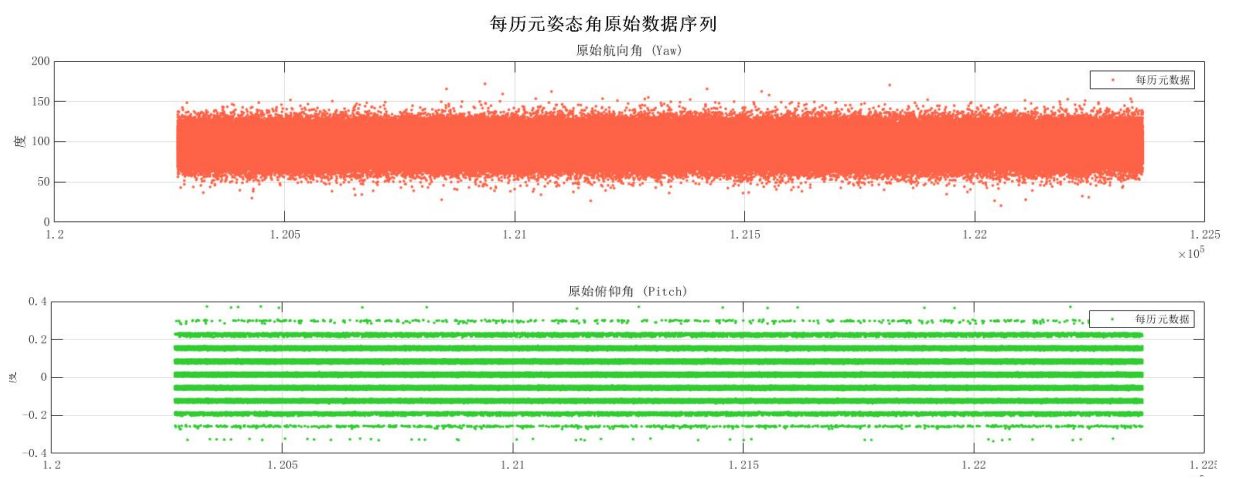
```

4. */
5. void InerNav::staticCoarseAlign(double lat)
6. {
7.     lat = lat * PI / 180;
8.     // 理想输出向量并单位化
9.     Vector3d gn = { 0.0,0.0,G_VAL }, wie_n = { We * cos(lat),0.0,-We * sin(lat) };
10.    Vector3d vg = gn, vw = gn.cross(wie_n), vgw = gn.cross(wie_n).cross(gn);
11.    vg.normalize(); vw.normalize(); vgw.normalize();
12.
13.    // 观测向量并单位化
14.    Vector3d gb = { -data.acc[0],-data.acc[1],-data.acc[2] }, wieb = { data.gyro[0],data.gyro[1],data.gyro[2] };
15.    Vector3d wg = gb, ww = gb.cross(wieb), wgw = gb.cross(wieb).cross(gb);
16.    wg.normalize(); ww.normalize(); wgw.normalize();
17.
18.    // 求解姿态矩阵
19.    Matrix3d A, B;
20.    A.col(0) = vg, A.col(1) = vw, A.col(2) = vgw;
21.    B.row(0) = wg.transpose(), B.row(1) = ww.transpose(), B.row(2) = wgw.transpose();
22.    att.Cb_n = A * B;
23.
24.    // 求解姿态角
25.    att.yaw = atan2(att.Cb_n(1, 0), att.Cb_n(0, 0)) * (180 / PI);
26.    att.pitch = atan(-att.Cb_n(2, 0) / sqrt(pow(att.Cb_n(2, 1), 2) + pow(att.Cb_n(2, 2), 2))) * (180 / PI);
27.    att.roll = atan2(att.Cb_n(2, 1), att.Cb_n(2, 2)) * (180 / PI);
28. }

```

八、实验结果

按照原理中的方法对每历元的数据进行处理，得到各历元的姿态角结果如下：



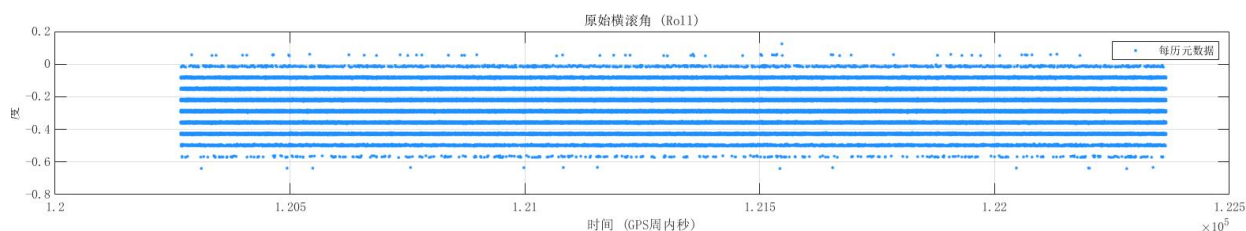


图2 每历元姿态角

上图可以看出，载体姿态受噪声影响较大，其中，由于载体水平放置，俯仰角和横滚角绝对数值较小，但是偏航角绝对数值下至 50° ，上至 150° ，整体变化幅度较大。由下表可以进一步看出，单历元观测数据受噪声影响较大，因此，需要对姿态角进行平滑处理。

	航向角($^{\circ}$)	俯仰角($^{\circ}$)	横滚角($^{\circ}$)
标准差	13.0122	0.0866	0.0854

图1 每历元姿态角std

将整段数据平均后计算一次姿态角，再以每秒平均值计算姿态角，将得到的结果与每历元姿态角对比，得到以下结果：

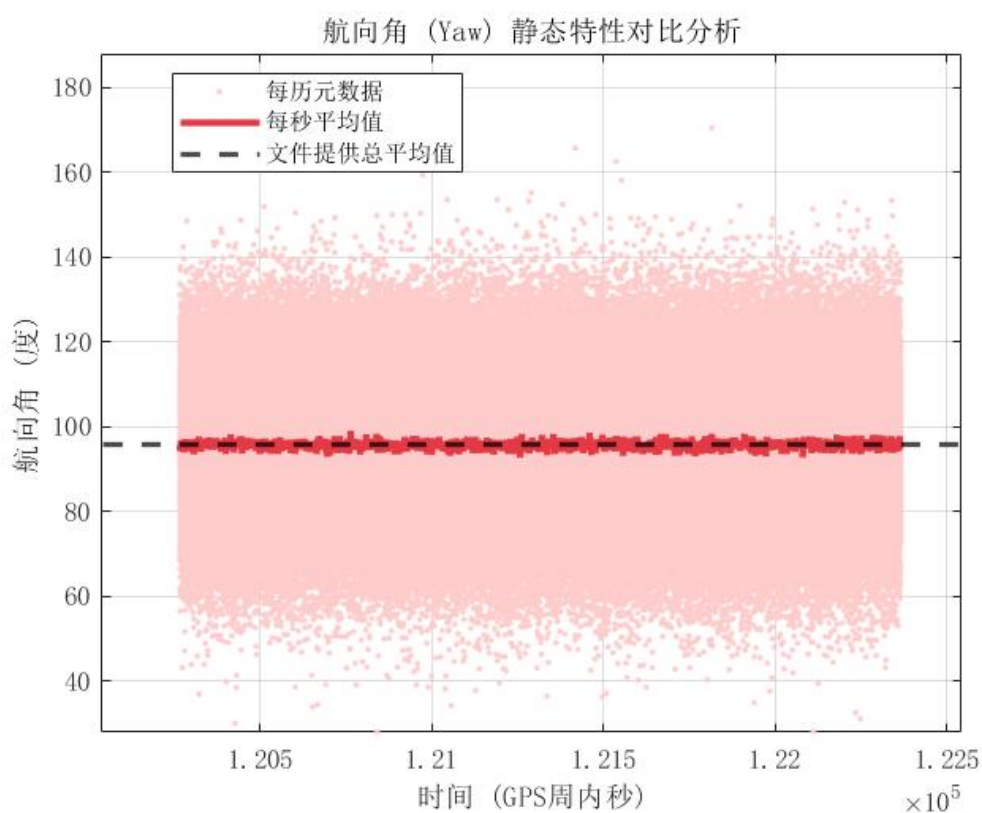


图3 不同平滑情况下偏航角-时间曲线图

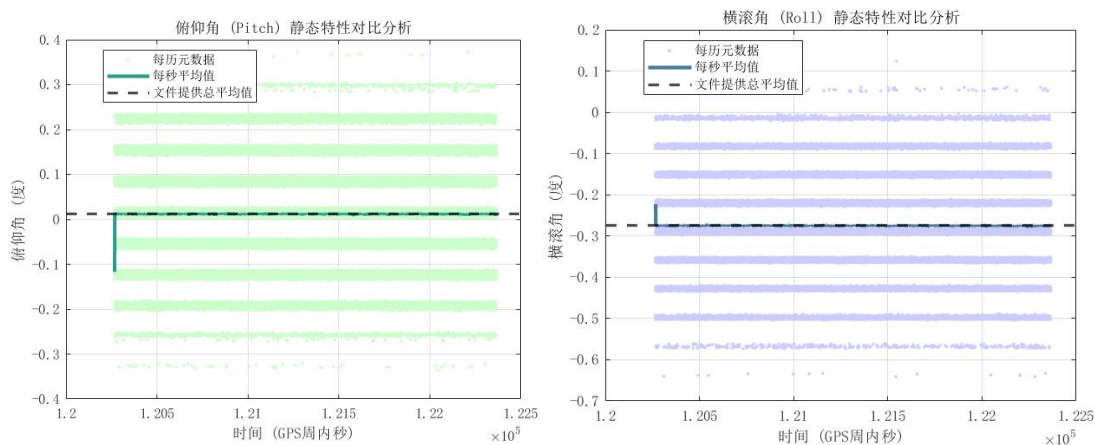


图4 不同平滑情况下俯仰角/横滚角-时间曲线图

由图3和图4可以明显看出，原始的每历元数据波动剧烈，直接使用任意一点作为初值引入会引入巨大误差。而经过平均后的曲线则平滑许多(图4实现部分首历元未作平均)，总平均给出了一个稳定的估计值，平均对初始对准来讲可以抑制随机噪声，提高解算精度；并且平均能够将一段时间内含噪的数据序列，提炼成一个单一、可靠的姿态值，作为惯导解算的初始值。

由图中我们还可以观察到，俯仰角和横滚角的绝对波动幅度小于偏航角，前面我们已经粗略分析过，这是由于实验设备测量过程中处于水平放置状态，相对平稳，俯仰角和横滚角数值较小，噪声相对影响较小；而偏航角不仅数值较大，并且可能还受测量过程中地面震动的影响，导致受到的噪声相对较大，波动幅度较大。

九、实验总结

本次实验的核心目标是了解并掌握捷联式惯导静态解析粗对准的原理和方法，能够通过平滑滤波消除观测过程中的噪声影响，获得高精度的姿态(位置、速度)初值，以便后续解算使用。

惯导初值解算有各种方法，在实验中，我们主要采用粗对准方法，该方法简单且不依赖于其他技术，但也存在着一些缺点。首先，该方法感知的是地球重力和自转角速度，但外部对载体施加额外的力时（即载体不是静止时），该方法不再适用；第三，从上述实验结果中我们可以看出，该方法极其依赖于长时间的滤波平滑，如果对准时间较短，则无法将观测噪声压制到足够低的水平，该方法也不再适用；第四，参考粗对准的原理，如果载体位于两极地区，地球重力方向和自转角速度方向相同，缺少冗余向量进行解算，也不能适用该方法。

与此同时，如果陀螺仪的噪声或零偏不稳定性远大于地球自转角速度的信号强度，那么陀螺仪的输出将被噪声完全淹没，无法有效提取出地球自转信息，该方法不再适用。一般按照微机械级、战术级（陀螺零偏 $1-10\text{deg/h}$ ）、导航级（陀螺零偏 $1/1000 w_{ie}$ ）、战略级（陀螺零偏 0.001deg/h ）对IMU进行划分，导航级和战略级的IMU才有能力进行静态解析粗对准，得到较为可信的结果。

综上所述，本实验通过对IMU静态姿态数据的分析，成功验证了数据平均在抑制传感器噪声、提高初始对准精度方面的核心价值。实验结果清晰地展示了从充满噪声的原始数据到平滑的平均曲线，再到最终精确的平均值的“提纯”过程。同时，通过对实验原理的进一步探讨，我们深刻理解了静态粗对准的物理原理、适用边界及其对IMU精度等级的苛刻要求。