

**2018 ~ 2019 学年第一学期**  
**《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)**

院(系)\_\_\_\_\_ 专业班级\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_

考试日期: 2018 年 12 月 2 日

考试时间: 8:30 ~ 11:00

**一、单项选择题 (每题 2 分, 共 24 分).**

1. 复数  $3 - 2i$  的主辐角为: ( )

A.  $-\arctan\frac{3}{2} + \pi$ ,      B.  $-\arctan\frac{2}{3} + \pi$ ,      C.  $-\arctan\frac{2}{3}$ ,      D.  $-\arctan\frac{3}{2}$ .

2.  $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$  的值为: ( )

A.  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,      B.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,      C.  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,      D.  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

3. 在复平面上, 下列哪个方程不能表示以  $z_0$  为圆心, 以  $r (> 0)$  为半径的圆周? ( )

A.  $|z - z_0| = r$ ,      B.  $|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2 - r^2 = 0$ ,  
 C.  $(z - z_0)^2 = r^2$ ,      D.  $z = z_0 + re^{-i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ .

4. 若复变函数  $f(z) = v + ui$  在区域 D 内解析, 则在区域 D 内下列说法一定正确的是: ( )

A.  $u$  是  $v$  的共轭调和函数,      B.  $v$  是  $u$  的共轭调和函数,  
 C.  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数,      D.  $u$  是  $-v$  的共轭调和函数.

5. 若曲线 C 为  $z = t - t^2i, 0 \leq t \leq 1$ , 则积分  $\int_C (z - 1)dz$  的值为: ( )

A. 1,      B. -1,      C.  $1 + i$ ,      D.  $1 - i$ .

6. 积分  $\oint_{|z|=1} \left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right) dz$  的值为: ( )

A.  $2\pi i$ ,      B.  $4\pi i$ ,      C. 0,      D.  $-2\pi i$ .

7. 若幂级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-1)^n$  在点  $z = 3$  收敛, 则该级数一定收敛的点为: ( )

A.  $-2 + \sqrt{3}i$ ,      B.  $2 + \sqrt{3}i$ ,      C.  $-1 + \sqrt{3}i$ ,      D.  $1 + \sqrt{3}i$ .

8. 函数  $f(z) = \frac{1}{z} + 1 + 2z$  在无穷远点的留数为: ( )

A. -1,      B. 1,      C. -2,      D. 2.

9.  $z = 0$  是函数  $f(z) = \frac{1}{\cos\frac{1}{z}}$  的 ( ).

A. 可去奇点,      B. 本性奇点,      C. 极点,      D. 非孤立奇点.

10. 级数  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$  的收敛环域为: ( )

A.  $\frac{1}{2} < |z| < 3$ ,      B.  $2 < |z| < 3$ ,      C.  $\frac{1}{3} < |z| < 2$ ,      D.  $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$ .

11. 函数  $F(\omega) = e^{\omega j}$  的 Fourier 逆变换  $f(t)$  为: ( )  
 A.  $2\pi\delta(t - 1)$ ,      B.  $2\pi\delta(t + 1)$ ,      C.  $\delta(t - 1)$ ,      D.  $\delta(t + 1)$ .
12. 函数  $f(t) = (t - 1)(\sin t)\delta(t - 2)$  的 Fourier 变换  $F(\omega)$  为: ( ).  
 A.  $e^{-2\omega j} \sin 2$ ,      B. 0,      C.  $e^{2\omega j} \sin 2$ ,      D.  $\sin 2$ .

二、(12 分) 已知  $u(x, y) = 2(x - 1)y$ , 验证  $u(x, y)$  为调和函数, 并求二元函数  $v(x, y)$ , 使得函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  为解析函数, 且满足  $f(2) = -i$ .

三、(12 分) 将函数  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$  在点  $z_0 = 3$  展开为 Laurent 级数。

四、计算下列积分(每题 5 分, 共 10 分).

$$1. \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^{10}} dz. \quad 2. \oint_{|z|=2} \frac{z}{1-z} e^{\frac{1}{z}} dz.$$

五、计算下列积分(每题 5 分, 共 10 分).

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \sqrt{2}x}{x^4 + 1} dx. \quad 2. \oint_{|z|=2} \frac{z^{33}}{(z^3 + 3)^3 (z^5 + 5)^5} dz.$$

六、(6 分) 求区域  $D = \{z = x + yi: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$  在映射  $w = \sqrt{\frac{i+e^{iz}}{i-e^{iz}}}$  下的像. (答题过程需用图形表示)

七、(10 分) 求一共形映射  $w = f(z)$ , 将  $z$  平面上的区域  $D = \{z: |z| < 1, |z + \sqrt{3}| < 2\}$  映射到  $w$  平面上的上半平面. (答题过程需用图形表示)

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程:

$$x''(t) + x(t) = -3 \cos 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 1.$$

九、(6 分) 设函数  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R$  内满足条件: (1). 除一阶极点  $z_0$  外处处解析, (2). 只有

一个一阶零点  $z_1$ , 且  $|z_1 - z_0| < r < R$ . 证明:  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_1 - z_0$ .