

2018 ~ 2019 学年第一学期

《复变函数与积分变换》课程考试试卷(A卷) (闭卷)

院(系) _____ 专业班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

考试日期: 2018 年 12 月 2 日

考试时间: 8:30 ~ 11:00

一、单项选择题 (每题 2 分, 共 24 分).

1. 复数 $3 - 2i$ 的主辐角为: ()

- A. $-\arctan \frac{3}{2} + \pi$, B. $-\arctan \frac{2}{3} + \pi$, C. $-\arctan \frac{2}{3}$, D. $-\arctan \frac{3}{2}$.

2. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ 的值为: ()

- A. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, B. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, C. $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, D. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 在复平面上, 下列哪个方程不能表示以 z_0 为圆心, 以 $r(>0)$ 为半径的圆周? ()

- A. $|z - z_0| = r$, B. $|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0z + |z_0|^2 - r^2 = 0$,
C. $(z - z_0)^2 = r^2$, D. $z = z_0 + re^{-i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

4. 若复变函数 $f(z) = v + ui$ 在区域 D 内解析, 则在区域 D 内下列说法一定正确的是: ()

- A. u 是 v 的共轭调和函数, B. v 是 u 的共轭调和函数,
C. $-u$ 是 v 的共轭调和函数, D. u 是 $-v$ 的共轭调和函数.

5. 若曲线 C 为 $z = t - t^2i, 0 \leq t \leq 1$, 则积分 $\int_C (z - 1)dz$ 的值为: ()

- A. 1, B. -1, C. $1 + i$, D. $1 - i$.

6. 积分 $\oint_{|z|=1} \left(\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right) dz$ 的值为: ()

- A. $2\pi i$, B. $4\pi i$, C. 0, D. $-2\pi i$.

7. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-1)^n$ 在点 $z = 3$ 收敛, 则该级数一定收敛的点为: ()

- A. $-2 + \sqrt{3}i$, B. $2 + \sqrt{3}i$, C. $-1 + \sqrt{3}i$, D. $1 + \sqrt{3}i$.

8. 函数 $f(z) = \frac{1}{z} + 1 + 2z$ 在无穷远点的留数为: ()

- A. -1, B. 1, C. -2, D. 2.

9. $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{1}{\cos \frac{1}{z}}$ 的 ().

- A. 可去奇点, B. 本性奇点, C. 极点, D. 非孤立奇点.

10. 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{z^{n+1}} + \frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$ 的收敛环域为: ()

- A. $\frac{1}{2} < |z| < 3$, B. $2 < |z| < 3$, C. $\frac{1}{3} < |z| < 2$, D. $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.

11. 函数 $F(\omega) = e^{\omega j}$ 的 Fourier 逆变换 $f(t)$ 为: ()

A. $2\pi\delta(t-1)$, B. $2\pi\delta(t+1)$, C. $\delta(t-1)$, D. $\delta(t+1)$.

12. 函数 $f(t) = (t-1) (\sin t) \delta(t-2)$ 的 Fourier 变换 $F(\omega)$ 为: ().

A. $e^{-2\omega j} \sin 2$, B. 0, C. $e^{2\omega j} \sin 2$, D. $\sin 2$.

二、(12 分) 已知 $u(x, y) = 2(x-1)y$, 验证 $u(x, y)$ 为调和函数, 并求二元函数 $v(x, y)$, 使得函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 为解析函数, 且满足 $f(2) = -i$.

三、(12 分) 将函数 $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)}$ 在点 $z_0 = 3$ 展开为 Laurent 级数。

四、计算下列积分(每题 5 分, 共 10 分).

1. $\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^{10}} dz$. 2. $\oint_{|z|=2} \frac{z}{1-z} e^{\frac{1}{z}} dz$.

五、计算下列积分(每题 5 分, 共 10 分).

1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \sqrt{2}x}{x^4+1} dx$. 2. $\oint_{|z|=2} \frac{z^{33}}{(z^3+3)^3(z^5+5)^5} dz$.

六、(6 分) 求区域 $D = \{z = x + yi: -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\}$ 在映射 $w = \sqrt{\frac{i+e^{iz}}{i-e^{iz}}}$ 下的像。(答题过程需用图形表示)

七、(10 分) 求一共形映射 $w = f(z)$, 将 z 平面上的区域 $D = \{z: |z| < 1, |z + \sqrt{3}| < 2\}$ 映射到 w 平面的上半平面。(答题过程需用图形表示)

八、(10 分) 利用 Laplace 变换求解下面常微分方程:

$$x''(t) + x(t) = -3 \cos 2t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 1.$$

九、(6 分) 设函数 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内满足条件: (1). 除一阶极点 z_0 外处处解析, (2). 只有一个一阶零点 z_1 , 且 $|z_1 - z_0| < r < R$. 证明:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = z_1 - z_0.$$