

FM 的形式

$$y(x) = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i, v_j \rangle x_i x_j$$

其中前两项为基本的线性回归，后一项为特征的交互项。 $x \in R^n$ 为 n 为特征， w 为线性回归参数， $V \in R^{n \times k}$ 为交互矩阵， k 为超参数，相对于对输入 x 的每一维定义了一个隐向量， $\langle v_i, v_j \rangle$ 表示向量的内积。

可以化简交互项为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \langle v_i, v_j \rangle x_i x_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{f=1}^k \left(\left(\sum_{i=1}^n v_{i,f} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n v_{i,f}^2 x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum [(x \cdot V)^2 - (x^2 \cdot V^2)] \end{aligned}$$

中括号中就是矩阵乘积的平方减去矩阵平方的乘积。