

## Team Note of GeongongiIsMae

Junseo Park, Jimin Kim, Mingi Jeong

2025 ICPC Seoul Regional (BEXCO, Busan)

## Contents

## 1 Python

- 1.1 정렬 비교 함수 구현 . . . . .
- 1.2 itertools . . . . .

## 2 STL

- 2.1 set . . . . .
- 2.2 map . . . . .
- 2.3 priority\_queue . . . . .
- 2.4 bitset . . . . .
- 2.5 permutation . . . . .

## 3 정렬/이분 탐색 관련

- 3.1 정렬 비교 함수 구현 . . . . .
- 3.2 좌표 압축 . . . . .
- 3.3 이분 탐색 관련 STL . . . . .

## 4 자료구조

- 4.1 PBDS . . . . .
- 4.2 Erasable Priority Queue . . . . .
- 4.3 펜윅 트리(BIT) . . . . .
- 4.4 세그먼트 트리 . . . . .
- 4.5 세그먼트 트리 + 레이지 프로퍼게이션 . . . . .
- 4.6 퍼시스턴트 세그먼트 트리 . . . . .
- 4.7 회성 지도 세그 . . . . .
- 4.8 금광 세그(최대 부분합 세그) . . . . .
- 4.9 머지 소트 트리 . . . . .
- 4.10 단조 큐(Monotone Queue) . . . . .
- 4.11 Convex Hull Trick (Stack, LineContainer) . . . . .

## 5 DP

- 5.1  $O(N \log N)$  LIS . . . . .
- 5.2 Berlekamp-Massey, 카타마사법 . . . . .
- 5.3 SOS(Sum Over Subsets) DP . . . . .
- 5.4  $O(N \times \max W)$  Subset Sum (Fast Knapsack) . . . . .
- 5.5 DP Optimization, Knuth Optimization . . . . .
- 5.6 Monotone Queue Optimization . . . . .
- 5.7 Slope Trick . . . . .
- 5.8 Aliens Trick . . . . .

## 6 그래프

- 6.1 최단 거리 - Floyd Warshall . . . . .
- 6.2 최단 거리 - Dijkstra . . . . .
- 6.3 최단 거리 - Bellman Ford . . . . .
- 6.4 유니온 파인드 + 최소 신장 트리(Kruskal) . . . . .
- 6.5 SCC - Kosaraju . . . . .
- 6.6 BCC - Tarjan . . . . .
- 6.7 최대 유량 - Dinic . . . . .

6.8 MCMF . . . . .	8	<b>10 Misc</b>	17
6.9 이분 매칭 . . . . .	8	10.1 삼분 탐색 . . . . .	17
6.10 이분 매칭 - Hopcroft Karp . . . . .	9	10.2 Mo's Algorithm . . . . .	17
6.11 플로우 관련 정리 . . . . .	9	10.3 C++ 랜덤, GCC 확장, 비트마스킹 트릭 . . . . .	17
6.12 안정 결혼 문제 . . . . .	9	10.4 Floating Point Add (Kahan) . . . . .	17
6.13 최소 공통 조상(LCA) . . . . .	9	10.5 Fast I/O, Fast Div, Fast Mod . . . . .	17
6.14 Heavy Light Decomposition . . . . .	9	10.6 Python Decimal . . . . .	17
6.15 센트로이드 트리 . . . . .	10		
<b>7 수학</b>	<b>10</b>	<b>11 Notes</b>	<b>17</b>
7.1 바닥합수, 천장합수 . . . . .	10	11.1 구간별 약수 최대 개수, 최대 소수 . . . . .	17
7.2 빠른 거듭제곱 . . . . .	10	11.2 비트 연산 . . . . .	18
7.3 Harmonic Lemma . . . . .	10	11.3 Triangles/Trigonometry . . . . .	18
7.4 FloorSum . . . . .	10	11.4 Calculus, Newton's Method . . . . .	18
7.5 Linear Sieve . . . . .	10	11.5 Zeta/Mobius Transform . . . . .	18
7.6 확장 유클리드 알고리즘 . . . . .	10	11.6 Generating Function . . . . .	18
7.7 중국인의 나머지 정리 . . . . .	10	11.7 Counting . . . . .	18
7.8 Miller Rabin + Pollard Rho . . . . .	11	11.8 Faulhaber's Formula ( $\sum_{k=1}^n k^c$ ) . . . . .	19
7.9 가우스 소거법 - RREF, 랭크, 행렬식, 역행렬 . . . . .	11	11.9 About Graph Degree Sequence . . . . .	19
7.10 다항식 곱셈(FFT) . . . . .	11	11.10 Burnside, Grundy, Pick, Hall, Simpson, Area of Quadrangle, Fermat Point, Euler, Pythagorean . . . . .	19
7.11 이항 계수를 소수로 나눈 나머지(Lucas' theorem) . . . . .	11	11.11 About Graph Minimum Cut . . . . .	19
7.12 이항 계수 관련 공식 . . . . .	12	11.12 Matrix with Graph(Kirchhoff, Tutte, LGV) . . . . .	19
7.13 Partition Number . . . . .	12	11.13 About Graph Matching(Graph with $ V  \leq 500$ ) . . . . .	19
7.14 De Bruijn Sequence . . . . .	12	11.14 Checklist . . . . .	20
7.15 지그재그 순열의 개수 구하기 . . . . .	12		
<b>8 문자열</b>	<b>12</b>	<b>1 Python</b>	
8.1 정규 표현식 . . . . .	12	<b>1.1 정렬 비교 함수 구현</b>	
8.2 문자열 해싱 . . . . .	12	Usage: 첫 번째가 두 번째보다 작으면(less-than) 음수 값(유지), 같으면 0, 크면(greater-than) 양수 값(교체)	
8.3 문자열 매칭 - KMP . . . . .	13		
8.4 가장 긴 팰린드롬 부분 문자열 - Manacher . . . . .	13	# (예제) 큰 수 만들기	
8.5 문자열 매칭 - Z . . . . .	13	def f(a, b):	
8.6 Aho-Corasick . . . . .	13	return(int(a+b)<int(b+a))-(int(a+b)>int(b+a)) #int(b+a)가	
8.7 접미사 배열 . . . . .	13	크면 1,int(a+b)가 크면 -1, 같으면 0	
8.8 All LCS . . . . .	13	import functools	
<b>9 계산 기하</b>	<b>13</b>	A = list(input().split())	
9.1 2차원 계산 기하 템플릿 + CCW . . . . .	13	print(int(''.join(sorted(A, key=functools.cmp_to_key(f)))))	
9.2 360도 각도 정렬 . . . . .	14		
9.3 다각형 넓이 . . . . .	14		
9.4 선분 교차 판정 . . . . .	14		
9.5 Intersect Series . . . . .	14		
9.6 Segment Distance, Segment Reflect . . . . .	14		
9.7 다각형 내부 판별 . . . . .	15		
9.8 볼록 껍질 - Graham Scan . . . . .	15		
9.9 가장 면 두 점 - Rotating Calipers . . . . .	15		
9.10 볼록 다각형 내부 판별 . . . . .	15		
9.11 Segment In Polygon . . . . .	15		
9.12 Polygon Cut, Center, Union . . . . .	15		
9.13 Polycon Raycast . . . . .	15		
9.14 $O(N \log N)$ Shamos-Hoey . . . . .	15		
9.15 $O(N \log N)$ 반평면 교집합 . . . . .	16		
9.16 $O(N^2 \log N)$ Bulldozer Trick(Rotating Sweep Line Technique) . . . . .	16		
		B=['a','b']	
		importtools.product(A,B) # 데카르트 곱(cartesian product)	
		#[1, 'a'), (1, 'b'), (2, 'a'), (2, 'b'), (3, 'a'), (3, 'b')]	

## 2 STL

### 2.1 set

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

template<typename T>
struct Cmp {
    bool operator() (const T& a, const T& b) const {
        if (abs(a) != abs(b)) return abs(a) < abs(b);
        return a > b;
    }
};

int main() {
    set<int, greater<int>> S1 = { 1, 2, 3, 4 }; // descending order
    for (auto& i : S1) cout << i << ' '; cout << '\n'; // 4 3 2 1

    set<int, Cmp<int>> S2 = { 3, -1, -4, 1, 5, 1 }; // custom compare function
    for (auto& i : S2) cout << i << ' '; cout << '\n'; // 1, -1, 3, -4, 5
}

int main() {
    set<int> S = { 1, 2 }; // initializer_list
    auto [it1, flag1] = S.insert(2); // S = { 1, 2 }, *it1 == 2, flag1 == 0
    auto [it2, flag2] = S.insert(3); // S = { 1, 2, 3 }, *it2 == 3, flag2 == 1
    it1 = S.erase(it1); // S = { 1, 3 }, *it1 == 3
    auto cnt = S.erase(3); // S = { 1 }, cnt == 1

    cout << "S.size() : " << S.size() << '\n'; // 1
    cout << "S.empty() : " << S.empty() << '\n'; // 0
    S.clear();

    for (auto& i : { 3, 1, 4, 1, 5 }) S.insert(i); // S = { 1, 3, 4, 5 }
    for (auto& i : S) cout << i << ' '; cout << '\n'; // 1 3 4 5

    if (S.count(2)) cout << "found 2" << '\n'; // x
    if (S.count(3)) cout << "found 3" << '\n'; // o

    auto lo = S.lower_bound(3); // *lo == 3, *prev(lo) < 3 <= *lo
    auto hi = S.upper_bound(3); // *lo == 4, *prev(lo) <= 3 < *lo
}
```

### 2.2 map

```
int main() {
    fastio;
    map<string, int> M;
    M["abc"] = 3; // == M.insert({ "abc", 3 })
    cout << M["abc"] << '\n'; // 3
    M["abc"] = 4;
    cout << M["abc"] << '\n'; // 4

    auto it = M.erase("abc"); // M = { }, it == M.end()
    M["hi"] = 123; // M = { { "hi", 123 } }
    auto cnt = M.erase("hi"); // M = { }, cnt == 1
}
```

```
cout << "M.size() : " << M.size() << '\n'; // 0
cout << "M.empty() : " << M.empty() << '\n'; // 1
M.clear();

vector<string> s{ "ab", "cde", "fghi" };
vector<int> v{ 3, 1, 4 };
for (int i = 0; i < 3; i++) M[s[i]] = v[i];
for (auto& [a, b] : M) cout << '(' << a << ', ' << b << ')' << ' ';
cout << '\n'; // (ab,3) (cde,1) (fghi,4)

if (M.count("abc")) cout << "found abc" << '\n'; // x
if (M.count("cde")) cout << "found cde" << '\n'; // o
}
```

### 2.3 priority\_queue

```
#include <queue>
using namespace std;
// 최대 힙 우선순위 큐
priority_queue<int, vector<int>> q1;
priority_queue<int, vector<int>, less<int>> q2;
// 최소 힙 우선순위 큐
priority_queue<int, vector<int>, greater<int>> q;
// 멤버 함수: push, pop, top, size, empty

// priority_queue의 정렬 기준을 지정하는 여러 가지 방법
struct Info {
    int val;
    bool operator< (const Info& i) const {
        return val > i.val; // val이 가장 작은게 최댓값
    }
};
priority_queue<Info> PQ;

struct Cmp {
    bool operator() (const int& a, const int& b) const {
        return a > b; // 가장 작은게 최댓값
    }
};
priority_queue<int, vector<int>, Cmp> PQ;

auto Cmp = [] (const int& a, const int& b) { return a > b; }; // 가장 작은게 최댓값
priority_queue<int, vector<int>, decltype(Cmp)> PQ(Cmp);

bool Cmp(const int& a, const int& b) {
    return a > b; // 가장 작은게 최댓값
}
priority_queue<int, vector<int>, decltype(&Cmp)> PQ(Cmp);
```

### 2.4 bitset

Usage: 낭비되는 7bit를 없애기 위해서 0, 1을 하나 당 1bit에 저장하는 자료형

```
int main() {
    bitset<10> B1; // B1 = "0000000000"
    bitset<10> B2(13); // B2 = "0000001101"
    bitset<10> B3("1011"); // B3 = "0000001011"
    cout << B1 << '\n' << B2 << '\n' << B3 << '\n';
}
```

```
bitset<5> B4("01011");
bitset<5> B5("00111");
cout << (B4 & B5) << '\n'; // 00011
cout << (B4 | B5) << '\n'; // 01111
cout << (B4 ^ B5) << '\n'; // 01100
cout << (B4 << 2) << '\n'; // 01100
cout << (B4 >> 2) << '\n'; // 00010
cout << ~B4 << '\n'; // 10100

bitset<100> B;
B.set(); cout << B.count() << '\n'; // 100
B.reset(); cout << B.count() << '\n'; // 0
cout << B.size() << '\n' << '\n'; // 100
```

```
B[2] = 1; // B = "...100"
cout << B.count() << '\n'; // 1
cout << B.any() << '\n'; // 1
cout << B.all() << '\n'; // 0
cout << B.none() << '\n' << '\n'; // 0

B[2].flip(); // B = "...000"
cout << B.count() << '\n'; // 0
cout << B.any() << '\n'; // 0
cout << B.all() << '\n'; // 0
cout << B.none() << '\n' << '\n'; // 1
```

```
B[1] = B[3] = B[4] = 1;
string s = B.to_string();
cout << s << '\n'; // ...11010
}
```

## 2.5 permutation

```
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

int main() {
    vector<int> v{ 1, 2, 3, 4 };
    do {
        for (auto& i : v) cout << i << ' ';
        cout << '\n';
    } while (next_permutation(v.begin(), v.end()));

    string s = "dcba";
    do cout << s << '\n';
    while (prev_permutation(s.begin(), s.end()));
}
```

## 3 정렬/이분 탐색 관련

### 3.1 정렬 비교 함수 구현

```
struct Point{
    int x, y;
    // 방법 1: 연산자 오버로딩
    // x좌표 오름차순, x좌표 같으면 y좌표 오름차순
    // sort(시작 주소, 끝 주소)
    bool operator < (const Point &p) const {
        if(x != p.x) return x < p.x;
        else return y < p.y;
    }
}
```

```

};

// 방법 2: 비교 함수 구현
// sort(시작 주소, 끝 주소, Compare)
bool Compare(const Point &a, const Point &b){
    if(a.x != b.x) return a.x < b.x;
    else return a.y < b.y;
}

vector<Point> V;
V.push_back({1, 2});
V.push_back({1, 1});
V.push_back({2, 3});
sort(V.begin(), V.end()); // 방법 1
sort(V.begin(), V.end(), Compare); // 방법 2

```

### 3.2 좌표 압축

```

// 원소의 대소관계를 유지하면서 [0, N] 범위의 수로 압축함
// ex. {50, 31, 24, 10, 46, 10} -> {4, 2, 1, 0, 3, 0}
int N = 6, A[6] = {50, 31, 24, 10, 46, 10};
vector<int> C;
for(int i=0; i<N; i++) C.push_back(A[i]);
sort(C.begin(), C.end());
C.erase(unique(C.begin(), C.end()), C.end());
for(int i=0; i<N; i++){
    A[i] = lower_bound(C.begin(), C.end(), A[i]) - C.begin();
}
for(int i=0; i<N; i++) cout << A[i] << " "; // 4 2 1 0 3 0

```

### 3.3 이분 탐색 관련 STL

```

vector<int> v = {3, 5, 7, 7, 7, 10};

// lower_bound: x 이상인 가장 빠른 위치
// 배열은 정렬되어 있어야 함, O(log N)
for(int i=3; i<=8; i++){
    cout << lower_bound(v.begin(), v.end(), i) - v.begin() << " ";
} // 0 1 1 2 2 5
cout << "\n";

// upper_bound: x 초과인 가장 빠른 위치
// 배열은 정렬되어 있어야 함, O(log N)
for(int i=3; i<=8; i++){
    cout << upper_bound(v.begin(), v.end(), i) - v.begin() << " ";
} // 1 1 2 2 5 5
cout << "\n";

// binary_search: x가 있으면 true, 없으면 false
// 배열은 정렬되어 있어야 함, O(log N)
for(int i=3; i<=8; i++){
    cout << binary_search(v.begin(), v.end(), i) << " ";
} // 1 0 1 0 1 0
cout << "\n";

vector<int> a = {1, 3, 5, 2, 4, 6};

// nth_element(a.begin(), a.begin()+k, a.end())
// 정렬했을 때 a[k]에 와야 하는 수가 a[k]에 옴
// a[k] 미만의 수는 모두 a[0..k-1]으로 이동

```

```

// a[k] 초과의 수는 모두 a[k+1..]으로 이동
// 평균 시간 복잡도 O(N), 최악 시간 복잡도 O(N log N)
nth_element(a.begin(), a.begin()+3, a.end());
for(auto i : a) cout << i << " "; // a b c 4 d e
// a b c <= 4, d e >= 4

```

## 4 자료구조

### 4.1 PBDS

Usage: order\_of\_key(NUM) : ordered\_set에서 NUM 보다 작은(미만의) 원소의 개수를 반환한다.  
`find_by_order(K)` : ordered\_set에서 (K+1)번째 원소가 있는 iterator 을 반환한다. (K가 0이면 1번째)

```

#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
#define ordered_set tree<int, null_type, less<int>,
rb_tree_tag,tree_order_statistics_node_update>

```

### 4.2 Erasable Priority Queue

```

template<class T=int, class O=less<T>>
struct pq_set {
    priority_queue<T, vector<T>, O> q, del;
    const T& top() const { return q.top(); }
    int size() const { return int(q.size())-del.size(); }
    bool empty() const { return !size(); }
    void insert(const T x) { q.push(x); flush(); }
    void pop() { q.pop(); flush(); }
    void erase(const T x) { del.push(x); flush(); }
    void flush() { while(del.size() && q.top()==del.top())
q.pop(), del.pop(); }
};

```

### 4.3 펜윅 트리(BIT)

Time Complexity:  $O(\log N)$

```

SIZE = 1<<17
tree = [0]*SIZE

# 1-based
def update(i, diff):
    while i < SIZE:
        tree[i] += diff
        i += i&-i

def getSum(i):
    s = 0
    while i > 0:
        s += tree[i]
        i -= i&-i
    return s

```

### 4.4 세그먼트 트리

Time Complexity:  $O(\log N)$

```

#include <bits/stdc++.h>
#define fastio cin.tie(0)->sync_with_stdio(0)
using namespace std;
using ll = long long;
// 13만-> 1 << 17 (131072), 26만-> 1 << 18 (262144)

```

```

// 52만-> 1 << 19 (524288), 100만-> 1 << 20 (1048576)
const int SIZE = 1<<20;
ll tree[SIZE*2];
ll arr[SIZE];

ll merge(ll a, ll b){
    return a+b;
}

// k번째 수를 반환
int getkth(int k, int node, int S, int E){
    if(S==E) return S;
    int mid = (S+E)/2;
    if(tree[node*2]>=k) return getkth(k, node*2, S, mid);
    else return getkth(k-tree[node*2], node*2+1, mid+1, E);
}

// X번째 수를 V로 지정
void update(int X, ll V, int node, int S, int E){
    if(S==E){
        tree[node] = V;
        return;
    }
    int mid = (S+E)/2;
    if(X<=mid) update(X, V, node*2, S, mid);
    else update(X, V, node*2+1, mid+1, E);
    tree[node] = merge(tree[node*2], tree[node*2+1]);
}

// [L, R] 구간 쿼리
ll query(int L, int R, int node, int S, int E){
    if(R<S || E<L) return 0; // 항등원
    if(L<=S && E>=R) return tree[node];
    int mid = (S+E)/2;
    return merge(query(L, R, node*2, S, mid), query(L, R, node*2+1, mid+1, E));
}

// S-based indexing으로 초기화
ll init(int node, int S, int E){
    if(S==E) return tree[node] = arr[S];
    int mid = (S+E)/2;
    return tree[node] = merge(init(node*2, S, mid),
init(node*2+1, mid+1, E));
}

int main(){
    fastio;
    int n, m, k;
    cin >> n >> m >> k;
    for(int i=1; i<=n; i++) cin >> arr[i];
    init(1, 1, n);
    for(int i=0; i<m+k; i++){
        ll a, b, c;
        cin >> a >> b >> c;
        if(a==1) update(b, c, 1, 1, n);
        else cout << query(b, c, 1, 1, n) << '\n';
    }
}

```

## 4.5 세그먼트 트리 + 레이지 프로퍼게이션

Time Complexity:  $O(\log N)$

```
// SZ: N보다 크거나 같은 2^k 꼴의 수
// 13만 -> 1 << 17 (131072), 26만 -> 1 << 18 (262144)
// 52만 -> 1 << 19 (524288), 100만 -> 1 << 20 (1048576)
constexpr int SZ = 1 << 20;
ll T[SZ<<1], L[SZ<<1];

void Push(int node, int s, int e){
    if(L[node] == 0) return;
    T[node] += (e - s + 1) * L[node];
    if(s != e) L[node*2] += L[node], L[node*2+1] += L[node];
    L[node] = 0;
}

// [l, r]번째 수에 v를 더함, 0 <= l <= r < SZ
void RangeAdd(int l, int r, ll v, int node=1, int s=0, int e=SZ-1){
    Push(node, s, e);
    if(r < s || e < l) return;
    if(l <= s && e <= r){ L[node] += v; Push(node, s, e); return; }
    int m = (s + e) / 2;
    RangeAdd(l, r, v, node*2, s, m);
    RangeAdd(l, r, v, node*2+1, m+1, e);
    T[node] = T[node*2] + T[node*2+1];
}

// [l, r]번째 수의 합을 구함
ll RangeSum(int l, int r, int node=1, int s=0, int e=SZ-1){
    Push(node, s, e);
    if(r < s || e < l) return 0;
    if(l <= s && e <= r) return T[node];
    int m = (s + e) / 2;
    return RangeSum(l, r, node*2, s, m) + RangeSum(l, r, node*2+1, m+1, e);
}

4.6 퍼시스턴트 세그먼트 트리
Usage: call init(root[0], s, e) before use

struct PSTNode{
    PSTNode *l, *r; int v;
    PSTNode(){ l = r = nullptr; v = 0; }
};

PSTNode *root[101010];
PSTNode(){} memset(root, 0, sizeof root); // constructor
void init(PSTNode *node, int s, int e){
    if(s == e) return;
    int m = s + e >> 1;
    node->l = new PSTNode; node->r = new PSTNode;
    init(node->l, s, m); init(node->r, m+1, e);
}

void update(PSTNode *prv, PSTNode *now, int s, int e, int x){
    if(s == e){ now->v = prv ? prv->v + 1 : 1; return; }
    int m = s + e >> 1;
    if(x <= m){
        now->l = new PSTNode; now->r = prv->r;
        update(prv->l, now->l, s, m, x);
    }
}
```

```
else{
    now->r = new PSTNode; now->l = prv->l;
    update(prv->r, now->r, m+1, e, x);
}
int t1 = now->l ? now->l->v : 0;
int t2 = now->r ? now->r->v : 0;
now->v = t1 + t2;
}

int kth(PSTNode *prv, PSTNode *now, int s, int e, int k){
    if(s == e) return s;
    int m = s + e >> 1, diff = now->l->v - prv->l->v;
    if(k <= diff) return kth(prv->l, now->l, s, m, k);
    else return kth(prv->r, now->r, m+1, e, k-diff);
}

4.7 화성 지도 세그
const int SIZE = 1<<16;
int tree[SIZE*2];
int len[SIZE*2];

void update(int L, int R, int V, int node, int S, int E){
    if(R < S || E < L) return;
    if(L <= S && E <= R) tree[node] += V;
    else{
        int mid = (S+E)/2;
        update(L, R, V, node*2, S, mid);
        update(L, R, V, node*2+1, mid+1, E);
    }
    if(tree[node]>0) len[node] = E-S+1;
    else if(S==E) len[node] = 0;
    else len[node] = len[node*2]+len[node*2+1];
}

int query(){return len[1];}

4.8 금광 세그(최대 부분합 세그)
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
typedef long long ll;
const ll INF = 1e9;
struct Node {
    ll LMax; // 왼쪽에서 시작한 부분합 중 최댓값
    ll RMax; // 오른쪽에서 시작한 부분합 중 최댓값
    ll Max; // 그냥 최댓값
    ll Sum; // 그냥 합
    Node() {
        LMax = RMax = Max = Sum = -INF;
    }
    void setVal(ll x) {
        LMax = RMax = Max = Sum = x;
    }
};
int N;
ll arr[100001];
Node SegTree[400001];

Node merge(Node lNode, Node rNode) {
    Node ret;
    ret.LMax = max(lNode.LMax, lNode.Sum + rNode.LMax);
    ret.RMax = max(rNode.RMax, lNode.RMax + rNode.Sum);
    ret.Max = max(lNode.Max, rNode.Max, lNode.RMax + rNode.LMax);
    ret.Sum = lNode.Sum + rNode.Sum;
    return ret;
}

void init(int idx, int st, int ed) {
    if(st == ed) {
        SegTree[idx].setVal(arr[st]);
        return;
    }
    int mid = (st+ed)/2;
    init(2*idx, st, mid);
    init(2*idx+1, mid+1, ed);
    SegTree[idx] = merge(SegTree[2*idx], SegTree[2*idx+1]);
}

Node query(int idx, int nodeSt, int nodeEd, int reqSt, int reqEd) {
    if(reqEd < nodeSt || nodeEd < reqSt) return Node();
    else if (reqSt <= nodeSt && nodeEd <= reqEd) return SegTree[idx];
    else {
        int nodeMid = (nodeSt + nodeEd)/2;
        Node left = query(2*idx, nodeSt, nodeMid, reqSt, reqEd);
        Node right =
            query(2*idx+1, nodeMid+1, nodeEd, reqSt, reqEd);
        return merge(left, right);
    }
}

int main() {
    cin.tie(0)->sync_with_stdio(0);
    cin >> N;
    for (int i=0;i<N;i++) cin >> arr[i];
    init(1,0,N-1);
    int T; cin >> T;
    while (T--) {
        int a, b;
        cin >> a >> b;
        a--; b--;
        Node ret = query(1,0,N-1,a,b);
        cout << ret.Max << '\n';
    }
    return 0;
}
```

Time Complexity:  $O((\log N)^2)$

```
const int SIZE = 1<<17;
vector<int> tree[SIZE*2];
int arr[SIZE];

void init(int node, int S, int E){
    if(S==E){
        tree[node].push_back(arr[S]);
        return;
    }
    int mid = (S+E)/2;
    init(node*2, S, mid);
    init(node*2+1, mid+1, E);
    tree[node] = merge(tree[node*2], tree[node*2+1]);
}

4.9 머지 소트 트리
```

```

init(node*2+1, mid+1, E);
vector<int> &c = tree[node], &l = tree[node*2], &r =
tree[node*2+1];
c.resize(l.size()+r.size());
for(int j=0, p=0, q=0; j<c.size(); j++){
    if(q==r.size() || (p<l.size() && l[p]<r[q])) c[j] =
l[p++];
    else c[j] = r[q++];
}
}

// [L, R] 구간에서 k보다 큰 원소의 개수 반환
int query(int L, int R, int k, int node, int S, int E){
    if(R<S || E<L) return 0;
    if(L==S && E==R) return
tree[node].end()-upper_bound(tree[node].begin(),
tree[node].end(), k);
    int mid = (S+E)/2;
    return query(L, R, k, node*2, S, mid)+query(L, R, k,
node*2+1, mid+1, E);
}

```

#### 4.10 단조 큐(Monotone Queue)

Usage: 수열을 순회하면서 구간에 대해 최솟값을 찾는다.  
Time Complexity:  $O(N)$

```

from collections import deque
import sys
input = sys.stdin.readline
N, L = map(int, input().split())
a = [*map(int, input().split())]
chain = deque()
ans = [0]*N
for r in range(N):
    while chain and a[chain[-1]]>a[r]: chain.pop()
    chain.append(r)
    if r>=L and chain[0]==r-L: chain.popleft()
    ans[r] = a[chain[0]]
print(*ans)

```

#### 4.11 Convex Hull Trick (Stack, LineContainer)

```

struct Line{ // call init() before use
    ll a, b, c; // y = ax + b, c = line index
    Line(ll a, ll b, ll c) : a(a), b(b), c(c) {}
    ll f(ll x){ return a * x + b; }
};

vector<Line> v; int pv;
void init(){ v.clear(); pv = 0; }
int chk(const Line &a, const Line &b, const Line &c) const {
    return (_int128_t)(a.b - b.b) * (b.a - c.a) <=
(_int128_t)(c.b - b.b) * (b.a - a.a);
}
void insert(Line l){
    if(v.size() > pv && v.back().a == l.a){ // fix if min query
        if(l.b < v.back().b) l = v.back(); v.pop_back();
    }
    while(v.size() >= pv+2 && chk(v[v.size()-2], v.back(), l))
v.pop_back();
    v.push_back(l);
}

```

```

p query(ll x){ // if min query, then v[pv].f(x) >= v[pv+1].f(x)
    while(pv+1 < v.size() && v[pv].f(x) <= v[pv+1].f(x)) pv++;
    return {v[pv].f(x), v[pv].c};
}
//// line container start (max query) /////
struct Line {
    mutable ll k, m, p;
    bool operator<(const Line& o) const { return k < o.k; }
    bool operator<(ll x) const { return p < x; }
}; // (for doubles, use inf = 1/.0, div(a,b) = a/b)
struct LineContainer : multiset<Line, less<> {
    static const ll inf = LLONG_MAX; // div: floor
    ll div(ll a, ll b) { return a / b - ((a ^ b) < 0 && a % b); }
    bool isect(iterator x, iterator y) {
        if(y == end()) return x->p = inf, 0;
        if(x->k == y->k) x->p = x->m > y->m ? inf : -inf;
        else x->p = div(y->m - x->m, x->k - y->k);
        return x->p >= y->p;
    }
    void add(ll k, ll m) {
        auto z = insert({k, m, 0}), y = z++, x = y;
        while (isect(y, z)) z = erase(z);
        if (x != begin() && isect(--x, y)) isect(x, y = erase(y));
        while ((y = x) != begin() && (--x)->p >= y->p) isect(x,
erase(y));
    }
    ll query(ll x) { assert(!empty());
        auto l = *lower_bound(x); return l.k * x + l.m; }
};


```

#### 5 DP

##### 5.1 $O(N \log N)$ LIS

```

# 길이만 구하기
from bisect import bisect_left
N = int(input())
A = [*map(int, input().split())]
L = []
for num in A:
    i = bisect_left(L, num)
    if i < len(L): L[i] = num
    else: L.append(num)
print(len(L))

```

```

# 수열 구하기
N = int(input())
A = [*map(int, input().split())]
lis = []
idx = 0
index = [0]*N
for i in range(N):
    k = bisect_left(lis, A[i])
    if k < idx:
        lis[k] = A[i]
        index[i] = k
    else:
        lis.append(A[i])
        index[i] = idx
        idx += 1
print(idx) # 길이
ans = [0]*idx

```

```

idx -= 1
for i in range(N-1, -1, -1):
    if idx == index[i]:
        ans[idx] = A[i]
        idx -= 1
print(*ans) # 수열


```

#### 5.2 Berlekamp-Massey, 키타마사법

Time Complexity: Berlekamp-Massey:  $O(NK + \log mod)$   
키타마사법:  $O(K^2 \log N)$

mod = 1\_000\_000\_007

# x에 3x(가장 짧은 접두식 길이) 이상의 항을 넣어줘야 함. 모듈러는 소수여야 함.

```

def berlekamp_massey(x):
    ls=[]; cur=[]
    lf=ld=0
    for i in range(len(x)):
        t=0
        for j in range(len(cur)): t=(t+x[i-j-1]*cur[j])%mod
        if(t-x[i])%mod==0: continue
        if len(cur)==0:
            cur.append(0)
            lf=i
            ld=(t-x[i])%mod
            continue
        k=-(x[i]-t)*pow(ld,mod-2,mod)%mod
        c=[k]
        for j in ls: c.append(-j*k%mod)
        if len(c)<len(cur):c+=[0]*(len(cur)-len(c))
        for j in range(len(cur)): c[j]=(c[j]+cur[j])%mod
        if i-lf+1>=len(cur): ls,lf,ld=cur,i,(t-x[i])%mod
        cur=c
    for i in cur: i=(i%mod+mod)%mod
    return cur

# n번째 항을 반환 (키타마사법)
# rec: 접두식, dp: 초기항
def get_nth(rec, dp, n):
    m=len(rec)
    s=[0]*m; t=[0]*m
    s[0]=1
    if m!=1: t[1]=1
    else: t[0]=rec[0]
    def mul(v, w):
        m=len(v)
        t=[0]*(2*m)
        for j in range(m):
            for k in range(m):
                t[j+k]+=v[j]*w[k]%mod
                if t[j+k]>=mod: t[j+k]-=mod
        for j in range(2*m-1,m-1,-1):
            for k in range(1,m+1):
                t[j-k]+=t[j]*rec[k-1]%mod
                if t[j-k]>=mod: t[j-k]-=mod
        return t[:m]
    while n:

```

```

if n&1:s=mul(s,t)
t=mul(t,t)
n>>=1
ret=0
for i in range(m): ret+=s[i]*dp[i]%mod
return ret%mod

```

# 수열 x의 n번째 항을 반환

```

def guess_nth_term(x, n):
    if n<len(x): return x[n]
    v=berlekamp_massey(x)
    if len(v)==0: return 0
    return get_nth(v, x, n)

```

### 5.3 SOS(Sum Over Subsets) DP

Time Complexity:  $O(2^N \times N)$

```

// a[p][k]: p의 부분 마스크 중 k번째 비트의 왼쪽 비트들이 p와
일치하는 것들의 집합의 원소들의 합
void sos(int n){
    for(int i = 0; i < 1 << n; i++){
        for(int j = 1; j <= n; j++){
            a[i][j] = a[i][j - 1];
            if(i & 1 << j - 1)a[i][j] += a[i - (1 << j - 1)][j - 1];
        }
    }
} // a[p][n]에 p의 부분집합의 합이 저장된다.

```

### 5.4 $O(N \times \max W)$ Subset Sum (Fast Knapsack)

```

// O(N*\maxW), maximize sumW <= t
int Knapsack(vector<int> w, int t){
    int a = 0, b = 0, x;
    while(b < w.size() && a + w[b] <= t) a += w[b++];
    if(b == w.size()) return a;
    int m = *max_element(w.begin(), w.end());
    vector<int> u, v(2*m, -1); v[a+m-t] = b;
    for(int i=b; (u=v,i<w.size()); i++) {
        for(x=0; x<m; x++) v[x+w[i]] = max(v[x+w[i]], u[x]);
        for(x=2*m; --x>m; ) for(int j=max(0,u[x]); j<v[x]; j++)
            v[x-w[j]] = max(v[x-w[j]], j);
    } for(a=t; v[a+m-t]<0; a--);; return a;
}

```

### 5.5 DP Optimization, Knuth Optimization

```

// Quadrangle Inequality : C(a, c)+C(b, d) ≤ C(a, d)+C(b, c)
// Monotonicity : C(b, c) ≤ C(a, d)
// CHT, DnC Opt(Quadrangle), Knuth(Quadrangle and Monotonicity)
// Knuth: K[i][j-1] <= K[i][j] <= K[i+1][j]
// 1. Calculate D[i][i], K[i][i]
// 2. Calculate D[i][j], K[i][j] (i < j)
// Another: D[i][j] = min(D[i-1][k] + C[k+1][j]), C quadrangle
// i=1..k j=n..1 k=K[i-1,j]..K[i,j+1] update,
vnoi/icpc22_mn_c

```

// 2015 ICPC 예선 F번 파일 합치기 O(N^2)

```

int T, N;int A[503], S[503];
int D[503][503], K[503][503];
int main(){
    for (scanf("%d", &T);T--){}

```

```

        scanf("%d", &N);
        for (int i=1;i<=N;i++) scanf("%d", A+i), S[i] = S[i-1]
+ A[i];
        for (int i=1;i<=N;i++) D[i-1][i] = 0, K[i-1][i] = i;
        for (int d=2;d<=N;d++){
            // d = j-i
            for (int i=0;i+d<=N;i++){
                int j = i+d;
                D[i][j] = 2e9;
                for (int k=K[i][j-1];k<=K[i+1][j];k++){
                    int v = D[i][k] + D[k][j] + S[j] - S[i];
                    if (D[i][j] > v)
                        D[i][j] = v, K[i][j] = k;
                }
            }
            printf("%d\n", D[0][N]);
        }
    }
}

```

### 5.6 Monotone Queue Optimization

```

template<class T, bool GET_MAX = false> // D[i] = func_{0 <= j
< i} D[j] + cost(j, i)
pair<vector<T>, vector<int>> monotone_queue_dp(int n, const
vector<T> &init, auto cost){
    assert((int)init.size() == n + 1); // cost function -> auto,
do not use std::function
    vector<T> dp = init; vector<int> prv(n+1);
    auto compare = [] (T a, T b){ return GET_MAX ? a < b : a > b;
};
    auto cross = [&](int i, int j){
        int l = j, r = n + 1;
        while(l < r){
            int m = (l + r + 1) / 2;
            if(compare(dp[i] + cost(i, m), dp[j] + cost(j, m))) r = m
- 1; else l = m;
        } return l;
    };
    deque<int> q{0};
    for(int i=1; i<=n; i++){
        while(q.size() > 1 && compare(dp[q[0]] + cost(q[0], i),
dp[q[1]] + cost(q[1], i))) q.pop_front();
        dp[i] = dp[q[0]] + cost(q[0], i); prv[i] = q[0];
        while(q.size() > 1 && cross(q[q.size()-2], q.back()) >=
cross(q.back(), i)) q.pop_back();
        q.push_back(i);
    } /*for end*/ return {dp, prv};
}

```

### 5.7 Slope Trick

```

//NOTE: f(x)=min{f(x+i), i<a}+|x-k|+m -> pf(k)sf(k)ab(-a,m)
//NOTE: sf_inc에 담구하는게 들어있어서, 반드시 한 연산에 대해
pf_dec->sf_inc순서로 호출
struct LeftHull{
    void pf_dec(int x){ pq.emp1(x-bias); } //x이하의 기울기들 -1
    int sf_inc(int x){ //x이상의 기울기들 +1, pop된 원소 반환(Right
Hull 관리에 사용됨)
        if(pq.empty() or argmin()<=x) return x; ans +=
argmin()-x; //이 경우 최솟값이 증가함
        pq.emp1(x-bias); /*x 이하 -1*/ int r=argmin(); pq.pop(); /*전체
+1*/
        return r;
    }
}

```

```

}
void add_bias(int x,int y){ bias+=x; ans+=y; } int minval(){
return ans; } //x축 평행이동, 최소값
int argmin(){return pq.empty()?-inf<int>:pq.top()+bias;}///
최소값 x좌표
void operator+=(LeftHull &a){ ans+=a.ans; while(sz(a.pq))
    pf_dec(a.argmin()), a.pq.pop(); }
    int size()const{return sz(pq);} PQMax<int> pq; int ans=0,
bias=0;
};

//NOTE: f(x)=min{f(x+i), a<i<b}+|x-k|+m -> pf(k)sf(k)ab(-a,b,m)
struct SlopeTrick{
    void pf_dec(int x){l(pf_dec(-r.sf_inc(-x));}
    void sf_inc(int x){r(pf_dec(-l.sf_inc(x));}
    void add_bias(int lx,int rx,int
y){l.add_bias(lx,0),r.add_bias(rx,0),ans+=y; }
    int minval(){return ans+l.minval()+r.minval();}
    int argmin(){return {l.argmin(),-r.argmin();}}
    void operator+=(SlopeTrick& a){
        while(sz(a.l.pq)) pf_dec(a.l.argmin()),a.l.pq.pop();
        l.ans+=a.l.ans;
        while(sz(a.r.pq)) sf_inc(-a.r.argmin()),a.r.pq.pop();
        r.ans+=a.r.ans; ans+=a.ans;
    }
    LeftHull l,r; int ans=0;
    int size()const{return l.size()+r.size(); }
};

//LeftHull 역추적 방법: 스텝i의 argmin값을 am(i)라고 하자. 스텝n
부터 스텝1까지 ans[i]=min(ans[i+1],am(i))하면 된다. 아래는 증명..은
아니고 간략한 이유
//am(i)<=ans[i+1]일때: ans[i]=am(i)
//x[i]>ans[i+1]일때: ans[i]=ans[i+1] 왜냐하면 f(i,a)는 a<x[i]에서
감소함수이므로 가능한 최대로 오른쪽으로 붙은 ans[i+1]이 최적.
//스텝i에서 add_bias(k,0)한다면 간격제한k가 있는것이므로
ans[i]=min(ans[i+1]-k,x[i])으로 수정.
//LR Hull 역추적은 케이스나눠서 위 방법을 확장하면 될듯

```

### 5.8 Aliens Trick

```

// pair<T, vector<int>> f(T c): return opt_val, prv
// cost function must be multiplied by 2
template<class T, bool GET_MAX = false>
pair<T, vector<int>> AliensTrick(int n,int k,auto f,T lo,T hi){
    T l = lo, r = hi; while(l < r) {
        T m = (l + r + (GET_MAX?1:0)) >> 1;
        vector<int> prv = f(m*2+(GET_MAX?-1:+1)).second;
        int cnt = 0; for(int i=n; i; i=prv[i]) cnt++;
        if(cnt <= k) (GET_MAX?l:r) = m;
        else (GET_MAX?r:l) = m + (GET_MAX?-1:+1);
    }
    T opt_value = f(l*2).first / 2 - k*l;
    vector<int> prv1 = f(l*2+(GET_MAX?1:-1)).second, p1{n};
    vector<int> prv2 = f(l*2-(GET_MAX?1:-1)).second, p2{n};
    for(int i=n; i; i=prv1[i]) p1.push_back(prv1[i]);
    for(int i=n; i; i=prv2[i]) p2.push_back(prv2[i]);
    reverse(p1.begin(),p1.end()); reverse(p2.begin(),p2.end());
    assert(p2.size() <= k+1 && k+1 <=p1.size());
    if(p1.size() == k+1) return {opt_value, p1};
    if(p2.size() == k+1) return {opt_value, p2};
    for(int i=1, j=1; i<p1.size(); i++){

```

```

while(j < p2.size() && p2[j] < p1[i-1]) j++;
if(p1[i] <= p2[j] && i - j == k+1 - (int)p2.size()){
    vector<int> res;
    res.insert(res.end(), p1.begin(), p1.begin()+i);
    res.insert(res.end(), p2.begin()+j, p2.end());
    return {opt_value, res};
}
} /* if */ } /* for */ assert(false);
}

```

## 6 그래프

### 6.1 최단 거리 - Floyd Warshall

Time Complexity:  $O(V^3)$

```

int N, G[111][111];
void Init(){ // 시작 전에 초기화 해야 함
    memset(G, 0x3f, sizeof G);
    for(int i=1; i<=N; i++) G[i][i] = 0;
}
// s에서 e로 가는 가중치 w 간선 추가
void AddEdge(int s, int e, int w){
    G[s][e] = min(G[s][e], w);
}
void Run(){
    for(int k=1; k<=N; k++)
        for(int i=1; i<=N; i++)
            for(int j=1; j<=N; j++)
                G[i][j] = min(G[i][j], G[i][k] + G[k][j]);
}

```

### 6.2 최단 거리 - Dijkstra

Time Complexity:  $O(E \log E)$

```

ll D[505050], P[505050];
vector<pair<ll,ll>> G[505050]; // {정점, 가중치}
// 주의: 가중치 >= 0, 음수 있으면 bellman ford 사용

// s -> t 최단 경로 출력
void Dijkstra(int s, int t){
    memset(D, 0x3f, sizeof D);
    priority_queue<pair<ll,ll>, vector<pair<ll,ll>>, greater<>> Q;
    Q.emplace(D[s]=0, s);
    while(!Q.empty()){
        auto [c,v] = Q.top(); Q.pop();
        if(c == D[v]) for(auto [i,w] : G[v]) if(D[i] > c + w)
            Q.emplace(D[i]=c+w, i), P[i] = v;
    }
    vector<int> path;
    for(int i=t; i!=s; i=P[i]) path.push_back(i);
    reverse(path.begin(), path.end());
    for(auto i : path) cout << i << " ";
}

```

### 6.3 최단 거리 - Bellman Ford

Time Complexity:  $O(VE)$

```

int N, M; ll D[555]; // 주의: 웬만하면 long long으로 잡는 게 좋음
vector<tuple<int,int,ll>> E; // {from, to, weight}
void AddEdge(int s, int e, int w){
}

```

```

E.emplace_back(s, e, w);
}
// s에서 도달 가능한 음수 사이클 있으면 false 반환
bool Run(int s){
    memset(D, 0x3f, sizeof D);
    ll INF = D[0];
    D[s] = 0;
    for(int iter=1; iter<=N; iter++){
        bool changed = false;
        for(auto [u,v,w] : E){
            if(D[u] == INF) continue;
            if(D[v] > D[u] + w) D[v] = D[u] + w, changed = true;
        }
        if(iter == N && changed) return false;
    }
    return true;
}

```

### 6.4 유니온 파인드 + 최소 신장 트리(Kruskal)

Time Complexity: UF: 연산마다  $O(\log N)$ , MST:  $O(E \log E)$

```

int N, M, P[10101];
int Find(int v){ return v == P[v] ? v : P[v] = Find(P[v]); }
bool Merge(int u, int v){
    u = Find(u); v = Find(v);
    if(u == v) return false;
    P[u] = v; return true;
}
int main(){
    cin >> N >> M;
    vector<tuple<int,int,int>> E; // {weight, from, to}
    for(int i=1,u,v,w; i<=M; i++){
        cin >> u >> v >> w;
        E.emplace_back(w, u, v);
    }
    sort(E.begin(), E.end());
    for(int i=1; i<=N; i++) P[i] = i;
    long long res = 0;
    for(auto [w,u,v] : E) if(Merge(u, v)) res += w;
    cout << res;
}

def find(n):
    if uf[n] < 0: return n
    uf[n] = find(uf[n])
    return uf[n]

def union(a, b):
    a = find(a)
    b = find(b)
    if a == b: return
    if uf[a] > uf[b]: a,b = b,a # smaller to larger
    uf[a] += uf[b]
    uf[b] = a

uf = [-1]*n

```

### 6.5 SCC - Kosaraju

Time Complexity:  $O(V + E)$

```

int N, M, C[10101]; // C[i] = i번 정점이 속한 SCC 번호
vector<int> G[10101], R[10101], V;
vector<vector<int>> S; // 각 SCC에 속한 정점 목록
void AddEdge(int s, int e){
    G[s].push_back(e);
    R[e].push_back(s);
}
void DFS1(int v){
    C[v] = -1;
    for(auto i : G[v]) if(!C[i]) DFS1(i);
    V.push_back(v);
}
void DFS2(int v, int c){
    C[v] = c; S.back().push_back(v);
    for(auto i : R[v]) if(C[i] == -1) DFS2(i, c);
}
int GetSCC(){ // SCC 개수 반환
    for(int i=1; i<=N; i++) if(!C[i]) DFS1(i);
    reverse(V.begin(), V.end());
    int cnt = 0;
    for(auto i : V) if(C[i] == -1) S.emplace_back(), DFS2(i, cnt++);
    return cnt;
} // 각 SCC는 위상 정렬 순서대로 번호 매겨져 있음

6.6 BCC - Tarjan
Time Complexity:  $O(V + E)$ 

// 1-based, 다른 거 호출하기 전에 tarjan 먼저 호출해야 함
vector<int> G[MAX_V]; int In[MAX_V], Low[MAX_V], P[MAX_V];
void addEdge(int s, int e){ G[s].push_back(e);
G[e].push_back(s); }
void tarjan(int n){ // Pre-Process
    int pv = 0;
    function<void(int,int)> dfs = [&pv,&dfs](int v, int b){
        In[v] = Low[v] = ++pv; P[v] = b;
        for(auto i : G[v]){
            if(i == b) continue;
            if(!In[i]) dfs(i, v), Low[v] = min(Low[v], Low[i]); else
Low[v] = min(Low[v], In[i]);
        }
    };
    for(int i=1; i<=n; i++) if(!In[i]) dfs(i, -1);
}
vector<int> cutVertex(int n){
    vector<int> res; array<char,MAX_V> isCut; isCut.fill(0);
    function<void(int)> dfs = [&dfs,&isCut](int v){
        int ch = 0;
        for(auto i : G[v]){
            if(P[i] != v) continue; dfs(i); ch++;
            if(P[v] == -1 && ch > 1) isCut[v] = 1; else if(P[v] != -1 && Low[i] >= In[v]) isCut[v] = 1;
        }
    };
    for(int i=1; i<=n; i++) if(P[i] == -1) dfs(i);
    for(int i=1; i<=n; i++) if(isCut[i]) res.push_back(i);
    return move(res);
}
vector<PII> cutEdge(int n){

```

```

vector<PII> res;
function<void(int)> dfs = [&dfs,&res](int v){
    for(int t=0; t<G[v].size(); t++){
        int i = G[v][t]; if(t != 0 && G[v][t-1] == G[v][t]) continue;
        if(P[i] != v) continue; dfs(i);
        if((t+1 == G[v].size() || i != G[v][t+1]) && Low[i] > In[v]) res.emplace_back(min(v,i), max(v,i));
    }
}
for(int i=1; i<=n; i++) sort(G[i].begin(), G[i].end()); // multi edge -> sort
for(int i=1; i<=n; i++) if(P[i] == -1) dfs(i);
return move(res); // sort(all(res));
}

vector<int> BCC[MAX_V]; // BCC[v] = components which contains v
void vertexDisjointBCC(int n){ // allow multi edge, not allow self loop
    int cnt = 0; array<char,MAX_V> vis; vis.fill(0);
    function<void(int,int)> dfs = [&dfs,&vis,&cnt](int v, int c){
        vis[v] = 1; if(c > 0) BCC[v].push_back(c);
        for(auto i : G[v]){
            if(vis[i]) continue;
            if(In[v] <= Low[i]) BCC[v].push_back(++cnt), dfs(i, cnt);
        }
    };
    for(int i=1; i<=n; i++) if(!vis[i]) dfs(i, 0);
    for(int i=1; i<=n; i++) if(BCC[i].empty())
        BCC[i].push_back(++cnt);
    }
}

```

## 6.7 최대 유량 - Dinic

Time Complexity:  $O(V^2E)$ , 모든 간선의 용량이 1이면  $O(\min(V^{2/3}, E^{1/2})E)$

```

// Directed Graph이면 add_edge(s, e, c)
// Undirected Graph이면 add_edge(s, e, c, c)
template<typename flow_t, flow_t MAX_U=(1<<30)>
struct Dinic{ // 0-based
    struct edge_t{ int v, r; flow_t c, f; };
    int n;
    vector<vector<edge_t>> g;
    vector<int> lv, idx;
    Dinic(int n) : n(n) { clear(); }
    void clear(){
        g = vector<vector<edge_t>>(n);
        lv = vector<int>(n, 0);
        idx = vector<int>(n, 0);
    }
    void add_edge(int s, int e, flow_t c1, flow_t c2=flow_t(0)){
        g[s].push_back({e, (int)g[e].size(), c1, 0});
        g[e].push_back({s, (int)g[s].size()-1, c2, 0});
    }
    bool bfs(int s, int t, flow_t limit=1){
        fill(lv.begin(), lv.end(), 0);
        queue<int> que; que.push(s); lv[s] = 1;
        while(!que.empty()){
            int v = que.front(); que.pop();
            for(const auto &e : g[v]) if(!lv[e.v] && e.c - e.f >= limit) que.push(e.v), lv[e.v] = lv[v] + 1;
        }
    }
}

```

```

    }
    return lv[t] != 0;
}
flow_t dfs(int v, int t, flow_t fl=MAX_U){
    if(v == t || fl == flow_t(0)) return fl;
    for(int &i=idx[v]; i<g[v].size(); i++){
        auto &e = g[v][i];
        if(lv[e.v] != lv[v] + 1 || e.c - e.f == flow_t(0))
            continue;
        flow_t now = dfs(e.v, t, min(fl, e.c - e.f));
        if(now == flow_t(0)) continue;
        e.f += now; g[e.v][e.r].f -= now;
        return now;
    }
    return 0;
}
flow_t maximum_flow(int s, int t){
    flow_t flow = 0, augment = 0;
    while(bfs(s, t)){
        fill(idx.begin(), idx.end(), 0);
        while((augment=dfs(s, t)) != flow_t(0)) flow += augment;
    }
    return flow;
}
// {최소 컷 비용, s와 같은 집합, t와 같은 집합, 절단 간선}
tuple<flow_t, vector<int>, vector<int>, vector<pair<int,int>>> minimum_cut(int s, int t){
    flow_t flow = maximum_flow(s, t);
    vector<int> a, b;
    vector<pair<int,int>> edges;
    bfs(s, t, 1);
    for(int i=0; i<n; i++) (lv[i] ? a : b).push_back(i);
    for(auto i : a) for(auto e : g[i]) if(e.c != flow_t(0) && !lv[e.v]) edges.emplace_back(i, e.v);
    return {flow, a, b, edges};
}
}

```

## 6.8 MCMF

```

// 유량을 k 만큼 흘리는 경우: run(src, snk, k)
// 유량을 최대한 많이 흘리는 경우: run(src, snk)
template<typename flow_t=int, typename cost_t=long long, flow_t MAX_U=(1<<30), cost_t MAX_C=(1LL<<60)>
struct MinCostFlow{ // 0-based
    struct edge_t{ int v, r; flow_t c; cost_t d; };
    int n;
    vector<vector<edge_t>> g;
    vector<int> prv, idx, chk;
    vector<cost_t> dst;
    MinCostFlow(int n) : n(n) { clear(); }
    void clear(){
        g = vector<vector<edge_t>>(n);
        prv = idx = chk = vector<int>(n);
        dst = vector<cost_t>(n);
    }
    void add_edge(int s, int e, flow_t c, cost_t d){
        g[s].push_back({e, (int)g[e].size(), c, d});
        g[e].push_back({s, (int)g[s].size()-1, 0, -d});
    }
    bool find_path(int s, int t){

```

```

fill(chk.begin(), chk.end(), 0);
fill(dst.begin(), dst.end(), MAX_C);
queue<int> que; que.push(s); dst[s] = 0; chk[s] = 1;
while(!que.empty()){
    int v = que.front(); que.pop(); chk[v] = 0;
    for(int i=0; i<g[v].size(); i++){
        const auto &e = g[v][i];
        if(e.c > 0 && dst[e.v] > dst[v] + e.d){
            dst[e.v] = dst[v] + e.d; prv[e.v] = v;
            idx[e.v] = i;
            if(!chk[e.v]) que.push(e.v), chk[e.v] = 1;
        }
    }
}
return dst[t] < MAX_C;
}
pair<flow_t, cost_t> augment(int s, int t, flow_t k=-1){
    if(!find_path(s, t)) return {0, 0};
    flow_t fl = MAX_U;
    for(int i=t; i!=s; i=prv[i]) fl = min(fl, g[prv[i]][idx[i]].c);
    if(k != -1) fl = min(fl, k);
    for(int i=t; i!=s; i=prv[i]){
        g[prv[i]][idx[i]].c -= fl;
        g[i][g[prv[i]][idx[i]].r].c += fl;
    }
    return {fl, fl * dst[t]};
}
pair<flow_t, cost_t> run(int s, int t, flow_t k=-1){
    flow_t flow = 0; cost_t cost = 0;
    while(true){
        auto [fl,cst] = augment(s, t, k);
        if(fl == 0) break;
        flow += fl; cost += cst;
        if(k != -1) k -= fl;
    }
    return {flow, cost};
}
}

```

## 6.9 이분 매칭

Time Complexity:  $O(VE)$

```

def dfs(a):
    visited[a]=True
    for b in adj[a]:
        if B[b]==-1: B[b]=a; return True
    for b in adj[a]:
        if not(visited[B[b]]) and dfs(B[b]): B[b]=a; return True
    return False

match=0
B=[-1]*M
for i in range(N):
    visited=[0]*N
    if dfs(i): match+=1
print(match)

```

## 6.10 이분 매칭 - Hopcroft Karp

Time Complexity:  $O(E\sqrt{V})$

```
// n: 왼쪽 정점 개수, m: 오른쪽 정점 개수, 0-based
struct HopcroftKarp{
    int n, m;
    vector<vector<int>> g;
    vector<int> dst, le, ri;
    vector<char> visit, track;
    HopcroftKarp(int n, int m) : n(n), m(m) { clear(); }
    void clear(){
        g = vector<vector<int>>(n); dst = vector<int>(n, 0);
        le = vector<int>(n, -1); ri = vector<int>(m, -1);
        visit = vector<char>(n, 0); track = vector<char>(n+m, 0);
    }
    void add_edge(int s, int e){ g[s].push_back(e); }
    bool bfs(){
        bool res = false;
        queue<int> que;
        fill(dst.begin(), dst.end(), 0);
        for(int i=0; i<n; i++) if(le[i] == -1) que.push(i), dst[i] = 1;
        while(!que.empty()){
            int v = que.front(); que.pop();
            for(auto i : g[v]){
                if(ri[i] == -1) res = true;
                else if(!dst[ri[i]]) dst[ri[i]] = dst[v] + 1,
                que.push(ri[i]);
            }
        }
        return res;
    }
    bool dfs(int v){
        if(visit[v]) return false;
        visit[v] = 1;
        for(auto i : g[v]){
            if(ri[i] == -1 || !visit[ri[i]] && dst[ri[i]] == dst[v] + 1 && dfs(ri[i])){
                le[v] = i; ri[i] = v; return true;
            }
        }
        return false;
    }
    int maximum_matching(){
        int res = 0;
        fill(le.begin(), le.end(), -1);
        fill(ri.begin(), ri.end(), -1);
        while(bfs()){
            fill(visit.begin(), visit.end(), 0);
            for(int i=0; i<n; i++) if(le[i] == -1) res += dfs(i);
        }
        return res;
    }
    vector<pair<int,int>> maximum_matching_edges(){
        int matching = maximum_matching();
        vector<pair<int,int>> edges; edges.reserve(matching);
        for(int i=0; i<n; i++) if(le[i] != -1)
            edges.emplace_back(i, le[i]);
        return edges;
    }
}
```

```
void dfs_track(int v){
    if(track[v]) return; track[v] = 1;
    for(auto i : g[v]) track[n+i] = 1, dfs_track(ri[i]);
}
tuple<vector<int>, vector<int>, int> minimum_vertex_cover(){
    int matching = maximum_matching();
    fill(track.begin(), track.end(), 0);
    for(int i=0; i<n; i++) if(le[i] == -1) dfs_track(i);
    vector<int> lv, rv;
    for(int i=0; i<n; i++) if(!track[i]) lv.push_back(i);
    for(int i=0; i<m; i++) if(track[n+i]) rv.push_back(i);
    assert(lv.size() + rv.size() == matching);
    return {lv, rv, lv.size() + rv.size()};
}
}
```

## 6.11 플로우 관련 정리

- 베티스 커버(vertex cover)의 여집합은 독립 집합(independent set)이다. 따라서 최소 베티스 커버(minimum vertex cover)의 여집합은 최대 독립 집합(maximum independent set)이다.
- DAG에서 최소 경로 커버(minimum path cover)의 크기는  $N - (\text{maximum matching})$ 이다.
- 켜닉의 정리: 모든 bipartite graph에서 maximum matching의 크기와 minimum vertex cover의 크기는 동일하다.
- 이분 그래프의 maximum independent set의 크기 =  $V$ (전체 정점) - Max Matching
- 이분 그래프에서 최소 베티스 커버는 최소 베티스 커버와 같다.
- 딜워스의 정리: Poset(부분 순서 집합)에서 Maximum Anti Chain의 크기와 Minimum Path Cover의 크기는 같다.

## 6.12 안정 결혼 문제

Usage: 안정적인 매칭은 다음 조건을 만족한다.

각 집합의 원소는 상대 집합의 원소들에 대한 서로 다른 선호도를 가진다. 첫 번째 집합과 두 번째 집합의 원소가 일대일로 매칭되어 있다. 첫 번째 집합에 속한 원소 A, B가 두 번째 집합에 속한 원소 C, D와 각각 매칭되어 있을 때 A가 C보다 D를 선호하면서 D가 B보다 A를 선호하는 경우는 존재하지 않는다.

Time Complexity:  $O(V^2)$

```
# a[i][j]: 첫 번째 그룹의 i번 원소가 두 번째 그룹의 a[i][j]번 원소를 j번째로 선호함
# b[i][j]: 두 번째 그룹의 i번 원소가 첫 번째 그룹의 j번 원소를 b[i][j]번째로 선호함
cnt = [-1]*N
A = [-1]*N
B = [-1]*N
for _ in range(N):
    for i in range(N):
        if A[i] >= 0: continue # 첫 번째 그룹의 i번 원소가 매칭된 경우
        while 1:
            cnt[i] += 1
            w = a[i][cnt[i]] # i번 원소가 다음으로 매칭을 시도할 두 번째 그룹의 원소
            if B[w] < 0: # w번 원소가 아직 매칭되지 않은 경우
                A[i] = w; B[w] = i; break
            if b[w][i] < b[w][B[w]]: # w번 원소가 현재 매칭된 원소보다 i번 원소를 더 선호하는 경우
                A[i] = w; A[B[w]] = -1; B[w] = i; break
for i in A: print(i+1)
```

## 6.13 최소 공통 조상(LCA)

Time Complexity: 전처리  $O(N \log N)$ , 쿼리  $O(\log N)$

```
int N, Q, D[101010], P[22][101010];
vector<int> G[101010];
void Connect(int u, int v){
    G[u].push_back(v); G[v].push_back(u);
}
void DFS(int v, int b=-1){
    for(auto i : G[v]) if(i != b) D[i] = D[v] + 1, P[0][i] = v,
    DFS(i, v);
}
int LCA(int u, int v){
    if(D[u] < D[v]) swap(u, v);
    int diff = D[u] - D[v];
    for(int i=0; diff; i++, diff>>=1) if(diff & 1) u = P[i][u];
    if(u == v) return u;
    for(int i=21; i>=0; i--) if(P[i][u] != P[i][v]) u =
    P[i][u], v = P[i][v];
    return P[0][u];
}
////
// 1. Connect로 간선 추가
// 2. DFS(1) 호출
// 3. 아래 코드 실행
for(int i=1; i<22; i++) for(int j=1; j<=N; j++) P[i][j] =
P[i-1][P[i-1][j]];
// 4. LCA(u, v)로 최소 공통 조상 구할 수 있음
```

## 6.14 Heavy Light Decomposition

Time Complexity: 전처리  $O(N)$ , 쿼리  $O(T(N) \log N)$

```
int N, Q, A[SZ], Top[SZ], Par[SZ], Dep[SZ], Sz[SZ], In[SZ];
vector<int> Inp[SZ], G[SZ];
void Connect(int u, int v){
    Inp[u].push_back(v); Inp[v].push_back(u);
}
void DFS0(int v, int b=-1){
    for(auto i : Inp[v]) if(i != b)
        Dep[i] = Dep[v] + 1, Par[i] = v, G[v].push_back(i),
    DFS0(i, v);
}
void DFS1(int v){
    Sz[v] = 1;
    for(auto &i : G[v]){
        DFS1(i); Sz[v] += Sz[i];
        if(Sz[i] > Sz[G[v][0]]) swap(i, G[v][0]);
    }
}
void DFS2(int v){
    static int pv = 0; In[v] = ++pv;
    for(auto i : G[v]) Top[i] = i == G[v][0] ? Top[v] : i,
    DFS2(i);
}
```

```

void VertexUpdate(int x, int v){
    Update(In[x], v);
}

long long PathQuery(int u, int v){
    long long res = 0;
    for(; Top[u] != Top[v]; u=Par[Top[u]]){
        if(Dep[Top[u]] < Dep[Top[v]]) swap(u, v);
        res += Query(In[Top[u]], In[u]);
    }
    if(In[u] > In[v]) swap(u, v);
    res += SegQuery(In[u], In[v]); // 경점 쿼리는 In[u], 간선
    쿼리는 In[u]+1
    return res;
}
/////
// 1. Connect로 간선 추가
// 2. DFS0(1); DFS1(1); DFS2(Top[1]=1); 호출
// 3. VertexUpdate, PathQuery로 연산 수행
// 3-1. Update, Query는 배열의 구간 쿼리를 지원하는 자료구조(ex.
세그먼트 트리) 사용

```

## 6.15 센트로이드 트리

```

struct centroid {
    int N;
    vi tree_size, vis, par;
    vvi _edges, edges;
    centroid(int N) : N(N), tree_size(N), vis(N), _edges(N),
    edges(N), par(N) {}
    void add_edge(int u, int v) { _edges[u].pb(v); }
    int get_size(int cur, int p) {
        tree_size[cur] = 1;
        for (int to: _edges[cur]) if (to != p &&
!vis[to])tree_size[cur] += get_size(to, cur);
        return tree_size[cur];
    }
    int get_centroid(int cur, int p, int cap) {
        for (int to: _edges[cur]) if (to != p && !vis[to] &&
tree_size[to] * 2 > cap) return get_centroid(to, cur, cap);
        return cur;
    }
    int build_tree(int cur, int p = -1) {
        cur = get_centroid(cur, -1, get_size(cur, -1));
        par[cur] = p, vis[cur] = 1;
        for (int to: _edges[cur]) if (!vis[to]) to =
build_tree(to, cur), edges[cur].pb(to), edges[to].pb(cur);
        return cur;
    }
};

```

## 7 수학

### 7.1 바닥함수, 천장함수

$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ , n은 정수, m은 양의 정수  
 $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = -\left\lfloor \frac{-n}{m} \right\rfloor$ ;  $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil = -\left\lceil \frac{-n}{m} \right\rceil$

### 7.2 빠른 거듭제곱

Usage:  $a^b \pmod{c}$ 를 구하는 함수

Time Complexity:  $O(\log b)$

```

def power(a, b, mod):
    r = 1
    while b:
        if b&1: r = r*a%mod
        a = a*a%mod
        b >>= 1
    return r

```

### 7.3 Harmonic Lemma

Usage:  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

Time Complexity:  $O(\sqrt{n})$

```

ans = 0; i = 1
while i <= n:
    j = n//(n//i)
    ans += n//i*(j-i+1)
    i = j+1
print(ans)

```

### 7.4 FloorSum

```

// sum of floor((A*i+B)/M) over 0 <= i < N in O(log(N+M+A+B))
// Also, sum of i * floor((A*i+B)/M) and floor((A*i+B)/M)^2
template<class T, class U> // T must be able to hold arg^2
array<U, 3> weighted_floor_sum(T n, T m, T a, T b){
    array<U, 3> res{}; auto[qa,ra]=div(a,m);
    auto[qb,rb]=div(b,m);
    if(T n2 = (ra * n + rb) / m){
        auto prv=weighted_floor_sum<T,U>(n2, ra, m, m-rb-1);
        res[0] += U(n-1)*n2 - prv[0];
        res[1] += (U(n-1)*n*n2 - prv[0] - prv[2]) / 2;
        res[2] += U(n-1)*(n2-1)*n2 - 2*prv[1] + res[0];
    }
    res[2] += U(n-1)*n*(2*n-1)/6 * qa*qa + U(n)*qb*qb;
    res[2] += U(n-1)*n * qa*qb + 2*res[0]*qb + 2*res[1]*qa;
    res[0] += U(n-1)*n/2 * qa + U(n)*qb;
    res[1] += U(n-1)*n*(2*n-1)/6 * qa + U(n-1)*n/2 * qb;
    return res;
}
ll modsum(ull to, ll c, ll k, ll m){
    c = (c % m + m) % m; k = (k % m + m) % m;
    return to*c + k*sumsq(to) - m*divsum(to, c, k, m);
} // sum (ki+c)%m 0 <= i < to, O(log m) large constant

```

### 7.5 Linear Sieve

```

// sp : 최소 소인수, 소수라면 0
// tau : 약수 개수, sigma : 약수 합
// phi : n 이하 자연수 중 n과 서로소인 개수
// phi(n) = n*(p1-1)/p1*...*(pk-1)/pk
// mu : non square free이면 0, 그렇지 않다면 (-1)^(소인수 종류)
// e[i] : 소인수분해에서 i의 지수
vector<int> prime;
int sp[sz], e[sz], phi[sz], mu[sz], tau[sz], sigma[sz];
phi[1] = mu[1] = tau[1] = sigma[1] = 1;
for(int i=2; i<=n; i++){
    if(!sp[i]){
        prime.push_back(i);
        e[i] = 1; phi[i] = i-1; mu[i] = -1; tau[i] = 2; sigma[i] =
i+1;
        for(int j=i*i; j<=n; j+=i)
            if(sp[j]==0) sp[j] = i, e[j] = e[j]+1, phi[j] *= i-1, mu[j] =
-1, tau[j] *= 2, sigma[j] *= i;
    }
}

```

```

}
for(auto j : prime){
    if(i*j >= sz) break;
    sp[i*j] = j;
    if(i % j == 0){
        e[i*j] = e[i]+1; phi[i*j] = phi[i]*j; mu[i*j] = 0;
        tau[i*j] = tau[i]/e[i*j]*(e[i*j]+1);
        sigma[i*j] = sigma[i]*(j-1)/(pw(j, e[i*j])-1)*(pw(j,
e[i*j]+1)-1)/(j-1); // overflow
        break;
    }
    e[i*j] = 1; phi[i*j] = phi[i] * phi[j]; mu[i*j] = mu[i] *
mu[j];
    tau[i*j] = tau[i] * tau[j]; sigma[i*j] = sigma[i] *
sigma[j];
}
}

```

## 7.6 확장 유clidean 알고리즘

Time Complexity:  $O(\log \max(a, b))$

```

// 정수 a, b 주어지면 ax + by = gcd(a, b) = g
// 를 만족하는 정수 {g, x, y} 반환
tuple<ll, ll, ll> ext_gcd(ll a, ll b){
    if(b == 0) return {a, 1, 0};
    auto [g,x,y] = ext_gcd(b, a % b);
    return {g, y, x - a/b * y};
}

```

## 7.7 중국인의 나머지 정리

Time Complexity:  $O(k \log m)$

```

// a = a1 (mod m1), a = a2 (mod m2)를 만족하는 {a, lcm(m1, m2)} 반환
// 만약 a가 존재하면 0 <= a < lcm(m1, m2) 에서 유일하게 존재
// a가 존재하지 않는 경우 {-1, -1} 반환
ll mod(ll a, ll b){ return (a % b) >= 0 ? a : a + b; }
pair<ll, ll> crt(ll a1, ll m1, ll a2, ll m2){
    ll g = gcd(m1, m2), m = m1 / g * m2;
    if((a2 - a1) % g) return {-1, -1};
    ll md = m2/g, s = mod((a2-a1)/g, m2/g);
    ll t = mod(get<1>(ext_gcd(m1/g%md, m2/g)), md);
    return { a1 + s * t % md * m1, m };
}
// a = a_i (mod m_i)를 만족하는 {a, lcm(m_1, ..., m_k)} 반환
// a가 존재하지 않는 경우 {-1, -1} 반환
pair<ll, ll> crt(const vector<ll> &a, const vector<ll> &m){
    ll ra = a[0], rm = m[0];
    for(int i=1; i<m.size(); i++){
        auto [aa,mm] = crt(ra, rm, a[i], m[i]);
        if(mm == -1) return {-1, -1}; else tie(ra, rm) = tie(aa, mm);
    }
    return {ra, rm};
}

```

## 7.8 Miller Rabin + Pollard Rho

```
# n<2^32: alist = [2, 7, 61]
# n<2^64
alist = [2, 325, 9375, 28178, 450775, 9780504, 1795265022]

def miller_rabin(n, a):
    d = (n-1)//2
    while d%2 == 0:
        if pow(a, d, n) == n-1: return 1
        d //= 2
    tmp = pow(a, d, n)
    return tmp == n-1 or tmp == 1

def is_prime(n):
    if n <= 1: return 0
    if n <= 10**10:
        for i in range(2, int(n**0.5)+1):
            if n%i == 0: return 0
        return 1
    for a in alist:
        if not miller_rabin(n, a): return 0
    return 1

from random import randint
from math import gcd

def PollardRho(n):
    y = x = randint(2, n)
    c = randint(1, n)
    d = 1
    while d==1:
        x = x*x%n+c
        if x >= n: x -= n
        y = y*y%n+c
        if y >= n: y -= n
        d = gcd(abs(x-y), n)
    if is_prime(d): return d
    return PollardRho(d)

res=[]
def getFactor(n):
    while n%2==0: n/=2; res.append(2)
    while n!=1 and not(is_prime(n)):
        d=PollardRho(n)
        while n%d==0: n/=d; res.append(d)
    if n!=1: res.append(n)
```

## 7.9 가우스 소거법 - RREF, 랭크, 행렬식, 역행렬

Time Complexity:  $O(N^3)$

```
// T Add(T a, T b), Sub, Mul, Div 구현해야 함
// bool IsZero(T x) 구현해야 함
template<typename T> // return {rref, rank, det, inv}
tuple<vector<vector<T>>, int, T, vector<vector<T>>>
Gauss(vector<vector<T>> a, bool square=true){
    int n = a.size(), m = a[0].size(), rank = 0;
    vector<vector<T>> out(n, vector<T>(m, 0)); T det = T(1);
    for(int i=0; i<n; i++) if(square) out[i][i] = T(1);
```

```
for(int i=0; i<m; i++){
    if(rank == n) break;
    if(IsZero(a[rank][i])){
        T mx = T(0); int idx = -1; // fucking precision error
        for(int j=rank+1; j<n; j++) if(mx < abs(a[j][i])) mx =
abs(a[j][i]), idx = j;
        if(idx == -1 || IsZero(a[idx][i])){ det = 0; continue; }
        for(int k=0; k<m; k++){
            a[rank][k] = Add(a[rank][k], a[idx][k]);
            if(square) out[rank][k] = Add(out[rank][k],
out[idx][k]);
        }
    }
    det = Mul(det, a[rank][i]);
    T coeff = Div(T(1), a[rank][i]);
    for(int j=0; j<m; j++) a[rank][j] = Mul(a[rank][j], coeff);
    for(int j=0; j<m; j++) if(square) out[rank][j] =
Mul(out[rank][j], coeff);
    for(int j=0; j<n; j++){
        if(rank == j) continue;
        T t = a[j][i]; // Warning: [j][k], [rank][k]
        for(int k=0; k<m; k++) a[j][k] = Sub(a[j][k],
Mul(a[rank][k], t));
        for(int k=0; k<m; k++) if(square) out[j][k] =
Sub(out[j][k], Mul(out[rank][k], t));
    }
    rank++;
}
return {a, rank, det, out};}
```

## 7.10 다항식 곱셈(FFT)

Time Complexity:  $O(N \log N)$

```
// 104,857,601 = 25 * 2^22 + 1, w = 3 | 998,244,353 = 119
* 2^23 + 1, w = 3
// 2,281,701,377 = 17 * 2^27 + 1, w = 3 | 2,483,027,969 = 37
* 2^26 + 1, w = 3
// 2,113,929,217 = 63 * 2^25 + 1, w = 5 | 1,092,616,193 = 521
* 2^21 + 1, w = 3
using real_t = double; using cpx = complex<real_t>;
void FFT(vector<cpx> &a, bool inv_fft=false){
    int N = a.size(); vector<cpx> root(N/2);
    for(int i=1, j=0; i<N; i++){
        int bit = N / 2;
        while(j >= bit) j -= bit, bit >>= 1;
        if(i < (j += bit)) swap(a[i], a[j]);
    }
    long double ang = 2 * acosl(-1) / N * (inv_fft ? -1 : 1);
    for(int i=0; i<N/2; i++) root[i] = cpx(cosl(ang*i),
sinl(ang*i));
    /*
    NTT : ang = pow(w, (mod-1)/n) % mod, inv_fft -> ang^{-1},
root[i] = root[i-1] * ang
    XOR Convolution : set roots[*] = 1, a[j+k] = u+v, a[j+k+i/2] =
u-v
    OR Convolution : set roots[*] = 1, a[j+k+i/2] += inv_fft ?
-u : u;
    AND Convolution : set roots[*] = 1, a[j+k] += inv_fft ? -v :
v;
```

```
/*
for(int i=2; i<=N; i<<=1){
    int step = N / i;
    for(int j=0; j<N; j+=i) for(int k=0; k<i/2; k++){
        cpx u = a[j+k], v = a[j+k+i/2] * root[step * k];
        a[j+k] = u+v; a[j+k+i/2] = u-v;
    }
}
if(inv_fft) for(int i=0; i<N; i++) a[i] /= N; // skip for
AND/OR convolution.
}
vector<ll> multiply(const vector<ll> &a, const vector<ll>
&b){
    vector<cpx> a(all(_a)), b(all(_b));
    int N = 2; while(N < a.size() + b.size()) N <<= 1;
    a.resize(N); b.resize(N); FFT(a); FFT(b);
    for(int i=0; i<N; i++) a[i] *= b[i];
    vector<ll> ret(N); FFT(a, 1); // NTT : just return a
    for(int i=0; i<N; i++) ret[i] = llround(a[i].real());
    while(ret.size() > 1 && ret.back() == 0) ret.pop_back();
    return ret;
}
// 더 높은 정밀도
vector<ll> multiply_mod(const vector<ll> &a, const vector<ll>
&b, const ull mod){
    int N = 2; while(N < a.size() + b.size()) N <<= 1;
    vector<cpx> v1(N), v2(N), r1(N), r2(N);
    for(int i=0; i<a.size(); i++) v1[i] = cpx(a[i] >> 15, a[i] &
32767);
    for(int i=0; i<b.size(); i++) v2[i] = cpx(b[i] >> 15, b[i] &
32767);
    FFT(v1); FFT(v2);
    for(int i=0; i<N; i++){
        int j = i ? N-i : i;
        cpx ans1 = (v1[i] + conj(v1[j])) * cpx(0.5, 0);
        cpx ans2 = (v1[i] - conj(v1[j])) * cpx(0, -0.5);
        cpx ans3 = (v2[i] + conj(v2[j])) * cpx(0.5, 0);
        cpx ans4 = (v2[i] - conj(v2[j])) * cpx(0, -0.5);
        r1[i] = (ans1 * ans3) + (ans1 * ans4) * cpx(0, 1);
        r2[i] = (ans2 * ans3) + (ans2 * ans4) * cpx(0, 1);
    }
    vector<ll> ret(N); FFT(r1, true); FFT(r2, true);
    for(int i=0; i<N; i++){
        ll av = llround(r1[i].real()) % mod;
        ll bv = ( llround(r1[i].imag()) + llround(r2[i].real()) ) %
mod;
        ll cv = llround(r2[i].imag()) % mod;
        ret[i] = (av << 30) + (bv << 15) + cv;
        ret[i] %= mod; ret[i] += mod; ret[i] %= mod;
    }
    while(ret.size() > 1 && ret.back() == 0) ret.pop_back();
    return ret;
}
```

## 7.11 이항 계수를 소수로 나눈 나머지(Lucas' theorem)

Time Complexity: 전처리  $O(P)$ , 쿼리  $O(\log P)$

```
// Lucas C(13);
// C.calc(5, 3) = 5C3 = 10
```

```
// C.calc(10, 2) = 10C2 % 13 = 45 % 13 = 6
// 주의: P는 소수
// P가 크고(약 10억) n,r이 작으면(1000만 이하)
// 생성자에서 fac, inv를 1000만까지만 구해도 됨
```

```
struct Lucas{ // init : O(P), query : O(log P)
    const size_t P;
    vector<ll> fac, inv;
    ll Pow(ll a, ll b){
        ll res = 1;
        for(; b; b>>=1, a=a*a%P) if(b & 1) res = res * a % P;
        return res;
    }
    Lucas(size_t P) : P(P), fac(P), inv(P) {
        fac[0] = 1; for(int i=1; i<P; i++) fac[i] = fac[i-1] * i % P;
        inv[P-1] = Pow(fac[P-1], P-2); for(int i=P-2; ~i; i--) inv[i] = inv[i+1] * (i+1) % P;
    }
    ll small(ll n, ll r) const {
        if(n < r || n < 0 || r < 0) return 0;
        if(!n || !r || n == r) return 1; else return small(n%P, r%P) * calc(n/P, r/P) % P;
    }
};
```

## 7.12 이항 계수 관련 공식

흡수 항등식:  $\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \binom{r-1}{k-1}$ , 정수  $k \neq 0$   
 덧셈 공식:  $\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$   
 $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}$   
 $\binom{r}{m} \binom{m}{k} = \binom{r}{k} \binom{r-k}{m-k}$   
 $\sum_{k \leq n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$ , 정수  $n$   
 $\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ , 정수  $m, n \geq 0$   
 Vandermonde's Identity:  $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$   
 $m=n, r=n$ 을 대입하면  $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$   
 $\sum_k \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$ , 정수  $m, n$   
 $\sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s}{n+k} = \binom{l+s}{l-m+n}$ , 정수  $l \geq 0$ , 정수  $m, n$   
 $\sum_k \binom{l}{m+k} \binom{s+m}{n-l} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m}{n-l}$ , 정수  $l \geq 0$ , 정수  $m, n$   
 $\sum_{k \leq l} \binom{l-k}{m} \binom{s}{k-n} (-1)^k = (-1)^{l+m} \binom{s-m-1}{l-m-n}$ , 정수  $l, m, n \geq 0$   
 $\sum_{-q \leq k \leq l} \binom{l-k}{m} \binom{q+k}{n} = \binom{l+q+1}{m+n+1}$ , 정수  $m, n \geq 0$ , 정수  $l+q \geq 0$

## 7.13 Partition Number

Time Complexity:  $O(N\sqrt{N})$

```
for(int j=1; j*(3*j-1)/2<=i; j++) P[i] += (j%2?1:-1)*P[i-j*(3*j-1)/2], P[i] %= MOD;
for(int j=1; j*(3*j+1)/2<=i; j++) P[i] += (j%2?1:-1)*P[i-j*(3*j+1)/2], P[i] %= MOD;
vector<ModInt> res(sz+1); res[0] = 1; int sq=sqrt(sz);
vector<vector<ModInt>> p(2, vector<ModInt>(sz+1)), d=p;
for(int k=1; k<sq; k++) { p[0][0] = k == 1; // calc p[k][k][n]
    for(int n=1; n<=sz; n++) {
        p[k][1][n] = p[k-1][1][n-1] + (n-k>=0 ? p[k-1][n-k] : 0);
        res[n] += p[k][1][n]; }}
```

```
for(int a=sq; a>0; a--) for(int b=sq; b<=sz; b++){
    d[a&1][b] = d[a+1&1][b-sq] + p[sq-1&1][b-1] + (b-a-1>=0 ? d[a&1][b-a-1] : 0);
    if(a == 0) res[b] += d[a&1][b];
}
```

## 7.14 De Bruijn Sequence

```
// Create cyclic string of length k^n that contains every
length n string as substring. alphabet = [0, k - 1]
int res[10000000], aux[10000000]; // >= k^n
int de_bruijn(int k, int n) { // Returns size (k^n)
    if(k == 1) { res[0] = 0; return 1; }
    for(int i = 0; i < k * n; i++) aux[i] = 0;
    int sz = 0;
    function<void(int, int)> db = [&](int t, int p) {
        if(t > n) {
            if(n % p == 0) for(int i=1; i<=p; i++) res[sz++] = aux[i];
        } else {
            aux[t] = aux[t - p]; db(t + 1, p);
            for(int i=aux[t-p]+1; i<k; i++) aux[t] = i, db(t+1, t);
        }
    }; db(1, 1); return sz;
}
```

## 7.15 지그재그 순열의 개수 구하기

Usage: 지그재그 순열:  $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \dots$  또는  $a_1 > a_2 < a_3 < a_4 < \dots$

```
MAX = 101
E = [[0]*MAX for _ in range(MAX)] #Entringer Number
E[0][0] = 1
for n in range(1, MAX):
    for k in range(1, n+1): E[n][k] = E[n][k-1] + E[n-1][n-k]
# 2*E[N][N]: 1부터 N까지 자연수를 나열한 수열이 지그재그 순열이 되는
경우의 수
```

## 8 문자열

### 8.1 정규 표현식

```
#include <bits/stdc++.h>
#define fastio ios::sync_with_stdio(0), cin.tie(0), cout.tie(0)
using namespace std;
```

#### // sregex\_iterator 사용법

```
int main() {
    fastio;
    regex r("((^\\w+)//([:^:/]+)(:\\d+)?(/.+)?$)");
    int n; cin >> n;
    for (int cnt = 1; cnt <= n; cnt++) {
        string s, ans[4]; cin >> s;
        auto it = sregex_iterator(s.begin(), s.end(), r);
        for (int i = 0; i < 4; i++) {
            ans[i] = it[i + 1];
            if (ans[i].empty()) ans[i] = "<default>";
        }
        if (ans[2][0] == ':') ans[2] = ans[2].substr(1);
        if (ans[3][0] == '/') ans[3] = ans[3].substr(1);
        cout << "URL #" << cnt << '\n';
        cout << "Protocol = " << ans[0] << '\n';
        cout << "Host = " << ans[1] << '\n';
```

```
cout << "Port = " << ans[2] << '\n';
cout << "Path = " << ans[3] << '\n' << '\n';
}
```

#### //regex\_match 사용법

```
int main() {
    fastio;
    int N; cin >> N;
    regex r(R"(^([A-F]?A+F+C+[A-F]?)$)");
    while (N--) {
        string s; cin >> s;
        regex_match(s, r) ? cout << "Infected!\n" : cout << "Good\n";
    }
}
// regex_match: 주어진 문자열이 정규표현식 패턴을 만족하면 true를
반환
// s = regex_replace(s, r, t): 바꿀 문자열 s, 적용할 정규표현식 r,
치환할 패턴 t
```

- ^x // ^은 문자열의 시작을 표현하며, x문자로 시작됨을 의미
- x\$ // \$은 문자열의 종료를 표현하며, x문자로 종료됨을 의미
- .x // .은 개행문자 \n을 제외한 다른 모든 문자를 의미
- x+ // +은 1회 이상 반복을 의미, x문자가 1번 이상 반복됨을 의미 ({1,}과 동일)
- x\* // \*은 0회 이상 반복을 의미, x문자가 0번 이상 반복됨을 의미 ({0,}과 동일)
- x? // ?은 0 or 1개 문자 매칭 의미, x문자가 존재할 수도 있고 안할수도 있다는 의미 ({0,1}과 동일)
- x|y // |은 or를 표현, x 또는 y가 나온다는 의미
- (x) // ()은 그룹을 표현, 괄호로 묶인 패턴을 의미 ((abc){3}와 같이 사용해서 abcabcabc를 검출하는데 쓰임)
- x{n} // {}은 반복을 의미, x가 n번 반복됨을 의미
- x{n,m} // {}은 반복을 의미, x가 n번 이상 m번 이하로 반복됨을 의미
- [xy] // []은 x또는 y를 찾는다는 의미, [a-z0-9]이면 알파벳 소문자 또는 숫자를 찾는다는 의미
- [^xy] // [^]은 not을 의미, x 및 y 를 제외하고 찾는다는 의미
- [a-z] // [-]은 a ~ z를 찾는다는 의미
- \d // \d은 digit으로 숫자를 의미
- \D // \D은 not digit으로 숫자를 제외하고 나머지 다른 문자를 의미
- \s // \s은 space로 공백문자를 의미
- \S // \S은 not space로 공백문자를 제외한 나머지 다른 문자를 의미
- \t // \t은 tab을 의미
- \w // \w은 알파벳 대문자, 소문자와 숫자를 의미, [A-Za-z0-9]을 의미
- \W // \W은 not \w, 즉 \w를 제외한 특수문자를 의미
- (?:) // 캡쳐하지 않는 그룹 생성

## 8.2 문자열 해싱

Time Complexity: build:  $O(N)$ , get:  $O(1)$

```
// 전처리 O(N), 부분 문자열의 해시값을 O(1)에 구함
// Hashing<917, 998244353> H;
// H.build("ABCDABC");
// assert(H.get(1, 4) == H.get(5, 8));
// 주의: get 함수의 인자는 1-based 달인 구간
// 주의: M은 10억 근처의 소수, P는 M과 서로소
```

```
// 1e5+3, 1e5+13, 131'071, 524'287, 1'299'709, 1'301'021
// 1e9-63, 1e9+7, 1e9+9, 1e9+103
template<long long P, long long M> struct Hashing {
    vector<long long> h, p;
    void build(const string &s){
        int n = s.size();
        h = p = vector<long long>(n+1); p[0] = 1;
        for(int i=1; i<=n; i++) h[i] = (h[i-1] * P + s[i-1]) % M;
        for(int i=1; i<=n; i++) p[i] = p[i-1] * P % M;
    }
    long long get(int s, int e) const {
        long long res = (h[e] - h[s-1] * p[e-s+1]) % M;
        return res >= 0 ? res : res + M;
    }
}
```

### 8.3 문자열 매칭 - KMP

Time Complexity: GetFail:  $O(|P|)$ ,  $O(|S| + |P|)$

```
// s에서 p가 등장하는 위치 반환
// KMP("ABABCAB", "AB") = {0, 2, 5}
// KMP("AAAAA", "AA") = {0, 1, 2}
```

```
vector<int> GetFail(const string &p){
    int n = p.size();
    vector<int> fail(n);
    for(int i=1, j=0; i<n; i++){
        while(j && p[i] != p[j]) j = fail[j-1];
        if(p[i] == p[j]) fail[i] = ++j;
    }
    return fail;
}

vector<int> KMP(const string &s, const string &p){
    int n = s.size(), m = p.size();
    vector<int> fail = GetFail(p), ret;
    for(int i=0, j=0; i<s.size(); i++){
        while(j && s[i] != p[j]) j = fail[j-1];
        if(s[i] == p[j]){
            if(j + 1 == m) ret.push_back(i-m+1), j = fail[j];
            else j++;
        }
    }
    return ret;
}
```

### 8.4 가장 긴 팰린드롬 부분 문자열 - Manacher

Time Complexity:  $O(N)$

```
// 각 문자를 중심으로 하는 최장 팰린드롬의 반경을 반환
// Manacher("abaaba") = {0,1,0,3,0,1,6,1,0,3,0,1,0}
// # a # b # a # a # b # a #
// 0 1 0 3 0 1 6 1 0 3 0 1 0
vector<int> Manacher(const string &inp){
    int n = inp.size() * 2 + 1;
    vector<int> ret(n);
    string s = "#";
    for(auto i : inp) s += i, s += "#";
    for(int i=0, p=-1, r=-1; i<n; i++){
        if(i <= r) ret[i] = min(r-i, ret[2*p-i]);
        while(i-ret[i]-1 >= 0 && i+ret[i]+1 < n && s[i-ret[i]-1] == s[i+ret[i]+1]) ret[i]++;
        if(i+ret[i] > r) r = i+ret[i], p = i;
    }
}
```

```
    return ret;
}
```

### 8.5 문자열 매칭 - Z

Time Complexity:  $O(N)$

```
// Z[i] = LongestCommonPrefix(S[0:N], S[i:N])
//      = S[0:N]과 S[i:N]이 앞에서부터 몇 글자 겹치는지
vector<int> Z(const string &s){
    int n = s.size();
    vector<int> z(n);
    z[0] = n;
    for(int i=1, l=0, r=0; i<n; i++){
        if(i < r) z[i] = min(r-i-1, z[i-1]);
        while(i+z[i] < n && s[i+z[i]] == s[z[i]]) z[i]++;
        if(i+z[i] > r) r = i+z[i], l = i;
    }
    return z;
}
```

### 8.6 Aho-Corasick

```
struct Node{
    int g[26], fail, out;
    Node() { memset(g, 0, sizeof g); fail = out = 0; }
};
vector<Node> T(2); int aut[100101][26];
void Insert(int n, int i, const string &s){
    if(i == s.size()) T[n].out++; return;
    int c = s[i] - 'a';
    if(T[n].g[c] == 0) T[n].g[c] = T.size(), T.emplace_back();
    Insert(T[n].g[c], i+1, s);
}
int go(int n, int i){ // DO NOT USE `aut` DIRECTLY
    int &res = aut[n][i]; if(res) return res;
    if(n != 1 && T[n].g[i] == 0) res = go(T[n].fail, i);
    else if(T[n].g[i] != 0) res = T[n].g[i]; else res = 1;
    return res;
}
void Build(){
    queue<int> q; q.push(1); T[1].fail = 1;
    while(!q.empty()){
        int n = q.front(); q.pop();
        for(int i=0; i<26; i++){
            int next = T[n].g[i]; if(next == 0) continue;
            if(n == 1) T[next].fail = 1; else
                T[next].fail = go(T[n].fail, i);
            q.push(next); T[next].out += T[T[next].fail].out;
        } /* for i */ /* while q */ /* build */
    }
}
bool Find(const string &s){
    int n = 1, ok = 0;
    for(int i=0; i<s.size(); i++){
        n = go(n, s[i] - 'a'); if(T[n].out != 0) ok = 1;
    }
    return ok;
}
```

### 8.7 접미사 배열

Time Complexity:  $O(N \log N)$

```
// LCP는 1-based
pair<vector<int>, vector<int>> SuffixArray(const string &s){ // O(N log N)
    int n = s.size(), m = max(n, 256);
    vector<int> sa(n), lcp(n), pos(n), tmp(n), cnt(m);
    auto counting_sort = [&](){
        fill(cnt.begin(), cnt.end(), 0);
        for(int i=0; i<n; i++) cnt[pos[i]]++;
        partial_sum(cnt.begin(), cnt.end(), cnt.begin());
        for(int i=n-1; i>=0; i--) sa[--cnt[pos[tmp[i]]]] = tmp[i];
    };
    for(int i=0; i<n; i++) sa[i] = i, pos[i] = s[i], tmp[i] = i;
    counting_sort();
    for(int k=1; ; k<<=1){
        int p = 0;
        for(int i=n-k; i<n; i++) tmp[p++] = i;
        for(int i=0; i<n; i++) if(sa[i] >= k) tmp[p++] = sa[i] - k;
        counting_sort();
        tmp[sa[0]] = 0;
        for(int i=1; i<n; i++){
            tmp[sa[i]] = tmp[sa[i-1]];
            if(sa[i-1]+k < n && sa[i]+k < n && pos[sa[i-1]] == pos[sa[i]] && pos[sa[i-1]+k] == pos[sa[i]+k]) continue;
            tmp[sa[i]] += 1;
        }
        swap(pos, tmp); if(pos[sa.back()] + 1 == n) break;
    }
    for(int i=0, j=0; i<n; i++, j=max(j-1, 0)){
        if(pos[i] == 0) continue;
        while(sa[pos[i]-1]+j < n && sa[pos[i]+j] < n && s[sa[pos[i]-1]+j] == s[sa[pos[i]]+j]) j++;
        lcp[pos[i]] = j;
    }
    return {sa, lcp};
}
```

### 8.8 All LCS

```
// get LCS(A[0..i], B[l..r]) in O(N^2)
void AllLCS(const string &s, const string &t){
    vector<int> h(t.size()); iota(h.begin(), h.end(), 0);
    for(int i=0, v=-1; i<s.size(); i++, v=-1){
        for(int r=0; r<t.size(); r++){
            if(s[i] == t[r] || h[r] < v) swap(h[r], v);
            //LCS(s[0..i], t[l..r]) = r-l+1 - sum([h[x] >= 1] | x <= r)
        } /* for r */ /* for i */ /* end */
    }
}
```

### 9 계산 기하

#### 9.1 2차원 계산 기하 템플릿 + CCW

```
#include <bits/stdc++.h>
#define x first
#define y second
using namespace std;
using ll = long long;
using Point = pair<ll, ll>;
```

```

Point operator + (Point p1, Point p2){ return {p1.x + p2.x,
p1.y + p2.y}; }
Point operator - (Point p1, Point p2){ return {p1.x - p2.x,
p1.y - p2.y}; }
ll operator * (Point p1, Point p2){ return p1.x * p2.x + p1.y *
p2.y; } // 내적
ll operator / (Point p1, Point p2){ return p1.x * p2.y - p2.x *
p1.y; } // 외적
int Sign(ll v){ return (v > 0) - (v < 0); } // 양수면 +1, 음수면
-1, 0이면 0 반환
ll Dist(Point p1, Point p2){ return (p2 - p1) * (p2 - p1); } // 두 점 거리 계산
ll SignedArea(Point p1, Point p2, Point p3){ return (p2 - p1) /
(p3 - p1); }
int CCW(Point p1, Point p2, Point p3){ return
Sign(SignedArea(p1, p2, p3)); }

```

## 9.2 360도 각도 정렬

```

/* y축
   ↑
3 2 1
4 -1 0 → x축
5 6 7
원점 기준 각도 정렬
x축 위에 있는 점이 가장 먼저, 그리고 반시계 방향으로
*/

```

```

int QuadrantID(const Point p){
    static int arr[9] = { 5, 4, 3, 6, -1, 2, 7, 0, 1 };
    return arr[Sign(p.x)*3+Sign(p.y)+4];
}
sort(points.begin(), points.end(), [&](auto p1, auto p2){
    if(QuadrantID(p1) != QuadrantID(p2)) return QuadrantID(p1) <
QuadrantID(p2);
    else return p1 / p2 > 0; // 반시계
});

```

## 9.3 다각형 넓이

```

// 다각형의 넓이의 2배를 반환, 항상 정수, O(N)
ll PolygonArea(const vector<Point> &v){
    ll res = 0;
    for(int i=0; i<v.size(); i++) res += v[i] /
v[(i+1)%v.size()];
    return abs(res);
}

```

## 9.4 선분 교차 판정

```

// 선분 교차 - 선분 ab와 선분 cd가 만나면 true
bool Cross(Point s1, Point e1, Point s2, Point e2){
    int ab = CCW(s1, e1, s2) * CCW(s1, e1, e2);
    int cd = CCW(s2, e2, s1) * CCW(s2, e2, e1);
    if(ab == 0 && cd == 0){
        if(s1 > e1) swap(s1, e1);
        if(s2 > e2) swap(s2, e2);
        return !(e1 < s2 || e2 < s1);
    }
    return ab <= 0 && cd <= 0;
}
// 교차하지 않으면 0
// 교점이 무한히 많으면 -1

```

```

// 교점이 1개면 1 반환하고 res에 교점 저장
int Cross(Point s1, Point e1, Point s2, Point e2, pair<double,
double> &res){
    if(!Cross(s1, e1, s2, e2)) return 0;
    ll det = (e1 - s1) / (e2 - s2);
    if(!det){
        if(s1 > e1) swap(s1, e1);
        if(s2 > e2) swap(s2, e2);
        if(e1 == s2){ res = s2; return 1; }
        if(e2 == s1){ res = s1; return 1; }
        return -1;
    }
    res.x = s1.x + (e1.x - s1.x) * ((s2 - s1) / (e2 - s2) * 1.0
/ det);
    res.y = s1.y + (e1.y - s1.y) * ((s2 - s1) / (e2 - s2) * 1.0
/ det);
    return 1;
}

```

## 9.5 Intersect Series

```

P perp() const { return P(-y, x); }
#define arg(p, q) atan2(p.cross(q), p.dot(q))
bool circleIntersect(P a,P b,double r1,double r2,pair<P, P>*
out){
    if (a == b) { assert(r1 != r2); return false; }
    P vec = b-a; double d2 = vec.dist2(), sum = r1+r2, dif =
r1-r2;
    double p = (d2 + r1*r1 - r2*r2)/(d2*2), h2 = r1*r1 - p*p*d2;
    if (sum*sum < d2 || dif*dif > d2) return false; // use EPS
    P mid = a + vec*p, per = vec.perp() * sqrt(fmax(0, h2) / d2);
    *out = {mid + per, mid - per}; return true;
}
vector<P> circleLine(P c, double r, P a, P b) {
    P ab = b - a, p = a + ab * (c-a) * ab / D2(ab);
    T s = (b - a) / (c - a), h2 = r*r - s*s / D2(ab);
    if (abs(h2) < EPS) return {p}; if (h2 < 0) return {};
    P h = ab / D1(ab) * sqrtl(h2); return {p - h, p + h};
} // use circleLine if you use double...
int CircleLineIntersect(P o, T r, P p1, P p2, bool segment){
    P s = p1, d = p2 - p1; // line : s + kd, int support
    T a = d * d, b = (s - o) * d * 2, c = D2(s, o) - r * r;
    T det = b * b - 4 * a * c; // solve ak^2 + bk + c = 0, a > 0
    if(!segment) return Sign(det) + 1;
    if(det <= 0) return det ? 0 : 0 <= -b && -b <= a + a;
    bool f11 = b <= 0 || b * b <= det;
    bool f21 = b <= 0 && b * b >= det;
    bool f12 = a+a+b >= 0 && det <= (a+a+b) * (a+a+b);
    bool f22 = a+a+b >= 0 || det >= (a+a+b) * (a+a+b);
    return (f11 && f12) + (f21 && f22);
} // do not use this if you want to use double...
double circlePoly(P c, double r, vector<P> ps){ // return area
    auto tri = [&](P p, P q) { // ps must be ccw polygon
        auto r2 = r * r / 2; P d = q - p;
        auto a = d.dot(p)/d.dist2(), b = (p.dist2()-r*r)/d.dist2();
        auto det = a * a - b;
        if (det <= 0) return arg(p, q) * r2;
        auto s = max(0., -a-sqrt(det)), t = min(1., -a+sqrt(det));
        if (t < 0 || 1 <= s) return arg(p, q) * r2;
        P u = p + d * s, v = p + d * t;
        return arg(p,u) * r2 + u.cross(v)/2 + arg(v,q) * r2;
    };
    auto sum = 0.0;
    rep(i,0,sz(ps)) sum += tri(ps[i] - c, ps[(i+1)%sz(ps)] - c);
    return sum;
}

```

```

return arg(p,u) * r2 + u.cross(v)/2 + arg(v,q) * r2;
}
auto sum = 0.0;
rep(i,0,sz(ps)) sum += tri(ps[i] - c, ps[(i+1)%sz(ps)] - c);
return sum;
}
// extrVertex: point of hull, max projection onto line
#define cmp(i,j) sgn(dir.perp().cross(poly[(i)%n]-poly[(j)%n]))
#define extr(i) cmp(i + 1, i) >= 0 && cmp(i, i - 1 + n) < 0
int extrVertex(vector<P>& poly, P dir) {
    int n = sz(poly), lo = 0, hi = n;
    if (extr(0)) return 0;
    while (lo + 1 < hi) {
        int m = (lo + hi) / 2; if (extr(m)) return m;
        int ls = cmp(lo + 1, lo), ms = cmp(m + 1, m);
        (ls < ms || (ls == ms && ls == cmp(lo, m))) ? hi : lo) = m;
    }
    return lo;
}
//(-1,-1): no collision
//(i,-1): touch corner
//(i,i): along side (i,i+1)
//(i,j): cross (i,i+1)and(j,j+1)
//(i,i+1): cross corner i
// O(log n), ccw no colinear point convex polygon
// P perp() const { return P(-y, x); }
#define cmpL(i) sgn(a.cross(poly[i], b))
array<int, 2> lineHull(P a, P b, vector<P>& poly) { // O(log N)
    int endA = extrVertex(poly, (a - b).perp());
    int endB = extrVertex(poly, (b - a).perp());
    if (cmpL(endA) < 0 || cmpL(endB) > 0) return {-1, -1};
    array<int, 2> res;
    rep(i,0,2) {
        int lo = endB, hi = endA, n = sz(poly);
        while ((lo + 1) % n != hi) {
            int m = ((lo + hi + (lo < hi ? 0 : n)) / 2) % n;
            (cmpL(m) == cmpL(endB) ? lo : hi) = m;
        }
        res[i] = (lo + !cmpL(hi)) % n;
        swap(endA, endB);
    }
    if (res[0] == res[1]) return {res[0], -1};
    if (!cmpL(res[0]) && !cmpL(res[1])) {
        switch ((res[0] - res[1] + sz(poly) + 1) % sz(poly)) {
            case 0: return {res[0], res[0]};
            case 2: return {res[1], res[1]};
        }
    }
    return res;
}

```

## 9.6 Segment Distance, Segment Reflect

```

double Proj(Point a, Point b, Point c){
    ll t1 = (b - a) * (c - a), t2 = (a - b) * (c - b);
    if(t1 * t2 >= 0 && CCW(a, b, c) != 0)
        return abs(CCW(a, b, c)) / sqrt(Dist(a, b));
    else return 1e18; // INF
}
double SegmentDist(Point a[2], Point b[2]){

```

```

double res = 1e18; // NOTE: need to check intersect
for(int i=0; i<4; i++)
res=min(res,sqrt(Dist(a[i]/2.,b[i]/2.)));
for(int i=0; i<2; i++) res = min(res, Proj(a[0], a[1],
b[i]));
for(int i=0; i<2; i++) res = min(res, Proj(b[0], b[1],
a[i]));
return res;
}

P Reflect(P p1, P p2, P p3){ // line p1-p2, point p3
auto [x1,y1] = p1; auto [x2,y2] = p2; auto [x3,y3] = p3;
auto a = y1-y2, b = x2-x1, c = x1 * (y2-y1) + y1 * (x1-x2);
auto d = a * y3 - b * x3;
T x = -(a*c+b*d) / (a*a+b*b), y = (a*d-b*c) / (a*a+b*b);
return 2 * P(x,y) - p3;
}

```

## 9.7 다각형 내부 판별

```

// 다각형 내부 또는 경계 위에 p가 있으면 true, O(N)
bool PointInPolygon(const vector<Point> &v, Point p){
int n = v.size(), cnt = 0;
Point p2(p.x+1, 1'000'000'000 + 1); // 좌표 범위보다 큰 수
for(int i=0; i<n; i++){
    int j = i + 1 < n ? i + 1 : 0;
    if(min(v[i],v[j]) <= p && p <= max(v[i],v[j]) &&
CCW(v[i], v[j], p) == 0) return true;
    if(SegmentIntersection(v[i], v[j], p, p2)) cnt++;
}
return cnt % 2 == 1;
}

```

## 9.8 볼록 껍질 - Graham Scan

```

// 모든 점을 포함하는 가장 작은 볼록 다각형, O(N log N)
vector<Point> ConvexHull(vector<Point> points){
    if(points.size() <= 1) return points;
    swap(points[0], *min_element(points.begin(),
points.end()));
    sort(points.begin()+1, points.end(), [&](auto a, auto b){
        int dir = CCW(points[0], a, b);
        if(dir != 0) return dir > 0;
        return Dist(points[0], a) < Dist(points[0], b);
    });
    vector<Point> hull;
    for(auto p : points){
        while(hull.size() >= 2 && CCW(hull[hull.size()-2],
hull.back(), p) <= 0) hull.pop_back();
        hull.push_back(p);
    }
    return hull;
}

```

## 9.9 가장 먼 두 점 - Rotating Calipers

```

// 가장 먼 두 점을 구하는 함수, O(N)
// 주의: hull은 반시계 방향으로 정렬된 볼록 다각형이어야 함
pair<Point, Point> Calipers(vector<Point> hull){
    int n = hull.size(); ll mx = 0; Point a, b;
    for(int i=0, j=0; i<n; i++){
        while(j + 1 < n && (hull[i+1] - hull[i]) / (hull[j+1] -
hull[j]) >= 0){
            ll now = Dist(hull[i], hull[j]);

```

```

            if(now > mx) mx = now, a = hull[i], b = hull[j];
            j++;
        }
        ll now = Dist(hull[i], hull[j]);
        if(now > mx) mx = now, a = hull[i], b = hull[j];
    }
    return {a, b};
}

```

## 9.10 볼록 다각형 내부 판별

```

// 다각형 내부 또는 경계 위에 p가 있으면 true, O(log N)
// 주의: v는 반시계 방향으로 정렬된 볼록 다각형이어야 함
bool PointInConvexPolygon(const vector<Point> &v, const Point
&pt){
    if(CCW(v[0], v[1], pt) < 0) return false; int l = 1, r =
v.size() - 1;
    while(l < r){
        int m = l + r + 1 >> 1;
        if(CCW(v[0], v[m], pt) >= 0) l = m; else r = m - 1;
    }
    if(l == v.size() - 1) return CCW(v[0], v.back(), pt) == 0
&& v[0] <= pt && pt <= v.back();
    return CCW(v[0], v[1], pt) >= 0 && CCW(v[1], v[1+1], pt) >=
0 && CCW(v[1+1], v[0], pt) >= 0;
}

```

## 9.11 Segment In Polygon

```

// WARNING: C.push_back(C[0]) before call function
bool segment_in_polygon_non_strict(vector<P> &C, P s, P e){
    if(!pip(C, s) || !pip(C, e)) return false;
    if(s == e) return true; P d = e - s;
    vector<pair<frac,int>> v; auto g=raypoints(C, s, d, v);
    for(auto [fr,ev] : v){ // in(06) out(27)
        if(fr.first < 0 || g < fr) continue;
        if(ev == 4) return false; // pass outside corner
        if(fr < g && (ev == 2 || ev == 7)) return false;
        if(0 < fr.first && (ev == 0 || ev == 6)) return false;
    } return true;
}

```

## 9.12 Polygon Cut, Center, Union

```

// Returns the polygon on the left of line l
// *: dot product, ^: cross product
// l = p + d*t, l.q() = l + d
// doubled_signed_area(p,q,r) = (q-p) ^ (r-p)
template<class T> vector<point<T>> polygon_cut(const
vector<point<T>> &a, const line<T> &l){
    vector<point<T>> res;
    for(auto i = 0; i < (int)a.size(); ++ i){
        auto cur = a[i], prev = i ? a[i - 1] : a.back();
        bool side = doubled_signed_area(l.p, l.q(), cur) > 0;
        if(side != (doubled_signed_area(l.p, l.q(), prev) > 0))
            res.push_back(l.p + (cur - l.p ^ prev - cur) / (l.d ^
prev - cur) * l.d);
        if(side) res.push_back(cur);
    }
    return res;
}

P polygonCenter(const vector<P>& v){ // center of mass
    P res(0, 0); double A = 0;

```

```

    for (int i = 0, j = sz(v) - 1; i < sz(v); j = i++) {
        res = res + (v[i] + v[j]) * v[j].cross(v[i]);
        A += v[j].cross(v[i]);
    } return res / A / 3;
}

// O(points^2), area of union of n polygon, ccw polygon
int sideOf(P s, P e, P p) { return sgn((e-s)/(p-s)); }
int sideOf(const P &s, const P &e, const P &p, double eps) {
    auto a = (e-s)/(p-s); auto l=D1(e-s) * eps;
    return (a > 1) - (a < -1);
}

double rat(P a, P b) { return sgn(b.x) ? a.x/b.x : a.y/b.y; }
double polyUnion(vector<vector<P>>& poly) { // (points)^2
    double ret = 0;
    rep(i,0,sz(poly)) rep(v,0,sz(poly[i])) {
        P A = poly[i][v], B = poly[i][(v + 1) % sz(poly[i])];
        vector<pair<double, int>> segs = {{0, 0}, {1, 0}};
        rep(j,0,sz(poly)) if (i != j) { // START
            rep(u,0,sz(poly[j])) {
                P C = poly[j][u], D = poly[j][(u + 1) % sz(poly[j])];
                int sc = sideOf(A, B, C), sd = sideOf(A, B, D);
                if (sc != sd) {
                    double sa = C.cross(D, A), sb = C.cross(D, B);
                    if (min(sc, sd) < 0)
                        segs.emplace_back(sa / (sa - sb), sgn(sc - sd));
                }
            }
            else if (!sc && !sd && j < i && sgn((B-A).dot(D-C))>0){
                segs.emplace_back(rat(C - A, B - A), 1);
                segs.emplace_back(rat(D - A, B - A), -1);
            } /*else if*/ /*rep u*/ /*rep j*/ // END
        }
        sort(all(segs));
        for (auto& s : segs) s.first = min(max(s.first, 0.0), 1.0);
        double sum = 0; int cnt = segs[0].second;
        rep(j,1,sz(segs)) {
            if (!cnt) sum += segs[j].first - segs[j - 1].first;
            cnt += segs[j].second;
        }
        ret += A.cross(B) * sum;
    } return abs(ret) / 2;
}

```

## 9.13 Polycon Raycast

```

// ray A + kd and CCW polygon C, return events {k, event_id}
// 0: out->line / 1: in->line / 2: line->out / 3: line->in
// 4: pass corner outside / 5: pass corner inside / 6: out -
in / 7: in -> out
// WARNING: C.push_back(C[0]) before use, ccw, no colinear
struct frac{
    ll first, second; frac(){}
    frac(ll a, ll b) : first(a), second(b) {
        if (b < 0) first = -a, second = -b; // operator cast
    }
    double v(){ return 1.*first/second; } // operator <, <=, ==
}; // assert(d != P(0,0));
frac raypoints(const vector<P> &C, P A, P d, vector<pair<frac,
int>> &R){ vector<pair<frac, int>> L;
    auto g = gcd(abs(d.x), abs(d.y)); d.x /= g, d.y /= g;
    for(int i = 0; i+1 < C.size(); i++){ P v = C[i+1] - C[i];

```

```

int a = sign(d/(C[i]-A)), b = sign(d/(C[i+1]-A));
if(a == 0) L.emplace_back(frac(d*(C[i]-A)/size2(d), 1), b);
if(b == 0) L.emplace_back(frac(d*(C[i+1]-A)/size2(d), 1), a);
if(a*b == -1) L.emplace_back(frac((A-C[i])/v, v/d), 6);
} sort(L.begin(), L.end());
for(int i = 0; i < L.size(); i++){
    // assert(i+2 >= L.size() || !(L[i].first ==
L[i+2].first));
    if(i+1 < L.size() && L[i].first == L[i+1].first && L[i].second != 6){
        int a = L[i].second, b = L[i+1].second;
        R.emplace_back(L[i++].first, a*b? a*b > 0?
4:6:(1-a-b)/2);
    } /* end if */ else R.push_back(L[i]); } /* end for */
int state = 0; // 0: out, 1: in, 2: line+ccw, 3: line+cw
for(auto &[_,n] : R){
    if( n == 6 ) n ^= state, state ^= 1;
    else if( n == 4 ) n ^= state;
    else if( n == 0 ) n = state, state ^= 2;
    else if( n == 1 ) n = state^(state>>1), state ^= 3;
} return frac(g, 1);
}

bool visible(const vector<P> &C, P A, P B){
    if( A == B ) return true; //return outside?
char I[4] = "356", O[4] = "157";
vector<pair<frac, int>> R; vector<frac> E;
frac s = frac(0, 1), e = raypoints(C, A, B-A, R);
for(auto [f,n] : R){
    if(*find(0, 0+3, n+'0')) E.push_back(f);
    if(*find(I, I+3, n+'0')) E.push_back(f);
}
for(int j = 0; j < E.size(); j += 2) if( !(e <= E[j] ||
E[j+1] <= s) ) return false;
return true; }

```

## 9.14 $O(N \log N)$ Shamos-Hoey

Usage: n개의 선분 중 서로 교차하는 선분 쌍이 존재하는지 여부를  $O(n\log n)$ 에 판별

```

struct Line{
    static ll CUR_X; ll x1, y1, x2, y2, id;
    Line(Point p1, Point p2, int id) : id(id) {
        if(p1 > p2) swap(p1, p2);
        tie(x1,y1) = p1; tie(x2,y2) = p2;
    } Line() = default;
    int get_k() const { return y1 != y2 ? (x2-x1)/(y1-y2) : -1; }
    void convert_k(int k){ // x1,y1,x2,y2 = 0(COORD^2), use i128
        in ccw
        Line res;
        res.x1 = x1 + y1 * k; res.y1 = -x1 * k + y1;
        res.x2 = x2 + y2 * k; res.y2 = -x2 * k + y2;
        x1 = res.x1; y1 = res.y1; x2 = res.x2; y2 = res.y2;
        if(x1 > x2) swap(x1, x2), swap(y1, y2);
    }
    ld get_y(ll offset=0) const { // OVERFLOW
        ld t = ld(CUR_X-x1+offset) / (x2-x1);
        return t * (y2 - y1) + y1; }
    bool operator < (const Line &l) const {
        return get_y() < l.get_y(); }
    // strict
    /* bool operator < (const Line &l) const { */

```

```

        auto le = get_y(), ri = l.get_y();
        if(abs(le-ri) > 1e-7) return le < ri;
        if(CUR_X==x1 || CUR_X==l.x1) return get_y()<l.get_y();
        else return get_y(-1) < l.get_y(-1);
    } */
}; ll Line::CUR_X = 0;
struct Event{ // f=0 st, f=1 ed
    ll x, y, i, f; Event() = default;
    Event(Line l, ll i, ll f) : i(i), f(f) {
        if(f==0) tie(x,y) = tie(l.x1,l.y1);
        else tie(x,y) = tie(l.x2,l.y2);
    }
    bool operator < (const Event &e) const {
        return tie(x,f,y) < tie(e.x,e.f,e.y);
        // strict
        // return make_tuple(x,-f,y) < make_tuple(e.x,-e.f,e.y);
    }
}; tuple<bool,int,int> ShamosHoey(vector<array<Point,2>> v){
    int n = v.size(); vector<int> use(n+1);
    vector<Line> lines; vector<Event> E; multiset<Line> T;
    for(int i=0; i<n; i++){
        lines.emplace_back(v[i][0], v[i][1], i);
        if(int t=lines[i].get_k(); 0<=t && t<=n) use[t] = 1;
    }
    int k = find(use.begin(), use.end(), 0) - use.begin();
    for(int i=0; i<n; i++) { lines[i].convert_k(k);
        E.emplace_back(lines[i], i, 0); E.emplace_back(lines[i], i,
1);
    } sort(E.begin(), E.end());
    for(auto &e : E){ Line::CUR_X = e.x;
        if(e.f == 0){
            auto it = T.insert(lines[e.i]);
            if(next(it) != T.end() && Intersect(lines[e.i],
*next(it))) return {true, e.i, next(it)->id};
            if(it != T.begin() && Intersect(lines[e.i], *prev(it)))
                return {true, e.i, prev(it)->id};
        }
        else{
            auto it = T.lower_bound(lines[e.i]);
            if(it != T.begin() && next(it) != T.end() &&
Intersect(*prev(it), *next(it)))
                return {true, prev(it)->id, next(it)->id};
            T.erase(it);
        }
    }
    return {false, -1, -1};
}

```

## 9.15 $O(N \log N)$ 반평면 교집합

```

double CCW(p1, p2, p3); bool same(double a, double b); const
Point o = Point(0, 0);
struct Line{ // ax+by leq c
    double a, b, c; Line() : Line(0, 0, 0) {}
    Line(double a, double b, double c) : a(a), b(b), c(c) {}
    bool operator < (const Line &l) const {
        bool f1 = Point(a, b) > o, f2 = Point(l.a, l.b) > o;
        if(f1 != f2) return f1 > f2;
        double cw = CCW(o, Point(a, b), Point(l.a, l.b));

```

```

        return same(cw, 0) ? c * hypot(l.a, l.b) < l.c * hypot(a,
b) : cw > 0;
    } Point slope() const { return Point(a, b); }
}; Point LineIntersect(Line a, Line b){
    double det = a.a*b.b - b.a*a.b, x = (a.c*b.b - a.b*b.c) /
det, y = (a.a*b.c - a.c*b.a) / det; return Point(x, y);
}
bool CheckHPI(Line a, Line b, Line c){
    if(CCW(o, a.slope(), b.slope()) <= 0) return 0;
    Point v=LineIntersect(a,b); return v.x*c.a+v.y*c.b>=c.c;
}
vector<Point> HPI(vector<Line> v){
    sort(v.begin(), v.end()); deque<Line> dq; vector<Point> ret;
    for(auto &i : v){
        if(dq.size() && same(CCW(o, dq.back().slope(), i.slope()),
0)) continue;
        while(dq.size() >= 2 && CheckHPI(dq[dq.size()-2],
dq.back(), i)) dq.pop_back();
        while(dq.size() >= 2 && CheckHPI(i,dq[0],dq[1])) dq.pop_front();
        dq.push_back(i);
    }
    while(dq.size() > 2 && CheckHPI(dq[dq.size()-2], dq.back(),
dq[0])) dq.pop_back();
    while(dq.size() > 2 && CheckHPI(dq.back(), dq[0], dq[1]))
dq.pop_front();
    for(int i=0; i<dq.size(); i++){
        Line now = dq[i], nxt = dq[(i+1)%dq.size()];
        if(CCW(o, now.slope(), nxt.slope()) <= eps) return
vector<Point>();
        ret.push_back(LineIntersect(now, nxt));
    } //for(auto &[x,y] : ret) x = -x, y = -y;
    return ret;
} // MakeLine: left side of ray (x1,y1) -> (x2,y2)
Line MakeLine(T x1, T y1, T x2, T y2){
    T a = y2-y1, b = x1-x2, c = x1*a + y1*b; return {a,b,c}; }

```

## 9.16 $O(N^2 \log N)$ Bulldozer Trick(Rotating Sweep Line Technique)

Usage: 서로 다른 정렬의 결과가  $O(N^2)$  가지임을 보이고, 가능한 모든 정렬 결과를  $O(N^2 \log N)$ 에 순회하는 테크닉

```

struct Line{
    ll i, j, dx, dy; // dx >= 0
    Line(int i, int j, const Point &pi, const Point &pj)
        : i(i), j(j), dx(pj.x-pi.x), dy(pj.y-pi.y) {}
    bool operator < (const Line &l) const {
        return make_tuple(dy*l.dx, i, j) < make_tuple(l.dy*dx, l.i,
l.j); }
    bool operator == (const Line &l) const {
        return dy * l.dx == l.dy * dx; }
}; void Solve(){ // V.reserve(N*(N-1)/2)
    sort(A+1, A+N+1); iota(P+1, P+N+1, 1); vector<Line> V;
    for(int i=1; i<=N; i++) for(int j=i+1; j<=N; j++)
        V.emplace_back(i, j, A[i], A[j]);
    sort(V.begin(), V.end());
    for(int i=0, j=0; i<V.size(); i=j){
        while(j < V.size() && V[i] == V[j]) j++;
        for(int k=i; k<j; k++){ */

```

```

int u = V[k].i, v = V[k].j; // point id, index -> Pos[id]
swap(Pos[u], Pos[v]); swap(A[Pos[u]], A[Pos[v]]);
if(Pos[u] > Pos[v]) swap(u, v);
// @TODO
}
}

```

## 10 Misc

### 10.1 삼분 탐색

```

while(s + 3 <= e){
    T l = (s + s + e) / 3, r = (s + e + e) / 3;
    if(Check(l) > Check(r)) s = l; else e = r;
} // get minimum / when multiple answer, find minimum `s`
T mn = INF, idx = s;
for(T i=s; i<=e; i++) if(T now = Check(i); now < mn) mn = now,
idx = i;

```

### 10.2 Mo's Algorithm

Time Complexity:  $O((N+Q)\sqrt{N})$

```

#include <bits/stdc++.h>
#define fastio cin.tie(0)->sync_with_stdio(0)
using namespace std;
using ll = long long;
int sqrtN;

struct Query{
    int idx, s, e;
    bool operator < (Query &x){
        if(s/sqrtN != x.s/sqrtN) return s/sqrtN < x.s/sqrtN;
        return e < x.e;
    }
};

int main(){
    fastio;
    int N, M; cin >> N >> M;
    sqrtN = sqrt(N);

    int A[N+1];
    for(int i=1; i<=N; i++) cin >> A[i];

    Query query[M];
    for(int i=0; i<M; i++){
        int s, e; cin >> s >> e;
        query[i] = Query({i, s, e});
    }
    sort(query, query+M);

```

// 구간 [s, e]의 합을 구하는 예제

```

ll sum = 0, ans[M];
int s = query[0].s, e = query[0].e;
for(int i=s; i<=e; i++) sum += A[i];
ans[query[0].idx] = sum;

for(int i=1; i<M; i++){
    while(s < query[i].s) sum -= A[s++];
    while(s > query[i].s) sum += A[--s];
    while(e < query[i].e) sum += A[++e];
}

```

```

        while(e > query[i].e) sum -= A[e--];
        ans[query[i].idx] = sum;
    }
    for(int i=0; i<M; i++) cout << ans[i] << '\n';
}

```

### 10.3 C++ 랜덤, GCC 확장, 비트마스킹 트리

```

mt19937
rd((unsigned)chrono::steady_clock::now().time_since_epoch().count());
uniform_int_distribution<int> rnd_int(1, r); // rnd_int(rd)
uniform_real_distribution<double> rnd_real(0, 1); // rnd_real(rd)
/////
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
#include <ext/pb_ds/tree_policy.hpp>
#include <ext/rope>
using namespace __gnu_pbds; //ordered_set :
find_by_order(order), order_of_key(key)
using namespace __gnu_cxx; //crotate : append(str), substr(s, e),
at(idx)
template <typename T>
using ordered_set = tree<T, null_type, less<T>, rb_tree_tag,
tree_order_statistics_node_update>;
////
int __builtin_clz(int x); // number of leading zero
int __builtin_ctz(int x); // number of trailing zero
int __builtin_popcount(int x); // number of 1-bits in x
lsb(n): (n & -n); // last bit (smallest)
floor(log2(n)): 31 - __builtin_clz(n | 1);
floor(log2(n)): 63 - __builtin_ctzll(n | 1);
long long next_perm(long long v){
    long long t = v | (v-1);
    return (t + 1) | (((~t & ~t) - 1) >> (__builtin_ctz(v) + 1));
}
int freq(int n, int i) { // # of digit i in [1, n]
    int j, r = 0;
    for (j = 1; j <= n; j *= 10) if (n / j / 10 >= !i) r += (n / 10 / j - !i) * j + (n / j % 10 > i ? j : n / j % 10 == i ? n % j + 1 : 0);
    return r;
}

```

### 10.4 Floating Point Add (Kahan)

```

template<typename T> T float_sum(vector<T> v){
    T sum=0, c=0, y, t; // sort abs(v[i]) increase?
    for(T i:v) y=i-c, t=sum+y, c=(t-sum)-y, sum=t;
    return sum; //worst O(eps*N), avg O(eps*sqrtN)
//dnc: worst O(eps*logN), avg O(eps*sqrtlogN)
}

```

### 10.5 Fast I/O, Fast Div, Fast Mod

```

namespace io { // thanks to cgiosy
    const signed IS=1<<20; char I[IS+1], *J=I;
    inline void daer(){if(J>=I+IS-64){
        char*p=I;do*p++=&J++;
        while(J!=I+IS);p[read(0,p,I+IS-p)]=0;J=I;}}
    template<int N=10,typename T=int>inline T getu(){
        daer();T x=0;int k=0;do x=x*10+*J-'0';
        while(*++J>='0'&&*J<N);++J;return x;}
}

```

```

template<int N=10,typename T=int>inline T geti(){
    daer();bool e==*J=='-';J+=e;return(e?-1:1)*getu<N,T>();
}
struct ff(){I[read(0,I,IS)]=0;}fflu; }
struct FastMod{ // typedef __uint128_t L;
ull b, m; FastMod(ull b) : b(b), m(ull((L(1) << 64) / b)) {}
ull reduce(ull a){ // can be proven that 0 <= r < 2*b
    ull q = (ull)((L(m) * a) >> 64), r = a - q * b;
    return r >= b ? r - b : r;
}
}
inline pair<uint32_t, uint32_t> Div(uint64_t a, uint32_t b){
    if(__builtin_constant_p(b)) return {a/b, a%b};
    uint32_t lo=a, hi=a>>32;
    __asm__("div %2" : "+a,a" (lo), "+d,d" (hi) : "r,m" (b));
    return {lo, hi}; // BOJ 27505, q,r < 2^32
} // divide 10M times in ~400ms
ull mulmod(ull a, ull b, ull M){ // ~2x faster than int128
    ll ret = a * b - M * ull(1.L / M * a * b);
    return ret + M * (ret < 0) - M * (ret >= (11.M));
} // safe for 0 ≤ a,b < M < (1<<63) when long double is 80bit

```

### 10.6 Python Decimal

```

from fractions import Fraction
from decimal import Decimal, getcontext
getcontext().prec = 250 # set precision
N, two, itwo = 200, Decimal(2), Decimal(0.5)
# sin(x) = sum (-1)^n x^(2n+1) / (2n+1)!
# cos(x) = sum (-1)^n x^(2n) / (2n)!
def angle(cosT):
    #given cos(theta) in decimal return theta
    for i in range(N): cosT=((cosT+1)/two)**itwo
    sinT = (1-cosT*cosT)**itwo
    return sinT*(2**N)
pi = angle(Decimal(-1))

```

## 11 Notes

### 11.1 구간별 약수 최대 개수, 최대 소수

$< 10^k$	number	divisors	$2 \ 3 \ 5 \ 7 \ 11 \ 13 \ 17 \ 19 \ 23 \ 29 \ 31 \ 37$
1	6	4	1 1
2	60	12	2 1 1
3	840	32	3 1 1 1
4	7560	64	3 3 1 1
5	83160	128	3 3 1 1 1
6	720720	240	4 2 1 1 1 1
7	8648640	448	6 3 1 1 1 1
8	73513440	768	5 3 1 1 1 1 1
9	735134400	1344	6 3 2 1 1 1 1
10	6983776800	2304	5 3 2 1 1 1 1 1
11	97772875200	4032	6 3 2 2 1 1 1 1 1
12	963761198400	6720	6 4 2 1 1 1 1 1 1
13	9316358251200	10752	6 3 2 1 1 1 1 1 1 1
14	97821761637600	17280	5 4 2 2 1 1 1 1 1 1
15	866421317361600	26880	6 4 2 1 1 1 1 1 1 1
16	8086598962041600	41472	8 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1
17	74801040398884800	64512	6 3 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1
18	897612484786617600	103680	8 4 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1
$< 10^k$	prime	# of prime	$< 10^k$ prime

1	7	4	10	9999999967
2	97	25	11	9999999977
3	997	168	12	999999999989
4	9973	1229	13	999999999991
5	99991	9592	14	9999999999973
6	999983	78498	15	99999999999989
7	999991	664579	16	99999999999937
8	9999989	5761455	17	99999999999997
9	99999937	50847534	18	999999999999989

## 11.2 비트 연산

Some properties of bitwise operations:

- $a|b = a \oplus b + a\&b$
- $a \oplus (a\&b) = (a|b) \oplus b \Leftrightarrow b \oplus a \oplus (a\&b) = (a|b) \Leftrightarrow b \oplus (a\&b) = (a|b) \oplus a$
- $(a\&b) \oplus (a|b) = a \oplus b$

Addition:

- $a + b = a|b + a\&b$
- $a + b = a \oplus b + 2(a\&b)$

Subtraction:

- $a - b = (a \oplus (a\&b)) - ((a|b) \oplus a)$
- $a - b = ((a|b) \oplus b) - ((a|b) \oplus a)$
- $a - b = (a \oplus (a\&b)) - (b \oplus (a\&b))$
- $a - b = ((a|b) \oplus b) - (b \oplus (a\&b))$

application

- 모든 비트 켜기, 오른쪽 i개 비트 켜기 :  $0, (1 << i) - 1$
- 2의 거듭제곱으로 나머지, 곱셈, 나눗셈 연산 :  $n \& ((1 << i) - 1), n << i, n >> i$
- $-n = \sim(n - 1)$  : n - 1은 LSB의 오른쪽 비트 flip, -n은 LSB의 왼쪽 비트 flip
- n의 LSB(가장 오른쪽의 1인 비트) 구하기 :  $n \& -n$
- n이 2의 거듭제곱인지 판별 :  $(n \& n - 1) == 0$  또는  $(n \& -n) == n$
- n의 가장 오른쪽 1 끄기 :  $n \& (n - 1)$
- n의 가장 오른쪽 0 켜기 :  $n | (n + 1)$
- n의 오른쪽 끝의 연속되는 1을 모두 끄기 :  $n \& (n + 1)$
- n의 오른쪽 끝의 연속되는 0을 모두 켜기 :  $n | (n - 1)$
- iterating subset in decreasing order :  $i = (i - 1) \& mask$

## 11.3 Triangles/Trigonometry

- k차원 구 부피:  $V_{2k} = \pi^k / k!$ ,  $v_{2k+1} = 2^{k+1} \pi^k / (2k + 1)!!$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ ,  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ ,  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$ ,  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$
- 반각 공식:  $\sin^2 \theta/2 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$ ,  $\cos^2 \theta/2 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ ,  $\tan^2 \theta/2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$
- 변 길이  $a, b, c; p = (a + b + c)/2$
- 넓이  $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- 외접원 반지름  $R = abc/4A$ , 내접원 반지름  $r = A/p$
- 중선 길이  $m_a = 0.5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ , 각 이등분선  $s_a = \sqrt{bc(1 - \frac{a^2}{b+c})}$
- 사인 법칙  $\frac{\sin A}{a} = 1/2R$ , 코사인 법칙  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
- 탄젠트 법칙  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan(A+B)/2}{\tan(A-B)/2}$
- 중심 좌표  $(\frac{\alpha x_a + \beta x_b + \gamma x_c}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_a + \beta y_b + \gamma y_c}{\alpha + \beta + \gamma})$

이름	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	
외심	$a^2 \mathcal{A}$	$b^2 \mathcal{B}$	$c^2 \mathcal{C}$	$\mathcal{A} = b^2 + c^2 - a^2$
내심	$a$	$b$	$c$	$\mathcal{B} = a^2 + c^2 - b^2$
무게중심	1	1	1	$\mathcal{C} = a^2 + b^2 - c^2$
수심	$\mathcal{BC}$	$\mathcal{CA}$	$\mathcal{AB}$	
방심(A)	$-a$	$b$	$c$	

## 11.4 Calculus, Newton's Method

- 음함수 미분:  $f(x, y) = 0$ 의 양변을  $x$ 에 대해 미분한 뒤  $dy/dx$ 에 대해 정리
- (예시)  $\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - 3\frac{d}{dx}(xy) = 3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3(y + x \frac{dy}{dx}) = 0$
- 역함수 미분:  $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1}(x))$
- 뉴턴 래스:  $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
- 치환 적분:  $x = g(t)$ 로 두면,  $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$
- (예시)  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 에서  $t = f(x)$ 라고 두면  $f'(t) = dt/dx$   
따라서  $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int 1/t dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$
- 삼각 치환:  $\sqrt{a^2 - x^2}$ 에서는  $x = a \sin t$ ,  $\sqrt{a^2 + x^2}$ 에서는  $x = a \tan t$ , 범위 조심
- 입체 도형 부피:  $x = a, x = b$  사이에서 단면의 넓이 함수  $A(x)$ 가 연속이면 부피는  $\int_a^b A(x)dx$
- (원주각법): 연속함수  $f(x)$ 가  $[a, b]$ 에서  $f(x) \geq 0$ 일 때,  $f(x)$ 와 두 직선  $x = a, x = b$ , 그리고 x축으로 둘러싸인 영역을 y축으로 회전시킨 부피는  $\int_a^b 2\pi x f(x) dx$
- 곡선 길이:  $f(t)$ 가  $[a, b]$ 에서 연속이면,  $x = a, x = b$ 사이의 곡선 길이는  $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
- 회전 곡면 넓이: x축으로 회전시킨 부피는  $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$
- $\oint_C (Ldx + Mdy) = \int \int_D (\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}) dx dy$   
• where  $C$  is positively oriented, piecewise smooth, simple, closed;  $D$  is the region inside  $C$ ;  $L$  and  $M$  have continuous partial derivatives in  $D$ .

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$	$-\ln \cos x $
$\csc x$	$-\csc x \cot x$	$\ln \tan(x/2) $
$\sec x$	$\sec x \tan x$	$\ln \tan(x/2 + \pi/4) $
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln \sin x $
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$
$\csc^{-1} x$	$-1/x\sqrt{x^2-1}$	$x \csc^{-1} x + \cosh^{-1} x $
$\sec^{-1} x$	$1/x\sqrt{x^2-1}$	$x \sec^{-1} x - \cosh^{-1} x $
$\cot^{-1} x$	$-1/(1+x^2)$	$x \cot^{-1} x + \frac{\ln(x^2+1)}{2}$

## 11.5 Zeta/Mobius Transform

- Subset Zeta/Mobius Transform( $n=sz=2^k, i^*=2$ )
  - for  $i=1..n-1$  for  $j=0..n-1$  if(i and j)  $v[j] \pm= v[i \text{ xor } j]$
- Superset Zeta/Mobius Transform( $n=sz=2^k, i^*=2$ )
  - for  $i=1..n-1$  for  $j=0..n-1$  if(i and j)  $v[i \text{ xor } j] \pm= v[j]$
- Divisor Zeta/Mobius Transform( $n=sz-1$ )
  - for p:Prime for  $i=1..n/p$   $v[i^*p] += v[i]$
  - for p:Prime for  $i=n/p..1$   $v[i^*p] -= v[i]$
- Multiple Zeta/Mobius Transform( $n=sz-1$ )
  - for p:Prime for  $i=n/p..1$   $v[i] += v[i^*p]$
  - for p:Prime for  $i=1..n/p$   $v[i] -= v[i^*p]$
- AND Convolution: SupZeta(A), SupZeta(B), SupMobius(mul)
  - OR Conv.: Subset, GCD Conv.: Multiple, LCM Conv.: Divisor

- AND/OR:  $2^20 0.3s$ , Subset:  $2^{20} 2.5s$ , GCD/LCM:  $1e6 0.3s$

## 11.6 Generating Function

- 등차수열:  $(pn + q)x^n = p/(1-x) + q/(1-x)^2$
- 등비수열:  $(rx)^n = (1-rx)^{-1}$
- 조합:  $C(m, n)x^n = (1+x)^m$
- 중복조합:  $C(m+n-1, n)x^n = (1-x)^{-m}$
- $f(n) = \sum_{k=0}^n k! \times S_2(n, k)$ 의 EGF:  $1/(2-e^x)$
- Ordinary Generating Function  $A(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$   
 $A(rx) \Rightarrow r^n a_n, xA(x)' \Rightarrow na_n$   
 $A(x) + B(x) \Rightarrow a_n + b_n, A(x)B(x) \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i}$   
 $A(x)^k \Rightarrow \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$   
 $\frac{A(x)}{1-x} \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i$
- Exponential Generating Function  $A(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{a_i}{i!} x^i$   
 $A(x) + B(x) \Rightarrow a_n + b_n, A(x)B(x) \Rightarrow \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$   
 $A^{(k)}(x) \Rightarrow a_{n+k}, xA(x) \Rightarrow na_n$   
 $A(x)^k \Rightarrow \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} \binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k} a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$

## 11.7 Counting

함수 일차	조건 없음	단사 함수	전사 함수
$k^n$	$k!/(k-n)!$	$k! \times S_2(n, k)$	
공 구별 X	$C(n+k-1, n)$	$C(k, n)$	$C(n-1, n-k)$ 조심
상자 구별 X	$B(n, k)$	$[n \leq k]$	$S_2(n, k)$
모두 구별 X	$P_k(n+k)$	$[n \leq k]$	$P_k(n)$

- 단사 함수: 상자에 공 최대 1개, 전사 함수: 상자에 공 최소 1개
- 중복 조합:  $C(n+k-1, n) = H(n, k)$
- 공 구별 X, 전사 함수에서  $n = k = 0$ 일 때 정답 1인 거 조심
- 고란 순열: 모든  $i$ 에 대해  $\pi(i) \neq i$ 가 성립하는 길이  $n$  순열 개수  
 초항(0-based): 1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854  
 일반항:  $D(n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k n!/k!$ ,  $D(n) \approx n!/e$   
 점화식:  $D(0) = 1; D(1) = 0; D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2))$   
 생성함수(EGF):  $e^{-x}/(1-x)$
- 카탈란 수
  - 길이가  $2n$ 인 올바른 괄호 수
  - $n+1$ 개의 리프를 가진 풀 바이너리 트리의 수
  - $n+2$ 각형을  $n$ 개의 삼각형으로 나누는 방법의 수 초항(0-based): 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786
  - 일반항:  $Cat(n) = Comb(2n, n)/(n+1) = C(2n, n) - C(2n, n+1)$
  - 점화식:  $Cat(0) = 1; Cat(n) = \sum_{k=0}^{n-1} Cat(k) \times Cat(n-k-1)$
  - 생성함수(OGF):  $(1 - \sqrt{1-4x})/(2x)$   
 여는 괄호  $n$ 개, 닫는 괄호  $k \leq n$ 개 =  $C(n+k, k) \times (n-k+1)/(n+1)$
- 제 1종 스텔링 수:  $k$ 개의 사이클로 구성된 길이  $n$  순열 개수  
 점화식:  $S_1(n, 0) = [n=0]; S_1(n, k) = S_1(n-1, k-1) + S_1(n-1, k) \times (n-1),$  생성함수(EGF):  $(-ln(1-x))^k/k!$   
 성질:  $\sum_{k=0}^n S_1(n, k) = n!$
- 제 2종 스텔링 수:  $n$ 개의 원소를  $k$ 개의 공집합이 아닌 부분집합으로 분할  
 일반항:  $S_2(n, k) = 1/k! \times \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \times C(k, i) \times i^n$ , 단  $S(0, 0) = 1$   
 점화식:  $S_2(n, 0) = [n=0]; S_2(n, k) = S_2(n-1, k-1) + S_2(n-1, k) \times k$   
 생성함수(EGF):  $(\exp(x)-1)^k/k!$   
 성질: A, B를  $n-k, \lfloor (k-1)/2 \rfloor$ 의 켜진 비트 위치라고 하면,  $S_2(n, k) \bmod 2 = [A \cap B = \emptyset]$   
 성질:  $S_2(2n, n)$ 은  $n$ 이 fibbinary number(연속한 1 없음) 일 때만 홀수
- 멜 수  $B(n)$ :  $n$ 개의 원소를 분할하는 방법의 수  
 초항(0-based): 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975  
 일반항:  $B(n) = \sum_{k=0}^n S_2(n, k),$  몇 개의 상자를 베릴지 다 돌아보기  
 점화식:  $B(0) = 1; B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} C(n-1, k) \times B(k)$   
 생성함수(EGF):  $\exp(\exp(x)-1)$

- 벨 수  $B(n, k)$ :  $n$ 개를 집합  $k$ 개로 분할하는 방법의 수(공집합 허용)
  - 일반항:  $B(n, k) = \sum_{i=0}^k S_2(n, i) = \sum_{i=0}^k \frac{i^n}{i!} \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(-1)^j}{j!}$
- 분할 수  $P(n)$ :  $n$ 을 자연수 몇 개의 합으로 나타내는 방법의 수, 순서 X 초항(0-based): 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42
  - 점화식:  $P(0) = 1$ , 팀노트 어딘가에 있는 코드로  $O(n\sqrt{n})$  가능
- 분할 수  $P(n, k)$ :  $n$ 을  $k$ 개의 자연수의 합으로 나타내는 방법의 수, 순서 X
  - 점화식:  $P(0, 0) = 1$ ;  $P(n, 0) = 0$ ;  $P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$
  - 성질:  $\sum_{k=0}^n P(n, k) = P(n)$
- 피보나치 수  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ 
  - 일반항:  $\frac{F_n = (\phi^n - (-1)^{n+1})/\sqrt{5}}{\phi^n = ((1+\sqrt{5})/2)^n}$
  - 생성함수(OGF):  $F(x) = x/(1-x-x^2)$
  - 성질:  $F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$
  - 성질:  $\gcd(F_n, F_m) = F_{\gcd(n,m)}, F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n-1}$
- 벨 수  $B(n, k)$  식 전개
 
$$\begin{aligned} B(n, k) &= \sum_{j=0}^k S(n, j) = \sum_{j=0}^k 1/j! \sum_{i=0}^j (-1)^{j-i} j C_i \times i^n \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^{j-i}}{i!(j-i)!} i^n = \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^k \frac{(-1)^{j-i}}{i!(j-i)!} i^n \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(-1)^j}{i!j!} i^n = \sum_{i=0}^k \frac{i^n}{i!} \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(-1)^j}{j!} \end{aligned}$$

## 11.8 Faulhaber's Formula ( $\sum_{k=1}^n k^c$ )

- $B_n$ : 베르누이 수
- 생성함수(egf):  $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{(e^x - 1)/x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$
- 일반항:  $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{k!(-1)^k}{k+1} S_2(n, k)$
- 점화식:  $B_0 = 1; B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n+1}{r} B_r$
- $\sum_{k=1}^n k^c = \sum_{k=0}^c \binom{-1}{c+1} \binom{c+1}{k} B_k n^{c+1-k}$

## 11.9 About Graph Degree Sequence

- 단순 무향 그래프(Erdos-Gallai): 차수열  $d_1 \geq \dots \geq d_n$ 의 합이 짝수 and 모든  $1 \leq k \leq n$ 에 대해  $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$
- 단순 이분 그래프(Gale-Ryser): 차수열  $a_1 \geq \dots \geq a_n, b_i$ 에서  $\text{sum}(a) = \text{sum}(b)$  and 모든  $1 \leq k \leq n$ 에 대해  $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^n \min(b_i, k)$
- 단순 방향 그래프(Fulkerson-Chen-Anstee):  $a_1 \geq \dots \geq a_n$ 를 만족하는 진입/진출 차수열  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ 에서  $\text{sum}(a) = \text{sum}(b)$  and 모든  $1 \leq k \leq n$ 에 대해  $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k \min(b_i, k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(b_i, k)$

## 11.10 Burnside, Grundy, Pick, Hall, Simpson, Area of Quadrangle, Fermat Point, Euler, Pythagorean

- Burnside's Lemma
  - 수식
  $G=(X,A)$ : 집합X와 액션A로 정의되는 군G에 대해,  $|A||X/A| = \text{sum}(|\text{Fixed points of } a|, \text{for all } a \in A)$ 
 $X/A$ 는 Action으로 서로 변형가능한 X의 원소들을 동치로 묶었을 때 동치류(파티션) 집합
  - 풀어쓰기
  $\text{orbit}$ : 그룹에 대해 두 원소 a,b와 액션f에 대해  $f(a)=b$ 인거에 간선연결한 컴포넌트(연결집합)
  - orbit개수 =  $\text{sum}(\text{각 액션 } g \text{에 대해 } f(x)=x \text{인 } x \text{의 고정점 개수}) / \text{액션 개수}$ 
    - 자유도 치트시트
 회전 n개: 회전의 고정점 자유도=gcd(n,i)
    - 임의뒤집기 n=홀수: n개 원소중심축(자유도 (n+1)/2)
  $\text{임의뒤집기 } n=\text{짝수}: n/2\text{개 원소중심축(자유도 } n/2+1) + n/2\text{개 원소안지나는축(자유도 } n/2)$

## • 알고리즘 게임

- Nim Game의 해법(마지막에 가져가는 사람이 승) : XOR = 0이면 후공승, 0 아니면 선공승
- Subtraction Game : 한 번에 k 개까지의 돌만 가져갈 수 있는 경우, 각 더미의 돌의 개수를 k + 1로 나눈 나머지를 XOR 합하여 판단한다.
- Index-k Nim : 한 번에 최대 k개의 더미를 골라 각각의 더미에서 아무 렇게나 돌을 제거할 수 있을 때, 각 binary digit에 대하여 힙을 k + 1로 나눈 나머지를 계산한다. 만약 이 나머지가 모든 digit에 대하여 0이라면 두번째, 하나라도 0이 아니라면 첫번째 플레이어가 승리.
- Misere Nim : 모든 돌 무더기가 1이면 N이 훌수일 때 후공 승, 그렇지 않은 경우 XOR 합 0이면 후공 승

## • Pick's Theorem

격자점으로 구성된 simple polygon이 주어짐. I는 polygon 내부의 격자점 수, B는 polygon 선분 위 격자점 수, A는 polygon의 넓이라고 할 때, 다음과 같은 식이 성립한다.  $A = I + B/2 - 1$

- 훌의 결론 정리 : 이분그래프(L-R)에서, 모든 L을 매칭하는 필요충분 조건 = L에서 임의의 부분집합 S를 골랐을 때, 반드시  $(S \text{의 크기}) \leq (S \text{와 연결되어있는 모든 R의 크기})$ 이다.

- Simpson 공식 (적분) : Simpson 공식,  $S_n(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + f(x_n) + 4\sum f(x_{2i+1}) + 2\sum f(x_{2i})]$

$M = \max |f^4(x)|$ 이라고 하면 오차 범위는 최대  $E_n \leq \frac{M(b-a)}{180} h^4$

- 브라마굽타 : 원에 내접하는 사각형의 각 선분의 길이가  $a, b, c, d$ 일 때

사각형의 넓이  $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ ,  $s = (a+b+c+d)/2$

- 브레치나이더 : 임의의 사각형의 각 변의 길이를  $a, b, c, d$ 라고 하

고, 주보는 두 각의 합을 2로 나눈 값을  $\theta$ 라 하면,  $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \times \cos^2 \theta}$

- 페르마 포인트 : 삼각형의 세 꼭짓점으로부터 거리의 합이 최소가 되는 점  $2\pi/3$  보다 큰 각이 있으면 그 점이 페르마 포인트, 그렇지 않으면 각변마다 정삼각형 그린 다음, 정삼각형의 끝점에서 반대쪽 삼각형의 꼭짓점으로 연결한 선분의 교점

$2\pi/3$  보다 큰 각이 없으면 거리의 합은  $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)/2}, S$ 는 넓이

- 오일러 정리: 서로소인 두 정수  $a, n$ 에 대해  $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

모든 정수에 대해  $a^n \equiv a^{n-\phi(n)} \pmod{n}$

$m \geq \log_2 n$ 이면  $a^m \equiv a^{m \% \phi(n) + \phi(n)} \pmod{n}$

- $g^0 + g^1 + g^2 + \dots + g^{p-2} \equiv -1 \pmod{p}$  iff  $g = 1$ , otherwise 0.

- if  $n \equiv 0 \pmod{2}$ , then  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n \equiv 0 \pmod{n}$

- Eulerian numbers

Number of permutations  $\pi \in S_n$  in which exactly  $k$  elements are greater than the previous element.  $k$ : s.t.  $\pi(j) > \pi(j+1)$ ,  $k+1$ : s.t.  $\pi(j) \geq j$ ,  $k$ : s.t.  $\pi(j) > j$ .

$E(n, k) = (n-k)E(n-1, k-1) + (k+1)E(n-1, k)$

$E(n, 0) = E(n, n-1) = 1$

$E(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n+1}{j} (k+1-j)^n$

- Pythagorean triple:  $a^2 + b^2 = c^2$ 이고 서로소인  $(a, b, c)$  생성

$(a, b, c) = (st, \frac{s^2-t^2}{2}, \frac{s^2+t^2}{2}), \gcd(s, t) = 1, s > t$

## 11.11 About Graph Minimum Cut

- $N$ 개의 boolean 변수  $v_1, \dots, v_n$ 을 정해서 비용을 최소화하는 문제 =true인 점은 T, false인 점은 F와 연결되게 분할하는 민컷 문제

1.  $v_i$ 가 T일 때 비용 발생:  $i$ 에서 F로 가는 비용 간선
2.  $v_i$ 가 F일 때 비용 발생:  $i$ 에서 T로 가는 비용 간선
3.  $v_i$ 가 T이고  $v_j$ 가 F일 때 비용 발생:  $i$ 에서  $j$ 로 가는 비용 간선
4.  $v_i \neq v_j$ 일 때 비용 발생:  $i$ 에서  $j$ 로,  $j$ 에서  $i$ 로 가는 비용 간선
5.  $v_i$ 가 T면  $v_j$ 도 T여야 함:  $i$ 에서  $j$ 로 가는 무한 간선
6.  $v_i$ 가 F면  $v_j$ 도 F여야 함:  $j$ 에서  $i$ 로 가는 무한 간선

- 5/6번 +  $v_i$ 와  $v_j$ 가 달라야 한다는 조건이 있으면 MAX-2SAT

- Maximum Density Subgraph (NEERC'06H, BOJ 3611 팀의 난이도)

- density  $\geq x$ 인 subgraph가 있는지 이분 탐색

- 정점  $N$ 개, 간선  $M$ 개, 차수  $D_i$ 개

- 그래프의 간선마다 용량 1인 양방향 간선 추가

- 소스에서 정점으로 용량  $M$ , 정점에서 싱크로 용량  $M - D_i + 2x$

- min cut에서 S와 붙어 있는 애들이 1개 이상이면 x 이상이고, 그게 subgraph의 정점들

- while( $r-l \geq 1.0/(n^2)$ ) 으로 해야 함. 너무 많이 돌리면 실수 오차

## 11.12 Matrix with Graph(Kirchhoff, Tutte, LGV)

- Kirchhoff's Theorem : 그래프의 스패닝 트리 개수

-  $m[i][j] := -(\text{i-j 간선 개수}) / (\text{유향}) - (i \rightarrow j \text{ 간선})$

-  $m[i][i] := \text{정점 } i \text{의 degree} / (\text{유향}) \text{ 정점 } i \text{의 in degree}$

- res = (m의 첫 번째 행과 첫 번째 열을 없앤  $(n-1) \times (n-1)$  matrix의 행렬식)

- (유향) m의 루트 번째 행과 열을 삭제한 행렬의 행렬식

- Tutte Matrix : 그래프의 최대 매칭

-  $m[i][j] :=$  간선  $(i, j)$ 가 없으면 0, 있으면  $i < j ? r : -r$ ,  $r$ 은  $[0, P)$

구간의 임의의 정수

- rank(m)/2가 높은 확률로 최대 매칭 (mod P)

- LGV Theorem: 간선에 가중치 있는 DAG에서 어떤 경로 P의 간선 가중치 합을  $w(P)$ , 모든  $a \rightarrow b$  경로들의  $w(P)$ 의 합을  $e(a, b)$ 라고 하자. n 개의 시작점  $a_i$ 와 도착점  $b_j$ 가 주어졌을 때, 서로 정점이 겹치지 않는 n 개의 경로로 시작점과 도착점을 일대일 대응시키는 모든 경우에서  $w(P)$ 의 합은  $\det M(i, j) = e(a_i, b_j)$ 와 같음. 따라서 모든 가중치를 1로 두면 서로소 경로 경우의 수를 구함

## 11.13 About Graph Matching(Graph with $|V| \leq 500$ )

- Game on a Graph : s에 토큰이 있음. 플레이어는 각자의 턴마다 토큰을 인접한 정점으로 옮기고 못 옮기면 짐. s를 포함하지 않는 최대 매칭이 존재함  $\Leftrightarrow$  후공이 이김

- Chinese Postman Problem : 모든 간선을 방문하는 최소 가중치 Walk를 구하는 문제. Floyd를 돌린 다음, 훌수 정점들을 모아서 최소 가중치 매칭(훌수 정점은 짝수 개 존재)

- Unweighted Edge Cover : 모든 정점을 덮는 가장 작은(minimum cardinality/weight) 간선 집합을 구하는 문제  $|V| - |M|$ , 길이 3짜리 경로 없음, star graph 여러 개로 구성

- Weighted Edge Cover :  $\text{sum}_{v \in V} (w(v)) - \text{sum}_{(u,v) \in M} (w(u) + w(v) - d(u, v))$ ,  $w(x)$ 는 x와 인접한 간선의 최소 가중치

- NEERC'18 B : 각 기계마다 2명의 노동자가 다뤄야 하는 문제. 기계마다 두 개의 정점을 만들고 간선으로 연결하면 정답은  $|M| - |\text{기계}|$ 임. 정답에 1/2씩 기여한다는 점을 생각해보면 좋음.

- Min Disjoint Cycle Cover : 정점이 중복되지 않으면서 모든 정점을 덮는 길이 3 이상의 사이클을 집합을 찾는 문제. 모든 정점은 2개의 서로 다른 간선, 일부 간선은 양쪽 끝점과 매칭되어야 하므로 플로우를 생각할 수 있지만 용량 2짜리 간선에 유량을 1만큼 훌릴 수 있으므로 플로우는 불가능.

- 각 정점과 간선을 2개씩의  $(v, v'), (e_{i,j}, e_{i,j}')$ 로 복사하자. 모든 간선  $e = (u, v)$ 에 대해  $e_u$ 와  $e_v$ 를 있는 가중치  $w$ 짜리 간선을 만들고(like NEERC'18),  $(u, e_{i,u}), (u', e_{i,u}'), (v, e_{i,v}), (v', e_{i,v}')$ 를 연결하는 가중치 0짜리 간선을 만들자. Perfect 매칭이 존재함  $\Leftrightarrow$  Disjoint Cycle Cover 존재. 최대 가중치 매칭 찾은 뒤 모든 간선 가중치 합에서 매칭 빼면 됨.

- Two Matching : 각 정점이 최대 2개의 간선과 인접할 수 있는 최대 가중치 매칭 문제.

- 각 컴포넌트는 정점 하나/경로/사이클이 되어야 함. 모든 서로 다른 정점 쌍에 대해 가중치 0짜리 간선 만들고, 가중치 0짜리  $(v, v')$  간선 만들면 Disjoining Cycle Cover 문제가 됨. 정점 하나만 있는 컴포넌트는 self-loop, 경로 형태의 컴포넌트는 양쪽 끝점을 연결한다고 생각하면 편함.

### 11.14 Checklist

- (예비소집) bits/stdc++.h, int128, long double 80bit, avx2 확인
- (예비소집) 스택 메모리(지역 변수, 재귀, 람다 재귀), 제출 파일 크기 확인
- (예비소집) MLE(힙,스택), stderr 출력 RTE?, 줄 앞뒤 공백 채점 결과
- 비슷한 문제를 풀어본 적이 있는가?
- 단순한 방법에서 시작할 수 있을까? (Brute Force)
- 내가 문제를 푸는 과정을 수식화할 수 있을까? (예제를 직접 해결하면서)
- 문제를 단순화할 수 없을까? / 그럼으로 그려볼 수 있을까?
- 수식으로 표현할 수 있을까? / 문제를 분해할 수 있을까?
- 뒤에서부터 생각해서 풀 수 있을까? / 순서를 강제할 수 있을까?
- 특정 형태의 답만을 고려할 수 있을까? (정규화)
- 구간을 둘째로 가쳐간다 : 플로우 + 적당한 자료구조  
 $(i, i+1, k, 0), (s, e, 1, w), (N, T, k, 0)$
- $a = b$  :  $a$ 만 이동,  $b$ 만 이동, 두 개 동시에 이동, 반대로 이동
- 말도 안 되는 것 / 당연하다고 생각한 것 다시 생각해 보기
- Directed MST / Dominator Tree
- 일정 비율 충족 or 2 3개로 모두 커버 : 랜덤
- 확률 : DP, 이분 탐색(NYPC 2019 Finals C)
- 최대/최소 : 이분 탐색, 그리디(Prefix 고정, Exchange Argument), DP(순서 고정)
- 냅색: 파라미터 순서 변경, min plus convolution, FFT
- signal(SIGSEGV, []{int{.Exit(0);}}); converts segfaults into WA.  
SIGABRT(assertion fail), SIGFPE(0div)
- feenableexcept(29) kills problem on NaNs(1), 0div(4), inf(8), denormals(16)